

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 23 Giugno

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME:

NOME:

1. Determinare il numero di soluzioni complesse dell'equazione $e^{|z|} = e^z$.

Sol: ∞

2. Determinare il numero di radici reali del polinomio $p(x) = 2x^4 - x - 3$

Sol: 2

3. Descrivere, se esiste, un morfismo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = \operatorname{Im} f$

Sol: per esempio quello associata alla matrice $(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \operatorname{Span}((1, 1, 1, 1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{Q}^4$.

Sol: $V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \right\}$

5. Determinare il polinomio minimo dell'endomorfismo associato da una base B alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: $x^3 - x^2 - 5x + 4$,

Alcune regole pratiche sullo scritto

- **Le soluzioni di ogni esercizio vanno ricapitolate in fondo allo svolgimento dello stesso - la mancanza di questa ricapitolazione verrà penalizzata nel punteggio.**
- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono ammessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME:

NOME:

Esercizio 1 (8pt). Dati $a, b \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, con $A = \begin{pmatrix} b & 0 & a \\ ab & a+1 & 1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$

Soluzione. Visto che si tratta di un sistema quadrato omogeneo, basterà analizzare il rango della matrice incompleta.

Calcoliamo, per esempio con Sarrus, il determinante della matrice incompleta A , ottenendo

$$\begin{aligned} \det A &= b \cdot (a+1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot b + a \cdot ab \cdot a - b \cdot (a+1) \cdot b - a \cdot 1 \cdot b - 0 \cdot ab \cdot 0 \\ &= a^3b - a^2b - 2ab = ab(a^2 - a - 2) = ab(a+1)(a-2) \end{aligned}$$

Questo si annulla per $b = 0$, $\forall a$ o per $a = 0, 2, -1 \forall b$, e quindi fuori da questi casi il rango è pieno, 3. Esaminiamo i quattro casi particolari. Per ciascuno, il rango non potrà essere pieno, dato che la matrice è singolare

- $b = 0$. la matrice incompleta diviene $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a+1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 se e solo se $a \neq 0$, altrimenti rango 1.
- $a = 0$. la matrice incompleta diviene $A'' = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 se e solo se $b \neq 0$, altrimenti rango 1.
- $a = 2$. la matrice incompleta diviene $A''' = \begin{pmatrix} b & 0 & 2 \\ 2b & 3 & 1 \\ b & 2 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 per ogni valore di b .
- $a = -1$. la matrice incompleta diviene $A^{iv} = \begin{pmatrix} b & 0 & -1 \\ -b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 per ogni valore di b .

Ricapitolando, applicando il teorema di Rouchè-Capelli,

- Il sistema ha un'unica soluzione per $b \neq 0$, $\forall a$ o per $a \neq 0, 2, -1$, $\forall b$.
- Il sistema ha ∞^1 soluzioni per $ab = 0$, ma $a \neq 0$ o $b \neq 0$; per $a = -1, 2 \forall b$.
- Il sistema ha ∞^2 soluzioni per $b = 0$, $a = 0$.

□

Esercizio 2 (8pt). *Determinare un endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \operatorname{Span}((1, 1, 1, 1))$, $2 \in \operatorname{sp}(T)$ e $\operatorname{mg}(2) = 2$. Per questo T , scrivere $(M_T)_{E_4}^{E_4}$.*

Soluzione. Cerchiamo la soluzione scegliendo una opportuna base B in cui i nostri conti risultino semplici.

