Capitolo 21

Ventunesima Lezione

Definizione 21.1. [JJJ65] *Data un applicazione* $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *con basi* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{K}^n$ *e* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{K}^m$ *Indicheremo spesso* M_F *come come* $(M_F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$, *per esplicitare il ruolo delle basi.*

21.1 Cambio di base per vettori

Definizione 21.2. [JJJ60] *Sia* V $\mathbb{K}$*-spazio, con* $\dim(V) = n$ *e*

$$\mathcal{B} = v_1, \ldots, v_n, \quad \mathcal{B}' = v'_1, \ldots, v'_n \ \textit{basi di } V$$

Se $\underline{w}_{\mathcal{B}}$ *e* $\underline{w}'_{\mathcal{B}}$ *sono le rappresentazioni del vettore* $\underline{w}$ *in base* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *rispettivamente (le coordinate del vettore rispetto alle basi* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$*),*

Il morfismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{K}^n, \mathcal{B} & \to & \mathbb{K}^n, \mathcal{B}' \\ & \underline{v}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \underline{v}_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

è il cambio di base da dalle coordinate $\mathcal{B}$ alle coordinate $\mathcal{B}'$, (da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in breve) *La matrice associata a* T *secondo le regole viste precedentemente ha le colonne date dalla trasformazione dei vettori di una base di* $\mathbb{K}^n$, *scegliamo la base* $\mathcal{B}$ *, e quindi la matrice è*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ (\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} & \cdots & (\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad \textit{ed abbiamo} \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot \underline{w}_{\mathcal{B}} = \underline{w}'_{\mathcal{B}}$$

Diciamo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ *è la* matrice di cambio di base dalle coordinate $\mathcal{B}$ alle coordinate $\mathcal{B}'$ (da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in breve). *Il morfismo* T *si indica come* $L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}$ *Dato che* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *sono basi,* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ *è non singolare e* $L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}$ *è un isomorfismo.*

Osservazione 21.3. [JJJ62] *È immediato che*

$$L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}} \circ L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}} = \mathrm{id} = L_{I_n} \ \textit{e quindi } M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = I_n$$

Nel linguaggio delle applicazioni lineari, l'applicazione $L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}$ cambia le coordinate dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$, ed è associata alla matrice $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$, le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}'$ espressi in base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{cccc} L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}\colon & (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) & \to & (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}') \\ & v & \mapsto & L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}(v) \end{array}$$

Esempio 21.4. [JJJ63] *Data la base* $\mathcal{B} = \underline{v}_1 = (1,1), \underline{v}_2 = (0,1)$ *di* $\mathbb{R}^2$ *ed i vettori*

$$\underline{v} = (3,5)_{E_2} = 3\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2 \quad e \quad \underline{w} = (2,7)_B = 3\underline{w}_1 + 5\underline{w}_2$$

voglio determinare $M^{\mathcal{B}}_{E_2}$, $M^{E_2}_{\mathcal{B}}$, $\underline{v}_{\mathcal{B}}$, $\underline{w}_{E_2}$.

Soluzione. La matrice $M^{\mathcal{B}}_{E_2}$ ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ espressi in coordinate E_2, quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\underline{w}_{E_2} = M^{\mathcal{B}}_{E_2}\underline{w}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}_{E_2}$$

Abbiamo che

$$M^{E_2}_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{E_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_{\mathcal{B}} = M^{E_2}_{\mathcal{B}}\underline{v}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{E_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Notiamo che

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{v}_1 \\ \underline{e}_2 = \underline{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ \underline{e}_2 = \underline{v}_2 \end{cases}$$

da cui potremmo ricavare la matrice $M^{E_2}_{\mathcal{B}}$ senza invertire esplicitamente $M^{\mathcal{B}}_{E_2}$. Ma in effetti, se consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{v}_1 \\ \underline{e}_2 = \underline{v}_2 \end{cases}$$

nella sua forma matriciale, con incognite $\underline{e}$ e parametri $\underline{v}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Esempio 21.5. [JJJ41] *Date le due basi* E_2 *e* $B = \underline{v}_1 = (1,0), \underline{v}_2 = (1,1)$ *di* $\mathbb{R}^2$ *l'applicazione*

