Algebra Lineare - Ing. Chimica e Civile - A. A. 24/25

Esame scritto 8 Settembre 2025

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO. NON SCRIVERE I CALCOLI

COGNOME: **NOME:**

MAT: **CORSO:**

1. Determinare una base dell'intersezione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 4}$

   $$V_1 = \mathrm{Span}(x^3 + 2, x^3 - 2, 3x^3 - x - 2) \qquad V_2 = \mathrm{Span}(3x^4 + x^2, 2x^4 + 4x^3, x^4 + x^2 - 1)$$

   Soluzione. $V_1 \cap V_2 = \mathrm{Span}(4x^3 - 1)$ □

2. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $7z^6 + \pi = 0$

   Soluzione. $z = \sqrt[6]{\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{6}} \qquad k : 0, \ldots, 5$ □

3. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \mathrm{Span}((i, i, i), (2, 3, 4), (3, 4, 5)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$

   Soluzione. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ x - 2y + z = 0\}$ □

4. Determinare il polinomio minimo dell'endomorfismo $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Soluzione. $\mathrm{PM}_T(\lambda) = (1 - \lambda)^3$ □

5. Determinare il numero di radici complesse non reali del polinomio

   $$3x^5 - 4x^4 - 12x$$

   Soluzione. 2 □

Alcune regole pratiche sullo scritto

- **Le soluzioni di ogni esercizio vanno ricapitolate in fondo allo svolgimento dello stesso - la mancanza di questa ricapitolazione verrà penalizzata nel punteggio**.
- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (7 pt). *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema*

$$\begin{pmatrix} 2a^2-2 & 0 & -a \\ 5a^2-6 & -a-1 & -4a-2 \\ -a^2+1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2+2 \\ -4a^2+5 \\ a^2-1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo con Gauss la matrice completa

```
M:=Mat([[2a^2 - 2,      0,      -a,  -a^2 + 2],
        [5a^2 - 6, -a - 1, -4a - 2, -4a^2 + 5],
        [-a^2 + 1,      0,       a,   a^2 - 1]]);
Scambio la prima e seconda colonna, questo non influenza la discussione sulle soluzioni.
M:=Mat([[     0, 2a^2 - 2, -a,  -a^2 + 2],
        [-a - 1, 5a^2 - 6,  -4a - 2, -4a^2 + 5],
        [     0, -a^2 + 1,  a,   a^2 - 1]]);
Scambio la prima e seconda riga
M:=Mat([[-a - 1, 5a^2 - 6,  -4a - 2, -4a^2 + 5],
        [     0, 2a^2 - 2, -a,  -a^2 + 2],
        [     0, -a^2 + 1,  a,   a^2 - 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2a^2 - 2=2(a^2-1)
Suppongo a<>-1,1, e procedo. Svolgero' a parte questi due casi
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-a - 1, 5a^2 - 6, -4a - 2, -4a^2 + 5]
-------------- [0, 2a^2 - 2, -a, -a^2 + 2]
3^a-(-1/2)*2^a [0, 0, 1/2a, 1/2a^2]
```

Consideriamo i casi - per i primi due lavoriamo sulla matrice immediatamente sopra.

- $a \neq \pm 1, 0$. In questo caso ho tre pivot e quindi $\exists !$ soluzione.
- $a = 0$. In questo caso ho due pivot e quindi $\exists ! \ \infty^1$ soluzioni.
- $a = 1$. Sostituisco nella matrice subito prima della posizione della condizione $a \neq \pm 1$ il parametro a con 1. Ottengo

  $$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad -\text{Gauss}\rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  e chiaramente $\nexists$ soluzioni.
- $a = -1$. Sostituisco nella matrice subito prima della posizione della condizione $a \neq \pm 1$ il parametro a con -1. Ottengo

  $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dato che il rango della completa è 3 e quello dell'incompleta è 2, $\nexists$ soluzioni.

Ricapitolando: Se $a \neq \pm 1, 0$ $\exists!$ sol., se $a = \pm 1$ $\nexists!$ sol. e se $a = 0$ $\exists!$ ∞^1 sols. $\square$

Esercizio 2 (10 pt)**.** *Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste un morfismo $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni*

$$T((a,2)) = (a-2, a-3) \quad T((a-1, a-1)) = (0,0) \quad T((1,2)) = (-1,1)$$

Soluzione. Consideriamo inizialmente solo le prime due condizioni.

