

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 25 Novembre

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 1 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} z^9 = 4^{10} + 5\pi \\ |z| < \pi \end{cases}$

Soluzione: \emptyset

2. Determinare il numero di $x \in \mathbb{C}$ tali che, $\frac{x^{12}-1}{(x^6-2x^3+1)} = 0$.

Soluzione: 9

3. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \text{Span}((1, 0, 3, 4)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

Soluzione: per esempio $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 3x - z = 0 \\ y = 0 \\ 4x - t = 0 \end{cases} \right\}$

4. Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 1 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare il coefficiente di testa del polinomio $p_T(\lambda) - \lambda^4$

Soluzione: -10

5. Determinare, se esiste, l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **Soluzione:** $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). Si consideri lo spazio vettoriale $N(A) = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$, con $k \in \mathbb{R}$ e

$$A = \begin{pmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{pmatrix}$$

1. Per quali valori di k si ha $\dim(N(A)) = 0$?

2. Determinare una base di $N(A)$ quando possibile.

SOLUZIONE:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouché-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il determinante:

$$\det(A) = -(k+4) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2 \cdot [2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioè $N(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) : \begin{cases} x + 4y + 8w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 4z = 0 \\ 2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A) = \{(-4, 1, 0, 0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-4, 1, 0, 0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = -4$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 31II - 8I \\ 2IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 31IV + 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -966 \end{bmatrix}$$

$$N(A) : \begin{cases} -31x + 4w = 0 \\ 31z - 218w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow N(A) = \{(0, 1, 0, 0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = -4$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0, 1, 0, 0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Figura 1:

Esercizio 2 (12pt). Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ Si determini, se esiste, una applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl}
 T : \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 (1, 2, 3) & \mapsto & (3, 1, 5) \\
 (3, 1, 0) & \mapsto & (1, 2, 3) \\
 (1, 1, 1) & \mapsto & (2, 0, 0) \\
 (4, 2, 1) & \mapsto & (3, 2, 3) \\
 (a, b, 0) & \mapsto & (a, b, c)
 \end{array}$$

Soluzione:

I vettori $(1, 2, 3), (3, 1, 0), (1, 1, 1)$ formano una base B perchè

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 \neq 0$$

La nostra candidata T è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$(M_T)_E^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

L'applicazione T soddisfa per costruzione le prime tre condizioni, qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Verifichiamo le altre due.

Abbiamo che

$$(3, 2, 3) = T((4, 2, 1)) = T((3, 1, 0)) + T((1, 1, 1)) = (1, 2, 3) + (2, 0, 0) = (3, 2, 3)$$

quindi la quarta condizione è verificata $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per verificare la quinta, troviamo $(M_T)_E^E$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
 (M_T)_E^E &= (M_T)_E^B \cdot (M)_B^E \\
 &= (M_T)_E^B \cdot ((M)_E^B)^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 8 & -21 & 13 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Quindi

$$T((a, b, 0)) = aT(\underline{e}_1) + bT(\underline{e}_2) = a(-2, 3, 8) + b(7, -7, -21) = (-2a + 7b, 3a - 7b, 8a - 21b)$$

Ma per la quinta condizione dobbiamo avere

$$T((a, b, 0)) = (-2a + 7b, 3a - 7b, 8a - 21b) = (a, b, c)$$

e quindi a, b, c devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} -2a + 7b = a \\ 3a - 7b = b \\ 8a - 21b = c \end{cases}$$

il determinante della matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 8 & -21 & 1 \end{bmatrix}$$

è $3 \neq 0$. Il sistema, omogeneo, ammette l' unica soluzione $a = b = c = 0$.

Se e solo se $a = b = c = 0$ esiste quindi un applicazione lineare che soddisfa le condizioni ed è la nostra candidata T .

Esercizio 3 (5pt). Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Determinare il polinomio caratteristico di A .
2. Calcolare $A^{82} - A^{28}$.

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda$$

Quindi il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$.

2. Sappiamo che la matrice annulla il proprio polinomio caratteristico, quindi abbiamo che $P(A) = 0 \Rightarrow A^3 = A$, da cui

$$\begin{aligned} A^{27} &= \left((A^3)^3 \right)^3 = A \\ A^{81} &= \left(\left((A^3)^3 \right)^3 \right)^3 = A \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } A^{82} - A^{28} = A(A^{81} - A^{27}) = 0$$

□