Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 23 Gennaio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME: **NOME:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^{z-\overline{z}} = -2$

   Soluzione: Non esistono soluzioni

2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ a & a & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Soluzione: 4

3. Dare una base dell' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

   Soluzione: $B = (1,0), (i,0), (0,1)$

4. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,2,3),(2,3,5)) \qquad V_2 = \mathrm{Span}((0,1,3),(0,1,2))$$

   Soluzione: $B = (0,1,1)$

5. Determinare il numero di radici reali del polinomio $p(x) = x^3 - x - 1$.

   Soluzione: 1

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt)**.** *Al variare di $a, b \in \mathbb{C}$ discutere le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x + by + z = b \\ 3x + 2y + bz = b \\ by + bz = a \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

```
Use R::=Q[a,b];
M:=Mat([[1, b, 1, b],
        [3, 2, b, b],
        [0, b, b, a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, b, 1, b]
   2^a-(3)*1^a [0, -3b + 2, b - 3, -2b]
  0 sotto pivot[0, b, b, a]

Suppongo b diverso da 2/3. Tratto il caso b = 2/3 a parte

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3b + 2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------            [1, b, 1, b]
--------------            [0, -3b + 2, b - 3, -2b]
3^a-(-1/3b/(b - 2/3))*2^a [0, 0, (4/3b^2 - 5/3b)/(b - 2/3), (ab - 2/3b^2 - 2/3a)/(b - 2/3)]
```

- $b \neq 2/3$. Divido la terza riga della matrice ottenuta per $\dfrac{1}{3}(b - 2/3) \neq 0$, ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & -3b+2 & b-3 & -2b \\ 0 & 0 & 4b^2-5b & 3ab-2b^2-2a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & -3b+2 & b-3 & -2b \\ 0 & 0 & b(4b-5) & 3ab-2b^2-2a \end{array}\right)$$

  Dividiamo i casi

  1. Se $b \neq 0, \frac{5}{4}$ la matrice incompleta ha rango 3, quindi la completa ha rango 3.
  2. Se $b = 0$ la matrice incompleta ha rango 2. La matrice completa ha rango 2 se $a = 0$, rango 3 altrimenti.
  3. Se $b = \frac{5}{4}$ la matrice incompleta ha rango 2. Dato che l'entrata in posizione $3, 4$ è uguale a $7/4a - 25/8$, che si annulla solo per $a = \frac{25}{14}$, la matrice completa ha rango 2 se $a = \frac{25}{14}$, rango 3 altrimenti.

- $b = \frac{2}{3}$. Sostituisco $b = 2/3$ nella matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & b \\ 0 & -3b+2 & b-3 & -2b \\ 0 & b & b & a \end{array}\right)$$

ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -7/3 & -4/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & a \end{array}\right)$$

La matrice incompleta ha chiaramente rango 3, quindi la completa ha rango 3.

Riassumendo, per il Teorema di Rouché-Capelli,

1. Se $b = \frac{2}{3}$ esiste unica soluzione per ogni a.
2. Se $b = 0$, abbiamo ∞^1 soluzioni se $a = 0$, nessuna altrimenti.
3. Se $b = \frac{5}{4}$, abbiamo ∞^1 soluzioni se $a = \frac{25}{14}$, nessuna altrimenti.
4. Se $b \neq \frac{2}{3}, 0, \frac{5}{4}$ esiste unica soluzione per ogni a.

In una scrittura più compatta:

1. Esiste soluzione unica se $b \neq 0, \frac{5}{4}$, in ogni caso per ogni a.
2. Ci sono ∞^1 soluzioni se $b = a = 0$ o $b = \frac{5}{4}, a = \frac{25}{14}$.
3. Altrimenti non ci sono soluzioni.

□

Esercizio 2 (8pt)**.** *Data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$T((1,2,0)) = (3,-6,2) \quad T((3,0,1)) = (0,0,0) \quad T((3,-6,2)) = (-9,18,-6)$$

1. *Determinare tutte le T che possono essere morfismo.*

   Per queste T,
2. *Scegliere una base B di $\mathbb{R}^3$ e determinare $(M_T)^B_B$.*
3. *Determinare il polinomio caratteristico di T.*
4. *Ci sono casi in cui T è diagonalizzabile?*

