

Appendice A

Descrizioni cartesiane e parametriche

Possiamo utilizzare i morfismi di spazi vettoriali per dare una definizione più precisa delle descrizioni cartesiane e parametriche

Definizione A.1. [JJJ51] *Dati U, W \mathbb{K} -spazi diciamo che $F: U \rightarrow W$, morfismo di \mathbb{K} spazi è una descrizione cartesiana di $V \underset{SSP}{\subseteq} U$ se*

$$V = \ker F = \{\underline{v} \in U \mid F(\underline{v}) = 0\}$$

Diciamo che U è lo spazio di partenza della descrizione e W è lo spazio di arrivo.

Detto più semplicemente, una descrizione cartesiana di uno spazio vettoriale V sono le condizioni che un vettore \underline{v} deve soddisfare per appartenere a V .

Definizione A.2. [JJJ52] *Dati U, W \mathbb{K} -spazi diciamo che $T: W \rightarrow U$, morfismo di \mathbb{K} spazi è una descrizione parametrica di $V \underset{SSP}{\subseteq} U$ se*

$$V = \operatorname{Im} T = \{T(\underline{w}) \mid \underline{w} \in W\}$$

Diciamo che W è lo spazio di partenza della descrizione e U è lo spazio di arrivo.

Equivalentemente, dare una base, un sistema di generatori od un vettore generico mi dà una descrizione parametrica.

Chiaramente le descrizioni cartesiane e parametriche si guardano bene dall'essere uniche, dato che possono variare sia la funzione che gli spazi (di arrivo per la cartesiana e di partenza per la parametrica).

Esempio A.3. [JJJ23] *Dato*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + 2z = 0\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

due sue descrizioni cartesiane sono

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, x + 2z) \end{array} \quad e \quad G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + 2z, x - y, y + 2z) \end{array}$$

dato che

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = x \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2}x \\ y = x \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \ker F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + 2z = 0\} = V \\ \ker G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = x - y = y + 2z = 0\} = V \end{aligned}$$

Esempio A.4. [JJE65] *Il sottospazio $V = \text{Span}((2, 2, -1))$ può essere visto come l'immagine delle due funzioni*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (x, x, -1/2x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (-1, -1, 1/2) \\ \underline{e}_2 &\mapsto \underline{0} \end{aligned}$$

Esempio A.5 (Passaggio da descrizione cartesiana a parametrica). [JJQ00] *Basta trovare una base di \ker che descrive lo spazio.*

Esempio A.6 (Passaggio da descrizione parametrica a cartesiana). [JJQ01] *Bisogna trovare le condizioni che deve soddisfare il vettore \underline{v} per appartenere a V .*

La somma facile in quando ho le descrizioni parametriche degli spazi, intersezione facile in cartesiane.

Osservazione A.7. [HHA15] *Se abbiamo due sottospazi di \mathbb{K}^n espressi in forma cartesiana*

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

e

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_s(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

la loro intersezione è

$$V \cap W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Il calcolo di una base dell'intersezione di sottospazi è quindi immediato quando i sottospazi sono espressi in forma cartesiana.

Esempio A.8. [HHA16] *Siano*

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x + y - z = 0\}$$

e

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

la loro intersezione è

$$V \cap W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$$