Vediamo di costruire un opportuna base B rispetto alla quale descriveromo il morfismo, se esiste. La naturale candidata è $B = (a,2), (a-1, a-1)$. Dato che

$$\det \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} = a(a-1) - 2(a-1) = (a-2)(a-1)$$

i vettori di B formano una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo se $a \neq 1, 2$. Consideriamo i tre casi

- $a = 1$. Le condizioni divengono

$$\begin{array}{lll} T((a,2)) = (a-2, a-3) & T((a-1, a-1)) = (0,0) & T((1,2)) = (-1,1) \\ T((1,2)) = (-1,-2) & T((0,0)) = (0,0) & T((1,2)) = (-1,1) \end{array}$$

  e la prima e terza condizioni non sono compatibili. Quindi $\nexists$ morfismo T che soddisfa la condizioni date.

- $a = 2$. Le condizioni divengono

$$\begin{array}{lll} T((a,2)) = (a-2, a-3) & T((a-1, a-1)) = (0,0) & T((1,2)) = (-1,1) \\ T((2,2)) = (0,-1) & T((1,1)) = (0,0) & T((1,2)) = (-1,1) \end{array}$$

  e la prima e seconda condizioni non sono compatibili. Quindi $\nexists$ morfismo T che soddisfa la condizioni date.

- $a \neq 1, 2$ e $B = \underline{v}_1 = (a,2)$, $\underline{v}_2 = (a-1, a-1)$ é una base. La terza condizione impone che

$$T((1,2)) = (-1,1) \Leftrightarrow (M_T)_{E_2}^{E_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Costruiamo, ricordando che $a \neq 1, 2$ e che $\det \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ -2 & a \end{pmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)$

$$\begin{aligned}
(M_T)_{E_2}^{E_2} &= (M_T)_{E_2}^{B} \cdot M_B^{E_2} \\
&= (M_T)_{E_2}^{B} \cdot \left(M_{E_2}^{B}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ a-3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(a-1)(a-2)} \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ a-3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ -2 & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a-1)(a-2)} \begin{pmatrix} (a-1)(a-2) & -(a-1)(a-2) \\ (a-1)(a-3) & -(a-1)(a-3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{a-3}{a-2} & -\frac{a-3}{a-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Risolviamo per a il sistema

$$\begin{aligned}
(M_T)_{E_2}^{E_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{a-3}{a-2} & -\frac{a-3}{a-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{a-3}{a-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{cases} -1 = -1 \\ -\frac{a-3}{a-2} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi le condizioni sono compatibili se e solo se $a = \frac{5}{2}$.

Ricapitolando, esiste T morfismo che soddisfa le condizioni se e solo se $a = \frac{5}{2}$. $\square$

Si poteva svolgere l'erercizio imponendo che le relazioni lineare tra i tre vettori delle condizioni nel dominio venissero mantenute da T. I calcoli, forse più semplici, sono lasciati per esercizio.

Esercizio 3 (7 pt)**.** *Dato l'endomorfsimo $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice* $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ *Discutere la diagonabilizzabilità di T al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando per la seconda colonna

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ k & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)(k-\lambda) - k) = \lambda(2-\lambda)(\lambda - k - 1)$$

Abbiamo i tre autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_3 = k+1$. Consideriamo i tre casi

- Tre autovalori distinti, ovvero $k \neq 0, 1$. T è diagonalizzabile.
- $\lambda_3 = \lambda_1 = 0$, ovvero $k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$. Dato che per ragioni teoriche sappiamo già $\mathrm{mg}(\lambda_2) = 1$, calcoliamo

  $$\mathrm{mg}(\lambda_1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ k & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}_{\Big|\substack{\lambda=0 \\ k=-1}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

  e dato che $\mathrm{ma}(\lambda_3) = 2$ abbiamo che T non è diagonalizzabile.
- $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$, ovvero $k + 1 = 2 \Rightarrow k = 1$. Dato che per ragioni teoriche sappiamo già $\mathrm{mg}(\lambda_1) = 1$, calcoliamo

  $$\mathrm{mg}(\lambda_2) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ k & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}_{\Big|\substack{\lambda=2 \\ k=1}} = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

  e dato che $\mathrm{ma}(\lambda_2) = 2$ abbiamo che T non è diagonalizzabile.

Ricapitolando, T è diagonalizzabile se e solo se $k \neq \pm 1$. $\square$