Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 7 Gennaio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $\overline{z^3} z^5 = -1$

   Soluzione: $z = e^{i\pi/2}, e^{i3/2\pi}$

2. Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & a & 1 & b & a^2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$

   Soluzione: $\begin{cases} c \neq 2 & rk(A) = 4 \\ c = 2 & rk(A) = 3 \end{cases}$

3. Dare una descrizione cartesiana dello spazio vettoriale $V = \text{Span}((1,1,1,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

   Soluzione: $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \ \mid \ x = y, x = z, x = t\}$

4. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$

   $$V_1 = \text{Span}(x+1, x+3, x^3 - 7x + 31) \qquad V_2 = \text{Span}(x^2+2, x^2+4, x^3 - 17x^2 + 13)$$

   Soluzione: $B = 1, x^3$

5. Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $A = (M_T)_{E_2}^{E_2}$ tale che $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_2 = 0$, dire se T è diagonalizzabile e perchè (non più di due righe di motivazione, nessun calcolo).

   Soluzione: A annulla il polinomio $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$, squarefree e con tutte le radici nel campo. Il polinomio minimo, che per definizione divide il polinomio in questione, è quindi squarefree e con tutte le radici nel campo; T è diagonalizzabile.

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi il testo con nome e cognome.
- È possibile andare in bagno a partire da due ore dall'inizio dello scritto,consegnandomi il cellulare. Andateci immediatamente prima che si inizi. Ovvero, ADESSO.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi in aula cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi (ovviamente!)
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, possibilmente in alto a destra.
- NON CONSEGNATE LA BRUTTA. Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno forti penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete.

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Al variare di $a, b \in \mathbb{C}$ discutere le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} 2x + y + az = a \\ 3x + y + (a^2+1)z = 3 \\ 2x + y + bz = a^2 + 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & a \\ 3 & 1 & a^2+1 & 3 \\ 2 & 1 & b & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Potremmo ridurre con Gauss, ma visto la struttura della matrice preferiamo calcolare i ranghi della matrice incompleta e completa e usare il teorema di Rouchè-Capelli.

Ricordiamo che cambiare una colonna con una combinazione lineare di colonne con il coefficente della colonna in questione non nullo non cambia il rango di una matrice. Sostituiamo alla prima colonna la prima colonna meno due volte la seconda ed otteniamo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2+1 & 3 \\ 0 & 1 & b & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo alla seconda colonna la seconda meno la prima, alla terza la terza meno a^2+1 volte la prima e alla quarta la quarta meno tre volte la prima ed otteniamo

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice incompleta è $a - b$, quindi, dato che la sottomatrice $A''_{(1,2);(1,1)}$ è non singolare, la matrice incompleta ha rango

$$\begin{cases} 3 & \text{Se } a \neq b \\ 2 & \text{Se } a = b \end{cases}$$

Dato che nel primo caso anche la completa ha rango 3 ed esiste un unica soluzione, esaminiamo il caso $a = b$ sostituendo ed ottenendo la matrice

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo la terza colonna con la terza colonna meno a volte la seconda ed ottiamo la matrice

$$A^{iv} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

La terza colonna è nulla e non si considera. La sottomatrice quadrata

$$A^{iv}_{(1,2,3);(1,2,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo se e solo se $a^2 - a + 1 = 0$, e dato che questa si annulla solo per $a = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ e che la sottomatrice $A^{iv}_{(1,2);(1,1)}$ è non singolare la matrice completa ha rango

$$\begin{cases} 3 & \text{Se } a \neq \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ 2 & \text{Se } a = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

In conclusione, per il teorema di Rouché-Capelli

- Se $a \neq b$ il rango della incompleta è 3, come quello della completa ed esiste un unica soluzione.
- Se $a = b = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ il rango della incompleta è 2, come quello della completa ed esistono ∞^1 soluzioni.
- Se $a = b \neq \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ il rango della incompleta è 2, mentre il rango della completa è 3, e non esistono soluzioni.

