Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2023/24

Caboara

Esame scritto 9 Settembre

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\begin{cases} e^{3z} = e^{2\bar{z}+1} \\ \mid z \mid > 3 \end{cases}$

   Soluzione: $z = 1 + \frac{2\pi}{5}k,\ k \neq 0, \pm 1, \pm 2$

2. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale

   $$W = \{(a+b+c, a+b+c, a+b+c, 2a+2b+2c) \ \mid \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$$

   Soluzione: 1

3. Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il rango della matrice

   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   Soluzione: $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ rk(A) = 4$

4. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix}$ e calcolarla.

   Soluzione: $x \neq 2, \quad M^{-1} = \frac{1}{6-3x} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -x & -x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2/3}{x-2} & \frac{1/3}{x-2} \\ \frac{1/3x}{x-2} & \frac{1/3x-1}{x-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x-2} \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3x & 1/3x-1 \end{pmatrix}$

5. Dato il polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ determinare la sua parte squarefree.
   Soluzione: $\mathrm{sqfr}(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (9pt). *Al variare di* $a \in \mathbb{R}$ *discutere le soluzioni del sistema nelle incognite* $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere l'equazione matriciale data nella forma $\underline{x} \cdot A = \underline{b}$, con la notazione ovvia. Trasponiamo l'equazione, ottenendo

$$\begin{aligned} (\underline{x} \cdot A)^T &= \underline{b}^T \\ A^T \cdot \underline{x}^T &= \underline{b}^T \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo il rango di A in dipendenza da a.

1. Se $a = 0$ il rango di A è chiaramente 2, e la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ha chiaramente rango 3. Non ci sono quindi soluzioni.

2. Se $a \neq 0$, possiamo dividere per a la terza riga della matrice A, ottenendo

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat[[1, 1, 0],
       [2, 3, a],
       [1, 1, 1]];
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 0]
     2^a-2*1^a [0, 1, a]
     3^a-1*1^a [0, 0, 1]
```

   Per qualunque valore di a questa matrice triangolare superiore è non singolare, e quindi il sistema ammette un unica soluzione.

Riassumendo, il sistema non ha soluzioni per $a = 0$, ha un' unica soluzione altrimenti.

□

Esercizio 2 (6pt). *Dati $a \in \mathbb{R}$ ed i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 = (1,1,0,1), \underline{v}_2 = (1,0,1,a), \underline{v}_3 = (2,1,0,1))$$

e

$$W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1 = (2,1,1,a+1), \underline{w}_2 = (-1,2,-3,-3a+2), \underline{w}_3 = (a-4, 3a-8, -a+2, -a))$$

1. *Al variare di a determinare dimensione di $V+W$ e $V \cap W$.*
2. *Calcolare un base di $V \cap W$ per 117 differenti valori di a, scelti a piacere.*

Dimostrazione. Dato che V ci appare più semplice di W, ne calcoleremo una base e la dimensione.

Determiniamo una base di V riducendo la matrice che ha i suoi generatori come righe. Scegliamo questa metodo (ridurre la matrice costruita per righe) perchè speriamo che le righe della ridotta siano più semplici delle righe della matrice di partenza, e procedendo cosí possiamo usarle come base di V.

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat([[1,1,0,1],
        [1,0,1,a],
        [2,1,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 0, 1]
     2^a-1*1^a [0, -1, 1, a - 1]
     3^a-2*1^a [0, -1, 0, -1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,  0,     1]
-------------- [0, -1,  1, a - 1]
     3^a-1*2^a [0,  0, -1,    -a]
```

La dimensione di V è 3 (non varia al variare di a) ed una sua base è (per comodità cambiamo segno alla seconda e terza riga)

$$\underline{v}'_1 = (1,1,0,1), \underline{v}'_2 = (0,1,-1,a-1), \underline{v}'_3 = (0,0,1,a)$$

che useremo nel prosieguo perchè ci sembra più semplice della base originaria.

Costruiamo ora la matrice che ha come colonne $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_3$ e riduciamola con Gauss. Mettiamo prima W perchè abbiamo già calcolato la dimensione di V.

```
Use R::=Q[a];
WV:=Mat([[    2,      -1,  a - 4,  1,     0,  0],
         [    1,       2, 3a - 8,  1,     1,  0],
         [    1,      -3, -a + 2,  0,    -1,  1],
         [a + 1, -3a + 2,     -a,  1,   1-a,  a]]);
```

```
RiduciScalaVerbose(WV);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, -1, a - 4, 1, 0, 0]
   2^a-1/2*1^a [0, 5/2, 5/2a - 6, 1/2, 1, 0]
   3^a-1/2*1^a [0, -5/2, -3/2a + 4, -1/2, -1, 1]
4^a-1/2a - 1/2*1^a [0, -5/2a + 5/2, -1/2a^2 + 1/2a + 2, -1/2a + 1/2, -a + 1, a]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=5/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, -1, a - 4, 1, 0, 0]
-------------- [0, 5/2, 5/2a - 6, 1/2, 1, 0]
     3^a+1*2^a [0, 0, a - 2, 0, 0, 1]
 4^a+a - 1*2^a [0, 0, 2a^2 - 8a + 8, 0, 0, a]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=a - 2
Preseguo supponendo a diverso da 2, faro' a parte il caso a=2

Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2,  -1,    a - 4,   1,  0,      0]
-------------- [0, 5/2, 5/2a - 6, 1/2,  1,      0]
-------------- [0,   0,    a - 2,   0,  0,      1]
4^a-2a + 4*3^a [0,   0,        0,   0,  0, -a + 4]
```