Sia $B = \underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \underline{v}_2 = \underline{e}_1, \underline{v}_3 = \underline{e}_2, \underline{v}_4 = \underline{e}_4$. Questa è chiaramente una base di $\mathbb{R}^4$. Definiamo T sulla base B come

$$T(\underline{v}_1) = \underline{0} \quad T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_2 \quad T(\underline{v}_3) = 2\underline{v}_3 \quad T(\underline{v}_4) = \underline{v}_1$$

e quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $T((1, 1, 1, 1)) = T(\underline{v}_1) = \underline{0}$ quindi $(1, 1, 1, 1) \in \ker T$. Dato che $T(\underline{v}_4) = (1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1) \in \operatorname{Im} T$. Abbiamo quindi $(1, 1, 1, 1) \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$. Dato che il rango della matrice è 3 (ci sono solo tre righe linearmente indipendenti), la dimensione di $\ker T$ è $4 - \operatorname{rk} T = 4 - 3 = 1$, e quindi $\ker T = (1, 1, 1, 1)$ e quindi $\ker T \cap \operatorname{Im} T = (1, 1, 1, 1)$.

Si vede immediatamente che

$$p_T(\lambda) = \lambda^2(2 - \lambda)^2$$

quindi 2 è un autovalore di molteplicità algebrica 2. Dato che $\underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V_2$, la molteplicità geometrica di 2 è almeno 2, e dato che $\operatorname{mg}(2) \leq \operatorname{ma}(2) = 2$, abbiamo che $\operatorname{mg}(2) = 2$. Le condizioni sono quindi rispettate.

proponiamo due metodi per il calcolo di $(M_T)_{E_4}^{E_4}$. Il primo usa brutalmente la formula di cambio base per morfismi.

La formula di cambiamento di base per morfismi ci dice

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = (M_T)_{E_4}^B (M_T)_B^B (M_T)_B^{E_4} = (M_T)_{E_4}^B (M_T)_B^B \left((M_T)_{E_4}^B \right)^{-1}$$

Data

$$M_{E_4}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che si costruisce immediatamente dalla definizione di T , calcoliamo la sua inversa col metodo dell'identità

```
M:=Mat([[1,1,0,0, 1,0,0,0],
        [1,0,1,0, 0,1,0,0],
        [1,0,0,0, 0,0,1,0],
        [1,0,0,1, 0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
```

```

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
      2^a-(1)*1^a [0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 0]
      3^a-(1)*1^a [0, -1, 0, 0, -1, 0, 1, 0]
      4^a-(1)*1^a [0, -1, 0, 1, -1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 0]
      3^a-(1)*2^a [0, 0, -1, 0, 0, -1, 1, 0]
      4^a-(1)*2^a [0, 0, -1, 1, 0, -1, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 0]
----- [0, 0, -1, 0, 0, -1, 1, 0]
      4^a-(1)*3^a [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 1]

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1

