Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 3 Giugno

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME: **NOME:**

1. Determinare il numero di soluzioni complesse dell'equazione $\frac{z^{37}+2}{z^{37}+3} = 0$. Sol: 37

2. Determinare una applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T \circ T \not\equiv 0$ ma $T \circ T \circ T \equiv 0$.

   Sol: per esempio quella associata alla matrice $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Determinare la dimensione del $\mathbb{C}$-spazio

   $$V = \mathrm{Span}\left(x^2+3x-1, 4x^2+3x-4, 2x^2+2x-2\right) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}[x]_{x\leq 2}$$

   Sol: 2

4. Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$

   $V_1 = \mathrm{Span}((1,1,2,0,0),(2,2,1,0,0),(3,3,7,0,0)), \quad V_2 = \mathrm{Span}((1,1,3,1,0),(2,5,7,2,1))$

   determinare la dimensione di $V_1 + V_2$.
   Sol: 4

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (8pt)**.** *Consideriamo il sistema lineare*

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \\ y + 4z = \mu \end{cases}$$

1. *Determinare per quali valori* reali *dei parametri* λ, μ *il sistema ammette soluzione unica*
2. *Determinare per quali valori* complessi *dei parametri* λ, μ *il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

Soluzione. Risolviamo con Gauss, dopo aver scambiato la prima e seconda equazione per comodità. La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}$$

per semplificare i calcoli sucessivi facciamo un passo di riduzione di Gauss, cancellando l'entrata in posizione $(2,1)$. La matrice completa diviene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -4 & \lambda^2 & \lambda - 2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}$$

È facile vedere che il determinante della matrice incompleta (a blocchi) é

$$-2\lambda^2 - 32 = -2(\lambda^2 + 16)$$

Il determinante non si annulla per alcun $\lambda \in \mathbb{R}$, quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice incompleta ha rango massimo, e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette un unica soluzione.

Per valori complessi di λ, se il determinante rimane non nullo, ovvero se $\lambda \neq \pm 4i$, per le stesse ragioni esiste un unica soluzione.

Se $\lambda = \pm 4i$, la matrice incompleta ha rango non massimo. Procediamo coi calcoli

- Caso $\lambda = 4i$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -4 & \lambda^2 & \lambda - 2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}_{\lambda = 4i} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4i & 1 \\ 0 & -4 & -16 & 4i - 2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}$$

dividiamo per -4 la seconda riga

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -i + 1/2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}$$

e procediamo con Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -i+1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - i + 1/2 \end{pmatrix}$$

Il rango dell'incompeta è due, il rango della completa è tre, tranne che nel caso $\mu - i + 1/2 = 0$, in cui è due. Il sistema è quindi impossibile a meno che $\mu = i - 1/2$, ed in questo caso il sistema, con $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni per Rouchè-Capelli, diviene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -i+1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per sostituzione all'indietro, otteniamo

$$\begin{cases} x = -2iz + 1/2 \\ y = -4z - i + 1/2 \end{cases}$$

e le soluzioni sono quindi della forma

$$\begin{cases} x = -2it + 1/2 \\ y = -4t - i + 1/2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

- Caso $\lambda = -4i$.

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -4 & \lambda^2 & \lambda - 2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}\right|_{\lambda=-4i} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4i & 1 \\ 0 & -4 & -16 & -4i-2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}$$

dividiamo per -4 la seconda riga

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & i+1/2 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{pmatrix}$$

e procediamo con Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & i+1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - i - 1/2 \end{pmatrix}$$

Il rango dell'incompeta è due, il rango della completa è tre, tranne che nel caso $\mu - i - 1/2 = 0$, in cui è due. Il sistema è quindi impossibile a meno che $\mu = i + 1/2$, ed in questo caso il sistema, con $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni per Rouchè-Capelli, diviene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & i+1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per sostituzione all'indietro, otteniamo

$$\begin{cases} x = 2iz + 1/2 \\ y = -4z + i + 1/2 \end{cases}$$

e le soluzioni sono quindi della forma

$$\begin{cases} x = 2it + 1/2 \\ y = -4t + i + 1/2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Ricapitolando, il sistema ammette un unica soluzione per $\lambda \in \mathbb{R}$, e per $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq \pm 4i$, in ciascun caso per ogni valore di μ.

- Se $\lambda = 4i$, il sistema è impossibile se $\mu \neq i - 1/2$. Se $\mu = i - 1/2$ le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = -2it + 1/2 \\ y = -4t - i + 1/2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

- Se $\lambda = -4i$, il sistema è impossibile se $\mu \neq i + 1/2$. Se $\mu = i + 1/2$ le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = 2it + 1/2 \\ y = -4t + i + 1/2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

□

Esercizio 2 (8pt)**.** *Consideriamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & a \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *con* a *parametro reale. Consideramo l'applicazione lineare* T *tale che* $(M_T)_{E_3}^{E_3} = A$.

1. *Determinare i valori di* a *tali che* T *non sia iniettiva.*
2. *Per questi valori di* a *determinare dimensione e base di* $\ker T$ *ed* $\operatorname{Im} T$.

