Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 10 Febbraio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME: **NOME:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$
   Soluzione: Due soluzioni doppie, $z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{i5/4\pi}$
2. Dire quali dei seguenti $\mathbb{R}$-sottospazi di $\mathbb{C}^3$ sono isomorfi
   $$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$$
   $$V_2 = \mathrm{Span}((1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1 + i), (0, 0, i))$$
   $$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}(y) = 0\}$$
   Soluzione: $V_2 \simeq V_3$
3. Determinare una base dell'$\mathbb{R}$-spazio
   $$V = \mathrm{Span}(x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6, 3x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6, x^5 + x^6, 5x^5 + 2x^6, x^5 - x^6)$$
   Soluzione: i primi quattro polinomi, oppure x^3, x^4, x^5, x^6 o altre
4. Dire quante radici multiple ha il polinomio $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12$ Soluzione: Nessuna radice multipla
5. Opzionale: dire al variare di $a \in \mathbb{R}$ quante radici multiple ha il polinomio $p(x) = 3x^4 - 4x^3 + a$
   Soluzione: per $a = 0$: 0 è radice di di molteplicità 3; per $a = 1$: 1 è radice di di molteplicità 2

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (9pt)**.** *Dato $a \in \mathbb{R}$ e le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ed X matrice 4×4 incognita, determinare le soluzioni di $B \cdot X \cdot A = A \cdot C$

Soluzione. Vediamo che

- La matrice A invertibile, in quanto si tratta di una matrice a blocchi, della forma $\left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ \hline 0 & A''' \end{array}\right)$ e le due matrici A' e A''' sono chiaramente non singolari.
- La matrice B invertibile, in quanto si tratta di una matrice a blocchi della forma $\left(\begin{array}{c|c} B' & B'' \\ \hline 0 & B''' \end{array}\right)$ e le due matrici B' e B''' sono chiaramente non singolari B' in quanto triangolare inferiore 3×3 con 1 sull'antidiagonale, e B''' come matrice di ordine 1 con entrata non nulla.
- La matrice C è diagonale.

Dato che esiste l'inversa di A, B

$$B \cdot X \cdot A = A \cdot C \Leftrightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} A \cdot C \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1} A \cdot C \cdot A^{-1}$$

Calcoliamo A^{-1}, procediamo con il metodo dell'aggiunta dell'identità

```
Use R::=Q[a];
A:=Mat([[1,1,1,0,1,0,0,0],
        [5,2,0,4,0,1,0,0],
        [0,0,3,0,0,0,1,0],
        [0,0,a^3-1,1,0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
   2^a-(5)*1^a [0, -3, -5, 4, -5, 1, 0, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, a^3 - 1, 1, 0, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
-------------- [0, -3, -5, 4, -5, 1, 0, 0]
```

```
  0 sotto pivot[0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, a^3 - 1, 1, 0, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
-------------- [0, -3, -5, 4, -5, 1, 0, 0]
-------------- [0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0]
4^a-(1/3a^3 - 1/3)*3^a [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a^3 + 1/3, 1]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
   2^a*(-1/3)  [0, 1, 5/3, -4/3, 5/3, -1/3, 0, 0]
    3^a*(1/3)  [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a^3 + 1/3, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 4 colonna
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a-(-4/3)*4^a  [0, 1, 5/3, 0, 5/3, -1/3, -4/9a^3 + 4/9, 4/3]
-------------- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a^3 + 1/3, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna
  1^a-(1)*3^a  [1, 1, 0, 0, 1, 0, -1/3, 0]
2^a-(5/3)*3^a  [0, 1, 0, 0, 5/3, -1/3, -4/9a^3 - 1/9, 4/3]
-------------- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a^3 + 1/3, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna
  1^a-(1)*2^a  [1, 0, 0, 0, -2/3, 1/3, 4/9a^3 - 2/9, -4/3]
-------------- [0, 1, 0, 0, 5/3, -1/3, -4/9a^3 - 1/9, 4/3]
-------------- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a^3 + 1/3, 1]
```

