

Classwork: circonferenza, parabola e retta

Caboara

Intersezioni parabola–circonferenza

Esercizio 1

Determinare i punti di intersezione della parabola e della circonferenza

$$\mathcal{P}: y = x^2 - 3x, \quad \mathcal{C}: x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0.$$

Soluzione. Sostituiamo $y = x^2 - 3x$ nell'equazione della circonferenza:

$$x^2 + (x^2 - 3x)^2 + 2x - 15 = 0.$$

Sviluppiamo il quadrato:

$$(x^2 - 3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2.$$

Sostituendo e sommando i termini simili:

$$x^2 + x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 2x - 15 = 0 \implies x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Cerchiamo radici intere tra i divisori del termine noto -15 , cioè $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Posto $p(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 15$:

$$p(1) = 1 - 6 + 10 + 2 - 15 = -8, \quad p(-1) = 1 + 6 + 10 - 2 - 15 = 0, \quad p(3) = 81 - 162 + 90 + 6 - 15 = 0.$$

Quindi $p(x)$ è divisibile per $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 15 & x^2 - 2x - 3 \\ - x^4 + 2x^3 + 3x^2 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline - 4x^3 + 13x^2 + 2x & \\ 4x^3 - 8x^2 - 12x & \\ \hline 5x^2 - 10x - 15 & \\ - 5x^2 + 10x + 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Dunque

$$p(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 - 4x + 5).$$

Il fattore $x^2 - 4x + 5$ ha $\frac{\Delta}{4} = 4 - 5 = -1 < 0$, quindi non ha radici reali. Le uniche soluzioni reali sono $x = -1$ e $x = 3$, entrambe semplici.

Calcoliamo le ordinate con l'equazione della parabola:

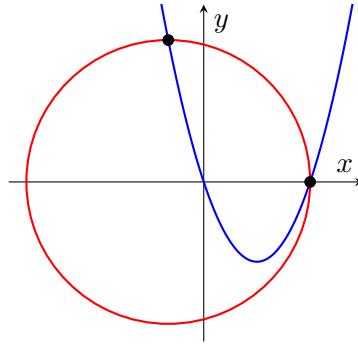
$$x = -1: y = 1 + 3 = 4, \quad x = 3: y = 9 - 9 = 0.$$

Verifica sulla circonferenza: $(-1, 4): 1 + 16 - 2 - 15 = 0$; $(3, 0): 9 + 0 + 6 - 15 = 0$.

Risultato: parabola e circonferenza si intersecano in **due** punti,

$$A = (-1, 4), \quad B = (3, 0).$$

La circonferenza ha centro $(-1, 0)$ e raggio 4.



Esercizio 2

Determinare i punti di intersezione della parabola e della circonferenza

$$\mathcal{P} : y = x^2 - 2x - 4, \quad \mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0.$$

Soluzione. Sostituiamo $y = x^2 - 2x - 4$ nell'equazione della circonferenza:

$$x^2 + (x^2 - 2x - 4)^2 - 2x - 24 = 0.$$

Sviluppiamo il quadrato:

$$(x^2 - 2x - 4)^2 = x^4 + 4x^2 + 16 - 4x^3 - 8x^2 + 16x = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 16.$$

Sostituendo:

$$x^2 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 16 - 2x - 24 = 0 \implies x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 = 0.$$

Cerchiamo radici intere tra i divisori di -8 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Posto $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$:

$$p(1) = 1 - 4 - 3 + 14 - 8 = 0, \quad p(-1) = 1 + 4 - 3 - 14 - 8 = -20, \quad p(-2) = 16 + 32 - 12 - 28 - 8 = 0.$$

Quindi $p(x)$ è divisibile per $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 & x^2 + x - 2 \\ -x^4 & -x^3 + 2x^2 \\ \hline & -5x^3 - x^2 + 14x \\ & 5x^3 + 5x^2 - 10x \\ \hline & 4x^2 + 4x - 8 \\ & -4x^2 - 4x + 8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Il quoziente si fattorizza: $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$. Quindi

$$p(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 4).$$

Le soluzioni sono

$$x = -2, \quad x = 4, \quad x = 1 \text{ (radice doppia)}.$$

Calcoliamo le ordinate con l'equazione della parabola:

$$x = -2 : y = 4 + 4 - 4 = 4, \quad x = 1 : y = 1 - 2 - 4 = -5, \quad x = 4 : y = 16 - 8 - 4 = 4.$$

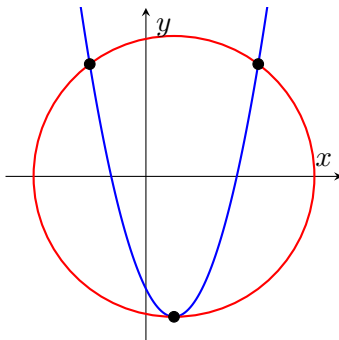
Verifica sulla circonferenza, scritta come $(x - 1)^2 + y^2 = 25$:

$$(-2, 4) : 9 + 16 = 25, \quad (1, -5) : 0 + 25 = 25, \quad (4, 4) : 9 + 16 = 25.$$

La radice doppia $x = 1$ indica che nel punto $(1, -5)$ le due curve sono *tangenti*. Si noti che $(1, -5)$ è il vertice della parabola e il punto più basso della circonferenza.