Soluzione. 1. Per determinare i valori di a tali che T non sia iniettiva, basta vedere per quali a il determinante di A sia nullo, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & a \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2a + 30 = 0 \Leftrightarrow a = 15$$

2. Poniamo quindi $a = 15$, otteniamo la matrice associata a T in questo caso $B = (M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e dato che $B_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ è chiaramente non singolare, una base dell'immagine di T è data dai due vettori colonna impigliati nel minore, $(1, 0, -1), (2, 5, 0)$ e $\dim T = 2$. Abbiamo quindi che $\dim \ker T = 3 - 2 = 1$ e troviamo il ker risolvendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & a \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

procediamo per esempio a risolvere il sistema con Gauss

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [0,5,15],
        [-1,0,3]]);

L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3]
  0 sotto pivot[0, 5, 15]
  3^a-(-1)*1^a [0, 2, 6]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3]
-------------- [0, 5, 15]
 3^a-(2/5)*2^a [0, 0, 0]
```

```
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 2, 3]
    2^a*(1/5)  [0, 1, 3]
-------------- [0, 0, 0]

Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna
  1^a-(2)*2^a  [1, 0, -3]
-------------- [0, 1, 3]
-------------- [0, 0, 0]
```

Il sistema è quindi equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -3z \end{cases}$$

e sostituendo le due relazioni appena trovate nel vettore (x, y, z) otteniamo un vettore generico delle soluzioni $(3z, -3z, z)$, da cui una base delle soluzioni e quindi del ker è $(3, -3, 1)$.

Ricapitolando,

1. il morfismo T è non iniettivo se e solo se $a = 15$.
2. Per $a = 15$ abbiamo che $\dim \ker T = 1$, ed una base del ker è data da $(3, -3, 1)$, mentre $\dim \operatorname{Im} T = 2$ ed una base dell'immagine è data da $(1, 0, -1), (2, 5, 0)$.

$\square$

Esercizio 3 (8pt)**.** *Data l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \\ & p(x) & \mapsto & (x+1)p'(x)+p(2) \end{array}$$

1. *Determinare gli autovalori di T e basi dei relativi autospazi.*

2. *Dire se T é diagonalizzabile.*

Soluzione. Descriviamo T sulla base $B = 1, x, x^2, x^3$, ricordando che la valutazione del polinomio costante 1 in ogni punto è sempre 1.

$$\begin{array}{l} T(1) = (x+1)\cdot(1)' + 1(2) = (x+1)\cdot 0 + 1 = 1 \\ T(x) = (x+1)\cdot(x)' + x(2) = (x+1)\cdot 1 + 2 = x+3 \\ T(x^2) = (x+1)\cdot(x^2)' + x^2(2) = (x+1)\cdot(2x) + 4 = 2x^2 + 2x + 4 \\ T(x^3) = (x+1)\cdot(x^3)' + x^3(2) = (x+1)\cdot(3x^2) + 8 = 3x^3 + 3x^2 + 8 \end{array} \quad c$$

Usando l'isomorfismo di spazi vettoriali

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & 1 & \mapsto & \underline{e}_1 \\ & x & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & x^2 & \mapsto & \underline{e}_3 \\ & x^3 & \mapsto & \underline{e}_4 \end{array}$$

identifichiamo il morfismo T con il morfismo

$$\begin{array}{rcc} \mathbb{R}^4 & \to & 1\mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 & \mapsto & (1,0,0,0) \\ \underline{e}_2 & \mapsto & (3,1,0,0) \\ \underline{e}_3 & \mapsto & (4,2,2,0) \\ \underline{e}_4 & \mapsto & (8,0,3,3) \end{array}$$

che ha le stesse proprietà e che, abusando la notazione, continueremo a chiamare T. Possiamo qundi scrivere la matrice

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che essendo triangolare superiore ci dá immediatamente una fattorizzazione del polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$, il primo di molteplicità algebrica due, gli altri di molteplicità algebrica uno. Determiniamo le basi degli autospazi come richiesto

- Base di V_{λ_1}, data dalle soluzioni di

$$\left((M_T)_B^B - \lambda I_4\right)_{\lambda=1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3y + 4z + t = 0 \\ 2z = 0 \\ z + 3t = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Sosituendo le relazioni appena trovate in (x, y, z, t) otteniamo un vettore generico delle soluzioni, $(x, 0, 0, 0)$. Una base di V_{λ_1} è quindi data da $\underline{e}_1$, la molteplicità geometrica di λ_1 è 1 e T non è diagonalizzabile, dato che ricordiamo che $\mathrm{ma}(\lambda_1) = 2$.

- Base di V_{λ_2}, data dalle soluzioni di

$$\left((M_T)_B^B - \lambda I_4\right)_{\lambda=2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x + 3y + 4z + 8t = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 3t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10z \\ y = 2z \\ t = 0 \end{cases}$$

procedendo come sopra una base di V_{λ_2} è data da $(10, 2, 1, 0)$.

- Base di V_{λ_3}, data dalle soluzioni di

$$\left((M_T)_B^B - \lambda I_4\right)_{\lambda=3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z + 8t = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y + 4z + 8t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{29}{2}t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$$

procedendo come sopra una base di V_{λ_3} è data da $\left(-\frac{29}{2}, 3, 3, 1\right)$.

Comcludendo:

Gli autovalori di T sono $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2\lambda_3 = 3$, il primo di molteplicità algebrica due. Le basi degli autospazi sono

- Base di $V_{\lambda_1} = \underline{e}_1$.
- Base di $V_{\lambda_2} = (10, 2, 1, 0)$.
- Base di $V_{\lambda_3} = \left(-\frac{29}{2}, 3, 3, 1\right)$.

Quindi T non è diagonalizzabile. $\square$