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 4/9a^3 - 2/9 & -4/3 \\ 5/3 & -1/3 & -4/9a^3 - 1/9 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3a^3 + 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3 - 2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3 - 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3 + 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo B^{-1}, procediamo con il metodo dell'aggiunta dell'identità

```
B:=Mat([[1,1,1,0,1,0,0,0],
        [1,1,0,0,0,1,0,0],
        [1,0,0,0,0,0,1,0],
        [0,0,0,1,0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(B);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
   2^a-(1)*1^a [0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0]
   3^a-(1)*1^a [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0],
     [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0],
     [0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0],
     [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
-------------- [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
-------------- [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0]
-------------- [0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
     2^a*(-1)  [0, 1, 1, 0, 1, 0, -1, 0]
     3^a*(-1)  [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Cancello la colonna sopra il pivot nella 4 colonna
-------------- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
-------------- [0, 1, 1, 0, 1, 0, -1, 0]
-------------- [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna

  1^a-(1)*3^a  [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
  2^a-(1)*3^a  [0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, 0]
-------------- [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna

  1^a-(1)*2^a  [1, 0, 0, 0, 0,  0,  1, 0]
```

```
-------------- [0, 1, 0, 0, 0,  1, -1, 0]
-------------- [0, 0, 1, 0, 1, -1,  0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0,  0,  0, 1]
```

Quindi

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed abbiamo (facciamo i conti in modo tale da minimizzarli, tranne l'ultima moltiplicazione di matrici)

$$\begin{aligned}
X &= B^{-1} \cdot A \cdot C \cdot A^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3-2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3-1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3+3 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & a^4-a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3-2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3-1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3+3 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 4 & -3a & 4a^2 \\ 0 & -2 & a & -4a^2 \\ 0 & 0 & a^4-a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3-2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3-1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3+3 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9a & 0 \\ 60 & -12 & -12a^5-16a^3+12a^2-9a-4 & 36a^2+48 \\ -30 & 6 & 12a^5+8a^3-12a^2+3a+2 & -36a^2-24 \\ 0 & 0 & -3a^5+3a^4+3a^2-3a & 9a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Esercizio 2 (9pt)**.** *Dati i sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

$$V = \operatorname{Span}((1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,2,1,3),(4,8,4,6))$$

e

$$W = \operatorname{Span}((1,1,2,a),(1,a,1,a))$$

determinare basi di $V,\ W,\ V+W,\ V\cap W$ *al variare di* $a \in \mathbb{R}$*. Dire se* $\underline{v} = (3,6,5,2) \in V+W$*.*

Soluzione. Procediamo col metodo standard. Troviamo una base di W

Verifichiamo, al variare di a, l'indipendenza lineare dei generatori di W. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

ha rango due, visto che la sottomatrice $A_{(1,2);(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare. I due generatori di W sono quindi indipendenti e formano una sua base, e la sua dimensione due, per ogni a.

Riduciamo con Gauss la matrice le cui colonne sono i generatori di V, W.

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
        [2, 2, 2, 8, 1, a],
        [1, 1, 1, 4, 2, 1],
        [1, 2, 3, 6, a, a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
   2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
   3^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 0, 1, 0]
   4^a-(1)*1^a [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
Scambio la 2^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
     [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1],
     [0, 0, 0, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 0]
  4^a-(-1)*3^a [0, 0, 0, 0, 0, a - 2]
```

Per ogni a ci sono solo 2 pivot nelle prime quattro colonne, quelle associate a V, e quindi $\dim V = 2$. Una base di V si ha dai vettori associati alle colonne che contengono i pivot, quindi una base di V è $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$. Esaminiamo i casi $a \neq 2,\ a = 2$

- $a \neq 2$. Ci sono 4 pivot, $\dim V + W = 4$ e una base di $V + W = \mathbb{R}^4$ è per esempio E_4.

  Dalla formula di Grassmann, abbiamo

  $$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 4 = 0$$

  Quindi $\dim V \cap W = 0$ e non ho base dell'intersezione. Il vettore $\underline{v}$, come ogni altro vettore di $\mathbb{R}^4$ appartiene a $V + W = \mathbb{R}^4$.

- $a = 2$. Ci sono 3 pivot, quindi $\dim V + W = 3$ e una base di $V + W$ è

$$(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,a) \stackrel{a=2}{\longrightarrow} (1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,2)$$

Dalla formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 3 = 1$$

La relazione tra i coefficenti del vettore generico di W

$$\alpha(1,1,2,a) + \beta(1,a,1,a) \stackrel{a=2}{\longrightarrow} \alpha(1,1,2,2) + \beta(1,2,1,2)$$

è data dalle ultime due entrate dell'ultima riga non nulla della matrice (la terza) $(1,0)$ moltiplicate per (α,β) ed uguagliate a zero

$$(1,0)\cdot(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Quindi un vettore generico dell'intersezione è $\beta(1,2,1,2)$ ed una base per esempio $(1,2,1,2)$.

Per vedere se

$$(3,6,5,2) = \underline{v} \in V + W = \mathrm{Span}((1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,2))$$

vediamo se in una riduzione di Gauss si annulla la quarta riga della matrice