Risultato: parabola e circonferenza si intersecano in **tre** punti,

$$A = (-2, 4), \quad B = (4, 4), \quad T = (1, -5) \text{ (punto di tangenza).}$$



Esercizio 3

Determinare i punti di intersezione della parabola e della circonferenza

$$\mathcal{P} : y = x^2 + 2x - 1, \quad \mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0.$$

Soluzione. Sostituiamo $y = x^2 + 2x - 1$ nell'equazione della circonferenza:

$$x^2 + (x^2 + 2x - 1)^2 - 4x - 4(x^2 + 2x - 1) - 17 = 0.$$

Sviluppiamo il quadrato:

$$(x^2 + 2x - 1)^2 = x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 - 2x^2 - 4x = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1.$$

Sostituendo:

$$x^2 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 - 4x - 4x^2 - 8x + 4 - 17 = 0 \implies x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0.$$

Cerchiamo radici intere tra i divisori di -12 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Posto $p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$:

$$p(1) = 1 + 4 - 1 - 16 - 12 = -24, \quad p(-1) = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0, \quad p(2) = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0.$$

Quindi $p(x)$ è divisibile per $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 & x^2 - x - 2 \\ -x^4 + x^3 + 2x^2 & x^2 + 5x + 6 \\ \hline 5x^3 + x^2 - 16x & \\ -5x^3 + 5x^2 + 10x & \\ \hline 6x^2 - 6x - 12 & \\ -6x^2 + 6x + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Il quoziente si fattorizza: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$. Quindi

$$p(x) = (x + 3)(x + 2)(x + 1)(x - 2),$$

con le quattro radici distinte $x = -3, -2, -1, 2$.

Calcoliamo le ordinate con l'equazione della parabola:

$$x = -3: \quad y = 9 - 6 - 1 = 2,$$

$$x = -2: \quad y = 4 - 4 - 1 = -1,$$

$$x = -1: \quad y = 1 - 2 - 1 = -2,$$

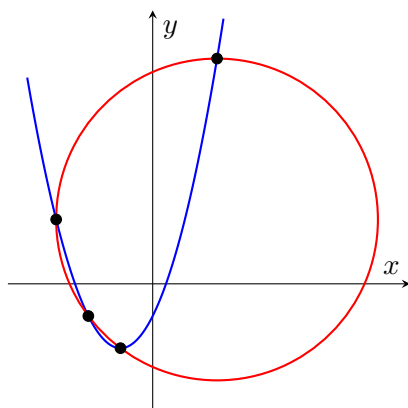
$$x = 2: \quad y = 4 + 4 - 1 = 7.$$

Verifica sulla circonferenza, scritta come $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$:

$$25 + 0 = 25, \quad 16 + 9 = 25, \quad 9 + 16 = 25, \quad 0 + 25 = 25.$$

Risultato: parabola e circonferenza si intersecano in **quattro** punti,

$$A = (-3, 2), \quad B = (-2, -1), \quad C = (-1, -2), \quad D = (2, 7).$$



Equazione della circonferenza

Esercizio 4

Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti

$$A = \left(1, \frac{7}{2}\right), \quad B = \left(-\frac{5}{2}, 3\right), \quad C = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

Determinarne poi centro e raggio.

Soluzione. Cerchiamo la circonferenza nella forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Imponiamo il passaggio per i tre punti, moltiplicando ogni equazione per 4 per eliminare i denominatori.

Passaggio per A:

$$1 + \frac{49}{4} + a + \frac{7}{2}b + c = 0 \quad \implies \quad 4a + 14b + 4c = -53.$$

Passaggio per B:

$$\frac{25}{4} + 9 - \frac{5}{2}a + 3b + c = 0 \quad \implies \quad -10a + 12b + 4c = -61.$$

Passaggio per C:

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{2}a + c = 0 \quad \implies \quad 6a + 4c = -9.$$

Otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 4a + 14b + 4c = -53 \\ -10a + 12b + 4c = -61 \\ 6a + 4c = -9. \end{cases}$$

Eliminiamo c sottraendo la terza equazione dalle prime due:

$$-2a + 14b = -44 \implies a = 7b + 22,$$

$$-16a + 12b = -52 \implies 4a - 3b = 13.$$

Sostituendo $a = 7b + 22$ nella seconda:

$$28b + 88 - 3b = 13 \implies 25b = -75 \implies b = -3,$$

da cui $a = -21 + 22 = 1$. Dalla terza equazione:

$$4c = -9 - 6a = -15 \implies c = -\frac{15}{4}.$$

L'equazione cercata è

$$x^2 + y^2 + x - 3y - \frac{15}{4} = 0, \quad \text{cioè} \quad \boxed{4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 15 = 0}.$$

Verifica. C : $9 + 0 + 6 - 0 - 15 = 0$. A : $4 + 49 + 4 - 42 - 15 = 0$. B : $25 + 36 - 10 - 36 - 15 = 0$.

