

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 4 Aprile

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME:

NOME:

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^{|z|} = e^{iz|z|}$.

Soluzione: $z = -1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \text{Span}((1, 2, 3), (5, -1, 4), (6, i, 6+i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$

Soluzione: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C} \mid x + y = z\}$

3. Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare il determinante della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 1 & 2 \\ b & b & 1 & 2 & b \\ 5 & 4 & 1 & 1 & a \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soluzione: $\forall a, b \det(M) = 2 - a$

4. Determinare la dimensione del $\mathbb{C}$ -spazio

$$V = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) \underset{SSP}{\subseteq} \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

Soluzione: 3

5. Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \text{Span}((23, 456, 0), (\sqrt{45}, \pi + 1, 0)), \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^8 + z^4 + z^2 = 0\}$$

determinare $V_1 \cap V_2$.

Soluzione: $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono ammessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME:

NOME:

Esercizio 1 (8pt). *Discutere le $a \in \mathbb{R}$ tali che il sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4a \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0}$$

abbia un'unica soluzione.

Soluzione. Dato che si tratta di un sistema omogeneo di quattro equazioni in quattro incognite, c'è una sola soluzione, quella nulla, se e solo se il determinante della matrice incompleta, A , è non nullo. Calcoliamo questo determinante con Laplace, sviluppando per la prima colonna.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4a \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4a \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} = 8a^3 + 5a - 9 = p(a)$$

Potremmo andarci a cercare, se esistono le soluzioni razionali tra le candidate radici ma visto che i divisori di 8 sono 1, 2, 4, 8 ed i divisori di 9 sono 1, 3, 9, dopo aver provato un paio di candidati

$$\begin{aligned} p(1) &= 4 \\ p(2) &= 63 \end{aligned}$$

senza successo, e notando che $p(a)$ non può avere radici negative, determiniamo il numero di soluzioni reali (a questo punto forzatamente positive) di $8a^3 + 5a - 9 = 0$ con Sturm.

`F0:=8a^3 + 5a - 9;`

`F1:=24a^2 + 5`

`GCDPolySTURMVerbose(F0,F1);`

$$(8a^3 + 5a - 9) = (1/3a) * (24a^2 + 5) + (10/3a - 9)$$

Notiamo che $10/3a - 9 \rightarrow -10a + 27$ nell'algoritmo di Sturm

$$(24a^2 + 5) = (-12/5a - 162/25) * (-10a + 27) + (4499/25)$$

Notiamo che $4499/25 \rightarrow -1$ nell'algoritmo di Sturm

La sequenza di Sturm = $[8a^3 + 5a - 9, 24a^2 + 5, -10a + 27, -1]$

Per

- Per V_+ , $++--$. Un cambio di segno. $V_+ = 1$.
- Per V_- , $-++-$. Due cambi di segno. $V_- = 2$.

ed abbiamo $|V_+ - V_-| = 1$ e quindi $8a^3 + 5a - 9 = 0$ ha un'unica soluzione, positiva, che chiameremo a_0 sui reali, che non sappiamo determinare.

Ricapitolando, il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $a \neq a_0$, con $a_0 \in \mathbb{R}^+$ non determinato, soluzione di $8a^3 + 5a - 9 = 0$.

□

Esercizio 2 (8pt). *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((1, 2, 0, 1), (1, 0, 1, 0)) \text{ e } W = \text{Span}((1, 2, 1, k), (1, 2, 2, k), (1, 2, 1, k(k-1)))$$

determinare basi e dimensioni di $V, W, V+W, V \cap W$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Procediamo col metodo standard. Chiaramente i generatori di V sono una sua base, e quindi $\dim V = 2$. Mettiamo i generatori di W e V , rispettivamente, come colonne di una matrice M e riduciamola con Gauss. Abbiamo scelto di mettere prima W perchè dobbiamo ancora determinare la sua dimensione e base.

```
Use R:=Q[k];
M:=Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
        [2, 2, 2, 2, 0],
        [1, 2, 1, 0, 1],
        [k, k, k^2-k, 1, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 1]
      2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, 0, -2]
      3^a-(1)*1^a [0, 1, 0, -1, 0]
      4^a-(k)*1^a [0, 0, k^2 - 2k, -k + 1, -k]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
     [0, 1, 0, -1, 0],
     [0, 0, 0, 0, -2],
     [0, 0, k^2 - 2k, -k + 1, -k]])

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 1]
----- [0, 1, 0, -1, 0]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, -2]
      0 sotto pivot [0, 0, k^2 - 2k, -k + 1, -k]
```

Scambio la 3^a e la 4^a riga

Adesso la matrice e'

```
Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
     [0, 1, 0, -1, 0],
     [0, 0, k^2-2k, -k+1, -k],
     [0, 0, 0, 0, -2]]);
```

Distinguiamo i casi e riassumiamo, ricordando che per ogni k una base di V è data da $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $\dim V = 2$. Poniamo

$$\underline{w}_1 = (1, 2, 1, k), \quad \underline{w}_2 = (1, 2, 2, k), \quad \underline{w}_3 = (1, 2, 1, k(k-1)),$$

- Se $k = 0, 2$ la matrice ha quattro pivot, nella prima, seconda, quarta e quinta colonna. Quindi

- $\dim W + V = 4$ e $\dim W = 2$.
- Una base di W è data da $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ ed una base di $V+W$ è E_4 , dato che $\dim V+W \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}$ e $\dim V + W = 4$ implicano $V + W = \mathbb{R}^4$.
- $\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 4 = 0$ e non esiste base di $V \cap W$.