Soluzione. Vediamo se i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,2,0)) \qquad \underline{v}_2 = (3,0,1) \qquad \underline{v}_3 = (3,-6,2)$$

formano una base. Per risparmiare tempo, troviamo le relazioni lineari tra loro con il metodo delle tag variabili.

```
M:=Mat([[1,2,0,x],
        [3,0,1,y],
        [3,-6,2,z]]);
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, x]
   2^a-(3)*1^a [0, -6, 1, -3x + y]
   3^a-(3)*1^a [0, -12, 2, -3x + z]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-6
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, x]
-------------- [0, -6, 1, -3x + y]
   3^a-(2)*2^a [0, 0, 0, 3x - 2y + z]
```

Abbiamo che tra i tre vettori c'e' la relazione di dipendenza lineare $3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$. Vediamo che la relazione lineare è mantenuta da T.

$$3T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) + T(\underline{v}_3) = 3(3, -6, 2) - 2(0, 0, 0) + (-9, 18, -6) = \underline{0}$$

Quindi T può essere un morfismo. Scegliamo una coppia di vettori linearmente indipendenti tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ che completeremo a base. Scegliamo arbitrariamente $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. Avremmo potuto scegliere un altra delle tre coppie di vettori, scegliamo uno delle due coppie che contiene $\underline{v}_2$, la cui immagine è nulla e che semplificherà quindi i colcoli sucessivi, ricordando che dalla relazione di dipendenza lineare abbiamo che $\underline{v}_3 = -3\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$. Dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è chiaramente non singolare possiamo completare $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ a base per esempio con $\underline{e}_1$, ottenendo la base $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1$. Vediamo le immagini dei vettori della base B nelle coordinate in base B.

$$T(\underline{v}_1) = (3, -6, 2) = \underline{v}_3 = -3\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 = (-3, 2, 0)_B \text{ e } T(\underline{v}_1) = \underline{0}_B$$

Non abbiamo condizioni sull'immagine di $\underline{e}_1$, quindi $T(\underline{e}_1) = (a, b, c)_B$ per $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quindi

$$(M_M)_B^B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & a \\ 2 & -\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(c - \lambda)(3 + \lambda)$$

sviluppando il determinante con Laplace rispetto alla terza riga.

Gli autovalori di T sono

$$\lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 = c \quad \lambda_2 = -3$$

Abbiamo i seguenti casi

- $c \neq 0, -3$. Abbiamo tre autovalori distinti, T è diagonalizzabile.
- $c = 0$. Abbiamo l' autovalore $\lambda_2 = -3$ con molteplicità algebrica 1 (e quindi geometrica 1) e l'autovalore $\lambda_{0,1} = 0$ con molteplicità algebrica 2. Dato che

$$\mathrm{mg}(\lambda_{0,1}) = 3 - rk \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & a \\ 2 & -\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix}_{c=\lambda=0} = 3 - rk \begin{pmatrix} -3 & 0 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  la molteplicità geometrica di $\lambda_{0,1}$ è 2, e T è diagonalizzabile, se e solo se $3b + 2a = 0$.

- $c = -3$. Abbiamo l' autovalore $\lambda_0 = 0$ con molteplicità algebrica 1 (e quindi geometrica 1) e l'autovalore $\lambda_{1,2} = -3$ con molteplicità algebrica 2. Dato che

$$\mathrm{mg}(\lambda_{1,2}) = 3 - rk \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & a \\ 2 & -\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix}_{c=\lambda=-3} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  la molteplicità geometrica di $\lambda_{0,1}$ è 2, e T è diagonalizzabile, se e solo se $a = 0$.

Ricapitolando

1. T può essere morfismo. Per le T morfismo,
2. Prendendo la base $B = (1,2,0), (3,0,1), (1,0,0)$ di $\mathbb{R}^3$ abbiamo $(M_T)^B_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
3. Il polinomio caratteristico di T è $\lambda(c-\lambda)(3+\lambda)$.
4. Ci sono casi in cui T è diagonalizzabile, per esempio $a = b = c = 1$. Più in dettaglio, T è diagonalizzabile se e solo se $c \neq 0, -3$, $\forall\, a, b$, oppure $c = 0$ e a, b tali che $3b + 2a = 0$, oppure $c = -3$ e a, b tali che $a = 0$.

□

Esercizio 3 (8pt). *Data la base B di $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ ed un endomorfismo $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$(M_T)^B_B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T al variare di a.