Centro e raggio. Il centro è $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e il raggio è

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Esercizio 5

Determinare centro e raggio della circonferenza di equazione

$$9x^2 + 9y^2 + 6x - 12y - 31 = 0.$$

Soluzione. Dividiamo per 9, in modo che i coefficienti di x^2 e y^2 siano uguali a 1:

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{31}{9} = 0.$$

Primo metodo: completamento dei quadrati. Raggruppiamo i termini in x e in y :

$$\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + \left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) = \frac{31}{9}.$$

Completiamo i quadrati:

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}, \quad y^2 - \frac{4}{3}y = \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}.$$

Sostituendo:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{31}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{36}{9} = 4.$$

Secondo metodo: formule. Per $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ si ha centro $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.
Qui $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$, $c = -\frac{31}{9}$:

$$\text{centro} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad r = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{31}{9}} = \sqrt{4} = 2.$$

Risultato: centro $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, raggio $r = 2$.

Intersezioni retta–circonferenza

Esercizio 6

Determinare i punti di intersezione della circonferenza e della retta

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0, \quad r : x - 7y - 3 = 0.$$

Soluzione. Dall'equazione della retta ricaviamo x :

$$x = 7y + 3.$$

Sostituiamo nell'equazione della circonferenza:

$$(7y + 3)^2 + y^2 + 2(7y + 3) - 6y - 15 = 0.$$

Sviluppiamo:

$$49y^2 + 42y + 9 + y^2 + 14y + 6 - 6y - 15 = 0 \implies 50y^2 + 50y = 0 \implies 50y(y + 1) = 0.$$

Due soluzioni distinte: $y = 0$ e $y = -1$. Calcoliamo le ascisse con $x = 7y + 3$:

$$y = 0 : x = 3, \quad y = -1 : x = -4.$$

Verifica sulla circonferenza: $(3, 0)$: $9 + 0 + 6 - 0 - 15 = 0$; $(-4, -1)$: $16 + 1 - 8 + 6 - 15 = 0$.

Controllo geometrico. La circonferenza ha centro $O = (-1, 3)$ e raggio $\sqrt{1 + 9 + 15} = 5$. La distanza del centro dalla retta è

$$d(O, r) = \frac{|-1 - 21 - 3|}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{25}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} < 5,$$

quindi la retta è secante, in accordo con quanto trovato.

Risultato: la retta è secante e interseca la circonferenza nei punti

$$A = (3, 0), \quad B = (-4, -1).$$

Esercizio 7

Determinare le intersezioni della circonferenza e della retta

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0, \quad r : 3x + 4y - 20 = 0.$$

Soluzione. Dall'equazione della retta ricaviamo

$$x = \frac{20 - 4y}{3}.$$

Sostituiamo nell'equazione della circonferenza:

$$\left(\frac{20 - 4y}{3}\right)^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{20 - 4y}{3} + 4y - 20 = 0.$$

Moltiplichiamo tutto per 9:

$$(20 - 4y)^2 + 9y^2 - 6(20 - 4y) + 36y - 180 = 0.$$

Sviluppiamo:

$$400 - 160y + 16y^2 + 9y^2 - 120 + 24y + 36y - 180 = 0 \implies 25y^2 - 100y + 100 = 0.$$

Dividendo per 25:

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \implies (y - 2)^2 = 0.$$

Il discriminante è nullo: c'è un'unica soluzione $y = 2$ (radice doppia), quindi la retta è *tangente* alla circonferenza. L'ascissa del punto di tangenza è

$$x = \frac{20 - 8}{3} = 4.$$

Verifica sulla circonferenza: $16 + 4 - 8 + 8 - 20 = 0$.

Controllo geometrico. La circonferenza ha centro $O = (1, -2)$ e raggio $\sqrt{1 + 4 + 20} = 5$. La distanza del centro dalla retta è

$$d(O, r) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-25|}{5} = 5 = r,$$

in accordo con la tangenza. Inoltre il vettore $T - O = (3, 4)$ è perpendicolare al vettore direzione della retta, $(4, -3)$.

Risultato: la retta è tangente alla circonferenza nel punto $T = (4, 2)$.