- Se $k \neq 0, 2$ la matrice ha quattro pivot, nella prima, seconda, terza e quinta colonna. Quindi

- $\dim W + V = 4$ e $\dim W = 3$.
- Una base di W è data dai suoi tre generatori, ed una base di $V + W$ è, come sopra, E_4 .
- La condizione di appartenenza del vettore generico di V , $\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2$, a $V \cap W$ si legge dalla quarta riga ed è $(0, -2) \cdot (\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$. Un vettore generico di $V \cap W$ è quindi $\alpha \underline{v}_1$ ed una sua base $\underline{v}_1$.

□

Esercizio 3 (8pt). Dire se esiste un'applicazione lineare diagonalizzabile $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} T((1, 2, 3, 0)) &= (1, 2, 3, 0) \\ T((5, 1, 0, 0)) &= (1, 2, 3, 0) \\ T((0, 1, 0, 1)) &= \underline{0} \\ \text{ma}(0) &= 2 \\ \text{ma}(1) &= 2 \end{aligned}$$

Opzionale: dire se esiste un'applicazione lineare diagonalizzabile $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfa le prime tre condizioni.

Soluzione. Denotiamo i tre vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 0) \quad \underline{v}_2 = (5, 1, 0, 0) \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 0, 1)$$

Vediamo se sono linearmente indipendenti. La matrice che ha come righe $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, dato che la sottomatrice

$$A_{(1,2,3),(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare. I tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono quindi linearmente indipendenti. Vediamo di completarli a base, per esempio col vettore $\underline{e}_4$. I quattro vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 = \underline{e}_4$ formano una base B di $\mathbb{R}^4$, dato che la matrice che li ha come righe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, come si vede immediatamente sviluppando con Laplace secondo la quarta riga e la terza colonna. Nella base B le condizioni divengono

$$\begin{aligned} T(\underline{v}_1) &= \underline{v}_1 \\ T(\underline{v}_2) &= \underline{v}_1 \\ T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\ \text{ma}(0) &= 2 \\ \text{ma}(1) &= 2 \end{aligned}$$

Lasciamo l'immagine di $\underline{v}_4$ generica, $T(\underline{v}_4) = (a, b, c, d)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det((M_T)_B^B - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & a \\ 0 & -\lambda & 0 & b \\ 0 & 0 & -\lambda & c \\ 0 & 0 & 0 & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)(d-\lambda)$$

Per avere $\text{ma}(0) = 2$, $\text{ma}(1) = 2$ deve essere $d = 1$, per cui $p_T(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$

Vediamo ora la diagonalizzabilità. Ci sono due autovalori di molteplicità algebrica 2, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$, e abbiamo $d = 1$. Calcoliamo le molteplicità geometriche di questi autovalori

- Per $\lambda_0 = 0$

$$\text{mg}(0) = 4 - \text{rk} \left((M_T)_B^B - 0 \cdot I_4 \right) = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

- Per $\lambda_1 = 1$

$$\text{mg}(1) = 4 - \text{rk} \left((M_T)_B^B - 1 \cdot I_4 \right) = 4 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - \text{rk } M$$

Calcoliamo il rango di M riducendola con Gauss e contando i pivot

```
Use R:=Q[a,b,c];
M:=Mat([[0,1,0,a],
        [0,-1,0,b],
        [0,0,-1,c],
        [0,0,0,0]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [0, 1, 0, a]
      2^a-(-1)*1^a [0, 0, 0, a + b]
      0 sotto pivot[0, 0, -1, c]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
```


Mat([[0, 1, 0, a],
[0, 0, -1, c],
[0, 0, 0, a + b],
[0, 0, 0, 0]])

Se $b = -a$ il rango è 2, tre altrimenti. Quindi

$$\text{mg}(1) = 4 - \text{rk } M = \begin{cases} 2 & \text{se } b = -a, \forall a, c \\ 1 & \text{se } b \neq -a, \forall a, c \end{cases}$$

Riassumendo: esistono applicazioni lineari diagonalizzabili che soddisfano le condizioni se e solo se $T(e_1) = (a, -a, c, 1)_B$ per qualche $a, c \in \mathbb{R}$. $\square$