$\square$

Esercizio 2 (8pt)**.** *Data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che*

$$T((2,3)) = (1,3) \quad T((1,a+1)) = (0,1) \quad T((3,5-a)) = (2,a+5)$$

1. *Determinare gli a per cui T può essere un morfismo.*

   Per queste a, supponendo T morfismo,

2. *Scegliere una base B di $\mathbb{R}^2$ e determinare $(M_T)_B^B$.*
3. *Determinare $T((1,1))$, se T è un isomorfismo e se esiste a tale che $T((1,1))^{-1} = (0,1)$*

Soluzione. Nominiamo i vettori

$$\underline{v}_1 = (2,3), \underline{v}_2 = (1,a+1), \underline{v}_3 = (3,5-a)$$

Vediamo quando i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ formano una base di $\mathbb{R}^2$.
Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = 2a - 1$$

Distinguiamo i casi

1. Se $a = \frac{1}{2}$, ricordando che $\underline{v}_1 = (2,3)$, abbiamo che

   $$\underline{v}_2 = (1, a+1)_{|a=1/2} = \left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\underline{v}_1$$

   per conservare la relazione lineare dovremmo avere $T(\underline{v}_2) = T\left(\frac{1}{2}\underline{v}_1\right)$, ma

   $$T(\underline{v}_2) = (0,1) \quad \text{e} \quad T\left(\frac{1}{2}\underline{v}_1\right) = \frac{1}{2}T(\underline{v}_1) = \frac{1}{2}(1,3)$$

   la relazione non si conserva e quindi non esistono applicazioni lineari che soddisfano le condizioni se $a = \frac{1}{2}$.

2. Se $a \neq \frac{1}{2}$ i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono una base di $\mathbb{R}^2$. Determiniamo la loro combinazione lineare che dà $\underline{v}_3$

```
A:=Mat([[2, 3,x],
        [1,a+1,y],
        [3,5-a,z]]);
RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, x]
 2^a-(1/2)*1^a [0, a - 1/2, -1/2x + y]
 3^a-(3/2)*1^a [0, -a + 1/2, -3/2x + z]
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=a - 1/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, x]
-------------- [0, a - 1/2, -1/2x + y]
  3^a-(-1)*2^a [0, 0, -2x + y + z]
```

Quindi $-2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0$. Dato che

$$\begin{aligned}
T(-2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3) &= T(\underline{0}) \\
-2T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) + T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\
-2(1,3) + (0,1) + (2, a+5) &= \underline{0} \\
(0, a) &= \underline{0} \Leftrightarrow a = 0
\end{aligned}$$

la relazione linare si conserva se e solo se $a = 0$, e quindi la terza condizione è superflua e T è morfismo se e solo se $a = 0$. I vettori divengono $\underline{v}_1 = (2,3)$, $\underline{v}_2 = (1,1)$ e e formano una base C di $\mathbb{R}^2$. Dato che ci viene richiesta l'immagine di un vettore descritto in base E_2, scegliamo di descrivere il morfismo in base E_2 ($B = E_2$) ed usiamo la formula per il cambiamento di base. Ricordiamo che $T(\underline{v}_1) = (1,3)$ e $T(\underline{v}_2) = 0, 1$

$$\begin{aligned}
(M_T)_{E_2}^{E_2} &= (M_T)_{E_2}^{C}\, M_C^{E_2} \\
&= (M_T)_{E_2}^{C} \left(M_{E_2}^{C}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(a) $T(1,1) = (M_T)_{E_2}^{E_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Dato che i vettori, linearmente indipendenti, $(1,3)$, $(0,1)$ appartengono all'immagine di T, questa ha dimensione 2, il ker ha dimensione 0 per il Teorema della Dimensione e quindi il morfismo T è surgettivo ed iniettivo, e quindi isomorfismo.

(c) Abbiamo

$$\begin{aligned}
T^{-1}((1,1)) &= \left((M_T)_{E_2}^{E_2}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quindi $\quad T^{-1}((1,1)) = (0,1)$

Ricapitolando,

1. T è morfismo se e solo se $a = 0$.

   Per $a = 0$,

2. prendendo $B = E_2$, abbiamo $(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $T(1,1) = (0,1)$, T è isomorfismo e $T((1,1))^{-1} = (0,1)$.

□

Esercizio 3. *Data la base B di $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ ed un endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T al variare di a.