[Opzionale:] Determinare, quando possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di T

$$p_t(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda) \det \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(\lambda^2-2a\lambda+a^2-a)$$

Dato che le radici di $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - a$ sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2-a)}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a}}{2} = a \pm \sqrt{a}$$

gli autovalori di T sono, se $a \geq 0$.

$$\lambda_0 = a \quad \lambda_1 = a - \sqrt{a} \quad \lambda_2 = a + \sqrt{a}$$

Analizziamo i casi

- Se $a < 0$ non abbiamo tutte le radici in $\mathbb{R}$ e quindi T non é diagonalizzabile.
- Abbiamo $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ se e solo se $a = a - \sqrt{a} = a + \sqrt{a}$, ovvero se e solo se $a = 0$. In questo caso abbiamo $\lambda_{0,1,2} = 0$ di moleplicità algebrica 3, mentre

$$\text{mg}\,\lambda_{0,1,2} = 3 - rk \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=a=0} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

  e quindi T non è diagonalizzabile.
- Possiamo quindi considerare $a > 0$
  - Abbiamo $\lambda_0 = \lambda_1 \Leftrightarrow a = a - \sqrt{a} \Leftrightarrow a = 0$ impossibile.
  - Il caso $\lambda_0 = \lambda_2$ è analogamente impossibile.
  - Il caso $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} = a + \sqrt{a} \Leftrightarrow a = 0$ è impossibile.
  - Per $a > 0$ quindi abbiamo tre autovalori distinti e T è quindi diagonalizzabile.

Nel caso T sia diagonalizzabile, ovvero se $a > 0$, determiniamio una base B di autovettori. Gli autovalori sono tutti nel campo e distinti, quindi per quanto visto a teoria B sarà unione delle basi dei tre autospazi, ciascuna composta da un solo vettore.

- Determiniamo una base di $V_{\lambda_0} = \text{Sol}((M_M)_B^B \, \underline{x} = \lambda_0 I_3)$, con $\underline{x} = (x, y, z)$.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=a} \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} az = 0 \\ ax = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 0$$

  Vettore generico di $\mathbb{R}^3$ è (x, y, z), applicando le condizioni $x = z = 0$ otteniamo $(0, y, 0)$, il vettore generico di V_{λ_0}, una cui base è, per esempio, $(0, 0, 1)$.

- Determiniamo una base di $V_{\lambda_1} = \mathrm{Sol}((M_M)_B^B \underline{x} = \lambda_1 I_3)$, con $\underline{x} = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=a-\sqrt{a}} \underline{x} &= 0 \\ \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & a \\ a & \sqrt{a} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a}x + az = 0 \\ ax + \sqrt{a}y = 0 \\ x + \sqrt{a}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}(-\sqrt{a}z) + az = 0 \\ a(-\sqrt{a}z) + \sqrt{a}y = 0 \\ x = -\sqrt{a}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -az + y = 0 \\ x = -\sqrt{a}z \end{cases}$$

Vettore generico di $\mathbb{R}^3$ è (x, y, z), applicando le condizioni $x = -\sqrt{a}z$, $y = az$ otteniamo $(-\sqrt{a}z, az, z)$, il vettore generico di V_{λ_0}, una cui base è, per esempio, $(-\sqrt{a}, a, 1)$.

- Determiniamo una base di $V_{\lambda_2} = \mathrm{Sol}((M_M)_B^B \underline{x} = \lambda_1 I_3)$, con $\underline{x} = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=a+\sqrt{a}} \underline{x} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{a} & 0 & a \\ a & -\sqrt{a} & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{a}x + az = 0 \\ ax - \sqrt{a}y = 0 \\ x - \sqrt{a}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a}(\sqrt{a}z) + az = 0 \\ a(\sqrt{a}z) - \sqrt{a}y = 0 \\ x = \sqrt{a}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ az - y = 0 \\ x = \sqrt{a}z \end{cases}$$

Vettore generico di $\mathbb{R}^3$ è (x, y, z), applicando le condizioni $x = \sqrt{a}z$, $y = az$ otteniamo $(\sqrt{a}z, az, z)$, il vettore generico di V_{λ_0}, una cui base è, per esempio, $(\sqrt{a}, a, 1)$.

Riassumendo, l'endomorfismo T è diagonalizzabile se e solo se $a > 0$. Una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$ è

$$B = (0, 0, 1), (-\sqrt{a}, a, 1), (\sqrt{a}, a, 1)$$

Per scrupolo controlliamo che questa sia una base per ogni $a > 0$. E lo è, dato che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{a} & a & 1 \\ \sqrt{a} & a & 1 \end{pmatrix} = -2a\sqrt{a} \neq 0 \text{ se } a > 0$$

$\square$