Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 12 Febbraio

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Determinare le $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ soluzioni dell'equazione $x^2+y^2 = 0$. **Soluzione**: $\{(-iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\} \cup \{(iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$

2. Determinare una base del sottospazio vettoriale $V = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\}$

   Soluzione: $B = \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5$

3. Determinare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ tre colonne linearmente indipendenti della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b & a & a-b \\ a & b & c+1 & a+c & b-c \\ 0 & c & 1 & c^2 & c+1 \\ a^2+1 & c & ac+1 & c & c-3 \\ 0 & a & 0 & a & 3 \\ a^2+c^2 & 3+c & a^4+1 & c-4 & c-3 \end{pmatrix}$$

   Soluzione: per esempio, $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}\ A^1, A^3, A^6$

4. Calcolare l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} a^2+1 & a^2+7 \\ 0 & |\, a \,| + 3 \end{pmatrix}$

   Soluzione: $M^{-1} = \frac{1}{(a^2+1)(|a|+3)} \begin{pmatrix} |\, a \,| + 3 & -a^2-7 \\ 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$

5. Determinare il numero di radici con molteplicità maggiore di 1 del polinomio $3x^5 - 5x^3 + 7$
   Soluzione: 0

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema con tre incognite x, y, z, quattro equazioni ed il parametro a.*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 3a & a & 0 \\ a & -a & a \\ a & a & -a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Riduciamo la matrice associata al sistema con Gauss.