Esaminiamo inizialmente le dimensioni

1. Trattiamo il caso particolare $a = 2$. Sostituiamo a con 2 nella matrice *prima della posizione* $a \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a-4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5/2a-6 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2a^2-8a+8 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}_{|a=2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Abbiamo quindi che $\dim W = 2$ e $\dim V + W = 3$. Sapendo che $\dim V = 3$ dalle formule di Grassman, abbiamo che

$$\begin{aligned} \dim V + W &= \dim V + \dim W + \dim V \cap W \\ 3 &= 3 + 2 - \dim V \cap W \end{aligned}$$

   da cui $\dim V \cap W = 2$.

2. Se $a \neq 2$, la dimensione di W è anch'essa 3. Abbiamo i due casi

(a) $a \neq 4$. In questo caso $\dim V + W = 4$ e le formule di Grassmann ci dicono che

$$\begin{array}{rcl} \dim V + W & = & \dim V + \dim W + \dim V \cap W \\ 4 & = & 3 + 3 - \dim V \cap W \end{array}$$

da cui $\dim V \cap W = 2$.

(b) $a = 4$, allora le colonne legate a V non contengono pivot, e quindi dipendono dalle colonne legate a W. Quindi $W \supseteq V$, e dato che hanno le stessa dimensione, $W = V$.

Dato che ci è richiesto di calcolare una base di $V \cap W$ per 117 differenti valori di a, li scegliamo a caso ma tutti diversi da $2, 4$. Siamo nel caso (2a), possiamo lasciare a indicato ed usiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a-4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5/2a-6 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a+4 \end{pmatrix}$$

L'unica riga con nulle le prime tre componenti (quelle legate a W) è la terza. Se

$$x\underline{v}'_1 + y\underline{v}'_2 + z\underline{v}'_3$$

è un vettore generico di V, la condizione per cui appartenga a $V \cap W$ è data dagli ultimi tre componenti $0, 0, -a+4$ della riga (danno i coefficenti della relazione lineare)

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + (-a+4) \cdot z = 0 \qquad \text{con } -a+4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 4$$

e quindi $z = 0$. Sostituendo $z = 0$ nel vettore generico otteniamo un vettore generico di $V \cap W$

$$x\underline{v}'_1 + y\underline{v}'_2$$

e una base di $V \cap W$ è data da $\underline{v}'_1 = (1, 1, 0, 1), \underline{v}'_2 = (0, -1, 1, a-1)$ al variare, per esempio di $a \in \{5, \dots, 121\}$ (si tratta di 117 interi distinti, consecutivi, tutti diversi da $2, 4$).

Ricapitoliamo:

1. Se $a = 2$ abbiamo $\dim V + W = 3$, $\dim V \cap W = 2$.
2. Se $a = 4$ abbiamo $V = W$ e quindi $\dim V + W = \dim V \cap W = 3$.
3. Se $a \neq 2, 4$ abbiamo $\dim V + W = 4$, $\dim V \cap W = 2$.

Se $a = 5+i, \quad i \in \{1, \dots, 117\}$, abbiamo che una base di $V \cap W$ è $(1, 1, 0, 1), (0, 1, -1, -a+1)$. $\square$

Esercizio 3 (9pt). *Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato dalle basi canoniche alla matrice*

$$(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di F al variare di a.

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} p_F(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)((1-\lambda)(a-\lambda)-a) \\ &= (a-\lambda)(a-\lambda-a\lambda+\lambda^2-a) \\ &= (a-\lambda)\lambda(\lambda-(a+1)) \end{aligned}$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = a \quad \lambda_3 = a+1$$

Abbiamo i casi seguenti

1. Autovalori tutti coicidenti. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow 0 = a = a+1$. Impossibile.
2. Due autovalori coincidenti, il terzo distinto.
   (a) $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow 0 = a$. Abbiamo $\lambda_3 = a+1 = 1$ di molteplicità algebrica 1 (e quindi di molteplicità geomatrica 1). La molteplicità algebrica di $\lambda_2 = 0$ é 2, mentre

   $$\mathrm{mg}(0) = 3 - rk \left.\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}\right|_{\substack{a=0 \\ \lambda=0}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$$

   e quindi F è diagonalizzabile.

   (b) $\lambda_1 = \lambda_3 \Leftrightarrow 0 = a+1 \Leftrightarrow a = -1$. Abbiamo $\lambda_2 = a = -1$ di molteplicità algebrica 1 (e quindi di molteplicità geomatrica 1). La molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 0$ é 2, mentre

   $$\mathrm{mg}(0) = 3 - rk \left.\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}\right|_{\substack{a=-1 \\ \lambda=0}} = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

   e quindi F non è diagonalizzabile.

   (c) $\lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow a = a+1$. Impossibile.
3. Gli autovalori sono tutti distinti. l'endomorfismo F è quindi diagonalizzabile.

Riassumendo, F è diagonalizzabile se e solo se $a \neq -1$.

□