```
M:=Mat([[1,2,1,1],
        [1,2,1,2],
        [1,1,2,2],
        [3,6,5,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 1]
   2^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 1]
   3^a-(1)*1^a [0, -1, 1, 1]
   4^a-(3)*1^a [0, 0, 2, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 0, 2, -1]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 1]
-------------- [0, -1, 1, 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 1]
```

```
  0 sotto pivot[0, 0, 2, -1]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 2, -1],
     [0, 0, 0, 1]])
```

La quarta riga non si riduce a zero e quindi $\underline{v} \notin V + W$.

Riassumendo, abbiamo che per ogni a si ha che $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$ è base di V e $(1, 1, 2, a), (1, a, 1, a)$ è base di W.

- se $a \neq 2$ abbiamo che E_4 è base di $V + W = \mathbb{R}^4$, $V \cap V = \{\underline{0}\}$ e quindi non ha base ed il vettore $((3, 6, 5, 2) \in V + W$.
- Se $a = 2$ abbiamo che $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)$ è base di $V + W$, $(1, 2, 1, 2)$ è base di $V \cap W$ ed il vettore $((3, 6, 5, 2) \notin V + W$.

$\square$

Esercizio 3 (5pt)**.** *Dato l'endomorfismo* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *associato alla matrice*

$$A = (M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

discutere il numero di soluzioni del sistema di equazioni

$$\left(T^4 - T^3 + T^2 + 2T - I_3\right)((x, y, z)) = \underline{0}$$

ricordando che rispetto ad una base B *per ogni* $\underline{v}$ *abbiamo* $T(\underline{v}) = (M_T)_B^B\,(\underline{v})$*.*

Opzionale [1pt]: trovare le soluzioni esplicite in base E_3*.*

Soluzione. Il nostro sistema diviene, rispetto ad una base B

$$\left({(M_T)_B^B}^4 - {(M_T)_B^B}^3 + {(M_T)_B^B}^2 + 2\,(M_T)_B^B - I_3\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B\right) = \underline{0}$$

Dato che siamo interessati al numero di soluzioni, vediamo se possiamo trovare una base in cui i conti saranno più semplici, per esempio una base di autovettori, se esiste. Controlliamo quindi se T è diagonalizzabile

$$p_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda(1-\lambda) - 2) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione $-\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$, ovvero

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1, 2$$

Dato che si tratta di tre autovalori distinti in $\mathbb{R}^3$, l'endomorfismo T è diagonalizzabile ed esiste una base di autovettori B rispetto alla quale abbiamo

$$M = (M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per i teorema di Cayey-Hamilton, abbiamo che $M = (M_T)_B^B$ soddisfa il polinomio caratteristico e quindi $-M^3 + M^2 + 2M = 0$.

Possiamo quindi trasformare il nostro sistema in un sistema col lo stesso numero di soluzioni

$$\left(T^4 - T^3 + T^2 + 2T - I_3\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \underline{0}$$

$$\left(M^4 - M^3 + M^2 + 2M - I_3\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0}$$

$$\left(M^4 - I_3\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^4 - I_3\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} - I_3\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0}$$

Dato che si tratta di un sistema omogeneo, Per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ha quindi $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Parte opzionale: determinare le soluzioni in base E_3. Dobbiamo trovare esplicitamente le soluzioni in base B, e fare il cambio di base per questi vettori con la base B di autovettori, che va determinata.

Un vettore generico del'insieme delle soluzioni (che ha dimensione uno, come visto) di

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0} \Leftrightarrow (-x, 0, 7z)_B = \underline{0} \Leftrightarrow x = z = 0$$

è chiaramente $(0, y, 0)$ ed una sua base $(0, 1, 0)_B$. Quindi una base delle soluzioni originarie del nostro sistema è $(0, 1, 0)_B$, ovvero il secondo vettore della base B, basta determinare questo vettore in base E_3, ovvero l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$. Una base di V_{λ_1} è data da una base di

$$\mathrm{Sol}\left(\left.\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right|_{\lambda=-1} \underline{x} = \underline{0}\right) = \mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}\right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

che è chiaramente $(-2, 1, 0)$

Un altro metodo sarebbe potuto essere quello di usare il teorema di Cayley-Hamilton sul polinomio caratteristico, lasciando il sistema espresso in base E_3, ovvero usando la matrice A. Avremmo dovuto risolvere

$$\left(A^4 - I_3\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

cosa fattibile.

Riassumendo: il sistema ha ∞^1 soluzioni, ed in base E_3 una base delle soluzione è $B_S = (-2, 1, 0)$

$\square$