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat([[a,  0,      2, a],
        [3a, a,      0, 1],
        [a, -a,      a, 1],
        [a,  a, -a + 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Dato che non dividiamo per il pivot a non dobbiamo porre condizioni.
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, 0, 2, a]
     2^a-3*1^a [0, a, -6, -3a + 1]
     3^a-1*1^a [0, -a, a - 2, -a + 1]
     4^a-1*1^a [0, a, -a, -a + 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=a
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, 0, 2, a]
-------------- [0, a, -6, -3a + 1]
     3^a+1*2^a [0, 0, a - 8, -4a + 2]
     4^a-1*2^a [0, 0, -a + 6, 2a]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=a - 8
Dato che devo dividere per il pivot, devo fare a parte il caso a=8. Qui suppongo a<>8
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
--------------          [a, 0,     2,                           a]
--------------          [0, a,    -6,                     -3a + 1]
--------------          [0, 0, a - 8,                     -4a + 2]
4^a+(a - 6)/(a - 8)*3^a [0, 0,     0, (-2a^2 + 10a - 12)/(a - 8)]
```

Esaminiamo i vari casi con Rouchè-Capelli, considerando che $-2a^2+10a-12 = -2(a-2)(a-3)$:

1. $a \neq 8$.

   (a) Se $a \neq 2, 3$ la matrice incompleta ha tre pivot, quella completa quattro. Sistema impossibile.

(b) Se $a = 2, 3$ la matrice incompleta ha tre pivot, come la completa. Esiste soluzione unica.

2. $a = 8$. Non possiamo usare la matrice completamente ridotta, che è stata calcolata supponendo $a \neq 8$, ma possiamo usare l'ultima matrice calcolata prima di questa supposizione,

$$\left(\begin{array}{ccr|r} a & 0 & 2 & a \\ 0 & a & -6 & -3a+1 \\ 0 & 0 & a-8 & -4a+2 \\ 0 & 0 & -a+6 & 2a \end{array}\right)$$

è evidente sostituendo $a = 8$ nella terza riga che il sistema associato non ha soluzioni

Riassumendo, il sistema ha un unica soluzione per $a = 2, 3$, altrimenti è impossibile. $\square$

Esercizio 2 (8pt)**.** *Dati* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ *linearmente indipendenti ed al variare di* $a \in \mathbb{R}$ *si determinino, se esistono, gli endomorfismi diagonalizzabili* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *che soddisfano le condizioni*

$$\begin{aligned} T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) &= a(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \\ T(\underline{v}_1 - \underline{v}_3) &= 2\underline{v}_1 \end{aligned}$$

Soluzione. Dato che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti ed appartengono ad uno spazio di dimensione 3, formano una base B' di $\mathbb{R}^3$. In coordinate B' i vettori

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \quad \underline{w}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \quad \underline{w}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_3$$

si scrivono come

$$\underline{w}_1 = (1, -1, 0)_{B'}, \quad \underline{w}_2 = (1, 1, 0)_{B'}, \quad \underline{w}_3 = (1, 0, -1)_{B'}$$

e dato che, espressi in coordinate B' e messi come righe della matrice sottostante abbiamo che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti e formano anch'essi una base di $\mathbb{R}^3$, che indicheremo con B. Dato che

$$2\underline{v}_1 = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$$

abbiamo ricordando che *in coordinate* B

$$\underline{w}_1 = 1 \cdot \underline{w}_1 + 0 \cdot \underline{w}_2 + 0 \cdot \underline{w}_3 = (1, 0, 0)_B$$

ed analogamente, $\underline{w}_2 = (0, 1, 0)_B$, $\underline{w}_3 = (0, 0, 1)_B$, esprimendo tutto in coordinate della base B abbiamo che

$$\begin{aligned} T(\underline{w}_1) &= T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{w}_2 = (0, 1, 0)_B \\ T(\underline{w}_2) &= T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = a(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = a\underline{w}_2 = (a, 0, 0)_B \\ T(\underline{w}_3) &= T(\underline{v}_1 - \underline{v}_3) = 2\underline{v}_1 = 2(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (1, 1, 0)_B \end{aligned}$$

e quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & a & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - a)$$

1. Se $a < 0$ il polinomio caratteristico non ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ e quindi T non è diagonalizzabile.

2. Se $a = 0$ il polinomio caratteristico diviene λ^3, un singolo autovalore $\lambda_0 = 0$ di molteplicità algebrica 3. Dato che

$$\mathrm{mg}(\lambda_0) = 3 - rk \begin{pmatrix} -\lambda & a & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=0} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

   le molteplicità algebriche e geometriche di λ_0 sono diverse e T non è diagonalizzabile.

3. Se $a > 0$ abbiamo tre autovalori distinti $0, \pm\sqrt{a}$ e T è diagonalizzabile.

Riassumendo, un endormorfismo diagonalizzabile T che soddisfi le condizioni date esiste se e solo se $a > 0$.

□

Esercizio 3 (8pt)**.** *Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato dalle basi canoniche alla matrice*

$$(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Discutere la diagonalizzabilità di F al variare di a.

Dimostrazione. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & a & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - a)(a - \lambda)$$

Per avere tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ imponiamo $a \geq 0$, altrimenti F non è diagonalizzabile. Abbiamo i tre autovalori

$$\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = \sqrt{a},\ \lambda_3 = -\sqrt{a}$$

1. I tre autovalori possono essere tutti e tre coincidenti (ad $\lambda_1 = 0$) se e solo se $a = 0$. In questo caso abbiamo $p_F(\lambda) = -\lambda^3$ e la molteplicità algebrica dell'unico autovalore λ_1 è 3, mentre
$$rk \begin{pmatrix} -\lambda & a & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=0} = rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
quindi $\text{mg}(\lambda_1) = 3 - 2 = 1$ e F non è diagonalizzabile.

2. Possiamo avere $\lambda_1 = a = \sqrt{a} = \lambda_2$ se e solo se $a = 0, 1$. Abbiamo già considerato $a = 0$. Per $a = 1$ abbiamo $p_F(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, e la molteplicità algebrica di $\lambda_2 = 1$ è 2 mentre la molteplicità algebrica di di $\lambda_3 = -1$ è 1. Calcoliamo
$$\text{mg}(\lambda_2) = 3 - rk \begin{pmatrix} -\lambda & a & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$
quindi $\text{mg}(\lambda_1) = 1$ e F non è diagonalizzabile.

3. Possiamo avere $\lambda_1 = a = -\sqrt{a} = \lambda_3$ se e solo se $a = 0$. Abbiamo già considerato questo caso.

4. Possiamo avere $\lambda_2 = \sqrt{a} = -\sqrt{a} = \lambda_3$ se e solo se $a = 0$. Abbiamo già considerato questo caso.

5. I tre autovalori possono essere tutti distinti, ed in questo caso ($a > 0,\ a \neq 1$) F è diagonalizzabile.

Conclusioni: F è diagonalizzabile se e solo se $a > 0,\ a \neq 1$. □