```

----- [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
      2^a*(-1) [0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 0]
      3^a*(-1) [0, 0, 1, 0, 0, 1, -1, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna
----- [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
      2^a-(-1)*3^a [0, 1, 0, 0, 1, 0, -1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 1, -1, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna
      1^a-(1)*2^a [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 1, 0, -1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 1, -1, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 1]

```

Quindi

$$\left((M_T)_{E_4}^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned}
(M_T)_{E_4}^{E_4} &= M_{E_4}^B (M_T)_B^B (M_{E_4}^B)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il secondo sfrutta le proprietà di morfismi. Dobbiamo trovare $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$ in base E_4 . Dato che

$$T(v_1) = \underline{0} \quad T(v_2) = 2v_2 \quad T(v_3) = 2v_3 \quad T(v_4) = v_1$$

sappiamo che

$$\begin{cases} T(v_1) = \underline{0} \Leftrightarrow T(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = \underline{0} \\ T(v_2) = 2v_2 \Leftrightarrow T(e_1) = 2e_1 \\ T(v_3) = 2v_3 \Leftrightarrow T(e_2) = 2e_2 \\ T(v_4) = v_1 \Leftrightarrow T(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{cases}$$

dobbiamo solo determinare $T(e_3)$ in base E_4 .

$$\begin{aligned}
T(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) &= \underline{0} \\
T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) + T(e_4) &= \underline{0} \\
2e_1 + 2e_2 + T(e_3) + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 &= \underline{0} \\
T(e_3) &= -3e_1 - 3e_2 - e_3 - e_4
\end{aligned}$$

Quindi

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricapitolando: data la base $B = v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = e_1, v_3 = e_2, v_4 = e_4$ di $\mathbb{R}^4$, il morfismo

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ con } (M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ha } \ker T \cap \text{Im } T = (1, 1, 1, 1), 2 \in \text{sp}(T), \text{mg}(2) = 2$$

$$\text{e } (M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

P.S: Si sarebbe potuto partire direttamente dalla base E_4 , seguendo il ragionamento del secondo metodo di calcolo di $(M_T)_{E_4}^{E_4}$.

Esercizio 3 (8pt). Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo reale $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ a & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare i valori di a per cui f è diagonalizzabile. In generale (non solo se f è diagonalizzabile), dire se esistono tre autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ tali che $(5, 3, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$.

Soluzione. Troviamo il polinomio caratteristico di T

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & a-1 \\ a & -1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Abbiamo due autovalori $\lambda_1 = 1$, $\text{ma}(\lambda_1) = 2$ e $\lambda_2 = -1$, $\text{ma}(\lambda_2) = \text{mg}(\lambda_2) = 1$. Determiniamo

$$\text{mg}(\lambda_1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & a-1 \\ a & -1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}_{|\lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ a & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\text{mg}(\lambda_1) = \begin{cases} 3-2=1 & a \neq 1 \\ 3-1=2 & a = 1 \end{cases}$$

- Se $a = 1$, la molteplicità algebrica e geometrica di λ_1 sono uguali a 2, e T è quindi diagonalizzabile. Dato che T è diagonalizzabile, esiste una base di autovettori e quindi esistono tre autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ tali che $(5, 3, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$.
- Se $a \neq 1$, la molteplicità algebrica e geometrica di λ_1 sono diverse, e T non è quindi diagonalizzabile. Non esiste quindi una base di autovettori, ma vediamo se esistono tre autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ tali che $(5, 3, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$.

Dobbiamo trovare basi di V_{λ_1} e di V_{λ_2} .

- Base di V_{λ_1} , con $\lambda_1 = 1$ ovvero una base di

$$\text{Sol} \left((M_f)_{E_3}^{E_3} \underline{x} = \lambda_1 \underline{x} \right) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ a & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{1x} \right) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ a & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \right)$$

ovvero, con $a \neq 1$ una base delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (a-1)z = 0 \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{a}{2}x \end{cases}$$

che ha un vettore generico $(x, \frac{a}{2}x, 0)$ e quindi una base di V_{λ_1} è $(1, \frac{a}{2}, 0)$.

- Base di V_{λ_2} , con $\lambda_1 = -1$ ovvero una base di

$$\text{Sol} \left((M_f)_{E_3}^{E_3} \underline{x} = \lambda_2 \underline{x} \right) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ a & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = -1 \underline{x} \right) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-1 \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \right)$$

ovvero, con $a \neq 1$ una base delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + (a-1)z = 0 \\ ax + az = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che ha un vettore generico $(0, y, 0)$ e quindi una base di V_{λ_2} è $(0, 1, 0)$.

Abbiamo quindi due autovettori linearmente indipendenti (per ragioni teoriche, appartengono ad autospazi distinti), $(1, \frac{a}{2}, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango chiaramente due, e le prime due righe sono linearmente indipendenti per ogni a , la terza riga è combinazione lineare delle prime due, ed esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha \left(1, \frac{a}{2}, 0\right) + \beta (0, 1, 0) = (5, 3, 0)$$

Possiamo quindi porre

$$\underline{v}_1 = \alpha \left(1, \frac{a}{2}, 0\right) \quad \underline{v}_2 = \beta \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \quad \underline{v}_3 = \beta \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

e questi sono tre autovettori. Abbiamo

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \alpha \left(1, \frac{a}{2}, 0\right) + \beta (0, 1, 0) = (5, 3, 0)$$

come richiesto.

Ricapitolando, f è diagonalizzabile se e solo se $a = 1$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esistono tre autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ tali che $(5, 3, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$. $\square$