Soluzione. Calcoliamo in polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 3 & -\lambda & a \\ a & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + (a^2+a-1)\lambda + a^2 + a - 6 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + (a^2+a-1)\lambda + (a+3)(a-2) \end{aligned}$$

Le cadidate radici, sono, per il Teorema delle radici, almeno $\{\pm 1, \pm(a+3), \pm(a-2)\}$, divisori del termine noto.

- $p_T(1) = 2a^2 + 2a - 4$
- $p_T(-1) = 0$

Quindi $\lambda_0 = -1$ è autovalore di $p_T(\lambda)$. Potrei continuare con le altre candidate radici, ma preferisco procedere con la formula. Per Ruffini, $p_T(\lambda)$ è divisibile per $\lambda + 1$. Infatti, operando la divisione, vediamo che

$$p_T(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 5\lambda + a^2 + a - 6)$$

Risolviamo $-\lambda^2 + 5\lambda + a^2 + a - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - (a^2 + a - 6) = 0$ con la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4(a^2+a-6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{4a^2+4a+1)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{(2a+1)^2}}{2} = \frac{5 \pm \mid 2a+1 \mid}{2} = \frac{5 \pm (2a+1)}{2}$$

Abbiamo quindi i tre autovalori

$$\lambda_0 = -1 \quad \lambda_1 = \frac{5 + (2a+1)}{2} = \frac{2a+6}{2} = a+3 \quad \lambda_1 = \frac{5-(2a+1)}{2} = \frac{-2a+4}{2} = 2-a$$

Esaminiamo le possibilità

- Un singolo autovalore di molteplicità algebrica 3. Avremmo

  $$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow -1 = a+3 = a-2 \Leftrightarrow a = -4 = 3$$

  Impossibile.

- Due autovalori distinti, con molteplicità algebrica 2 ed 1 rispettivamente. L'autovalore con moleplicità algebrica 1 ha forzatamente molteplicità geometrica 1, per l'altro va calcolata la molteplicità geometrica.

- $\lambda_0 = \lambda_1 \Leftrightarrow -1 = a+3 \Leftrightarrow a = -4$. Sostituiamo $\lambda = -1,\ a = -4$ nella matrice e calcoliamo la molteplicità geometrica

$$\begin{aligned} \mathrm{mg}(\lambda_0) &= 3 - rk \left.\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 3 & -\lambda & a \\ a & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right|_{\substack{\lambda=-1 \\ a=-4}} \\ &= 3 - rk \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3-2 = 1 \neq \mathrm{ma}(\lambda_0) = 2 \end{aligned}$$

  e quindi T non è diagonalizzabile.

- $\lambda_0 = \lambda_2 \Leftrightarrow -1 = 2-a \Leftrightarrow a = 3$. Sostituiamo $\lambda = -1,\ a = 3$ nella matrice e calcoliamo la molteplicità geometrica

$$\begin{aligned} \mathrm{mg}(\lambda_0) &= 3 - rk \left.\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 3 & -\lambda & a \\ a & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right|_{\substack{\lambda=-1 \\ a=3}} \\ &= 3 - rk \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3-1 = 2 = \mathrm{ma}(\lambda_0) \end{aligned}$$

  e quindi T è diagonalizzabile.

- $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow a+3 = 2-a \Leftrightarrow a = -1/2$ e $\lambda_{1,2} = 5/2$. Sostituiamo $\lambda = 5/2,\ a = -1/2$ nella matrice e calcoliamo la molteplicità geometrica

$$\begin{aligned} \mathrm{mg}(\lambda_0) &= 3 - rk \left.\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 3 & -\lambda & a \\ a & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right|_{\substack{\lambda=5/2 \\ a=-1/2}} \\ &= 3 - rk \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 3 & -5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= 3-2 = 1 \neq \mathrm{ma}(\lambda_0) = 2 \end{aligned}$$

  e quindi T non è diagonalizzabile.

• I tre autovalori sono distinti e quindi T è diagonalizzabile.

Riassumendo,

• T non è diagonalizzabile se $a = 3, -4$, diagonalizzabile altrimenti.

□