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \underline{v}_E &\mapsto \underline{v}_B \end{aligned}$$

che trasforma un vettore $\underline{v}$ espresso in coordinate E_2 nel vettore $\underline{v}$ espresso in coordinate B (se preferite, le coordinate del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base E nelle cordinate del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base B) è come visto prima un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi. Dalla definizione di B abbiamo che

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \underline{e}_1 \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{v}_1 \\ \underline{e}_2 = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \end{cases}$$

Quindi $(1,0)_E = (1,0)_B$ e $(0,1)_E = (-1,1)_B$. Se vogliamo scrivere il vettore $(1,2)_E$ in coordinate B abbiamo

$$(1,2)_E = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 = \underline{v}_1 +_2 (-\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 = (-1,2)_B$$

$$F((1,2)) = (-1,2)$$

In generale, abbiamo che T è definita come

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & (1,0) \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & (-1,1) \end{array}$$

e quindi la sua formula è

$$T((x,y)) = T(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2) = xT(\underline{e}_1) + yT(\underline{e}_2) = x(1,0)_B + y(-1,1)_B = (x-y,y)_B = (x-y,y)$$

21.2 Cambio di base per morfismi

Osservazione 21.6. `[JJJ61]` *Siano*

$$\mathcal{B} = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \text{ base di } \mathbb{K}^n, \qquad \mathcal{C} = \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m, \text{ base di } \mathbb{K}^m$$

$$\begin{array}{rccc} T\colon & (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) & \to & (\mathbb{K}^m, \mathcal{C}) \\ & \underline{v}_B & \mapsto & (T(\underline{v}_B))_{\mathcal{C}} \end{array}$$

un morfismo di $\mathbb{K}$-spazi che trasforma un vettore di $\mathbb{K}^n$ espresso in coordinate $\mathcal{B}$ in un vettore di $\mathbb{K}^m$ espresso in coordinate $\mathcal{C}$.

1. *Indichiamo la matrice associata a T dalle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ come*

   $$(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ T(\underline{v}_1)_{\mathcal{C}} & \cdots & T(\underline{v}_n)_{\mathcal{C}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

   la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $T(\underline{v}_i)$ in base $\mathcal{C}$. Omettiamo il riferimento alla base in cui sono espressi i vettori $\underline{v}_i$ nella matrice perchè irrilevante, le colonne dipendono dall'immagine dei vettori in base $\mathcal{C}$, non dalla base in cui sono espressi i vettori. La dipendenza da $\mathcal{B}$ è data dalla scelta dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$.

   Diciamo che $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ è la matrice associata al morfismo rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

2. *Abbiamo*

   $$(M_T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

3. *Avendo le basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{K}^m$ la matrice associata al morfismo varia secondo la formula*

   $$(M_T)^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \cdot (M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$$

Esempio 21.7. [JJJ73] *Dato il morfismo di $\mathbb{R}$-spazi*

$$\begin{array}{cccc} F\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (1,2,3) & \mapsto & (1,1,0,1) \\ & (1,1,1) & \mapsto & (3,0,0,1) \\ & (0,0,1) & \mapsto & (1,2,0,0) \end{array}$$

e sapendo che $\mathcal{B} = (1,2,3),(1,1,1),(0,0,1)$ è base di $\mathbb{R}^3$, come è facile verificare, voglio determinare le matrici $(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}}$ e $(M_F)_{E_4}^{E_3}$.

Soluzione: La prima matrice è immediata: le sue colonne sono i vettori immagine dei vettori di $\mathcal{B}$ in base E_4, che abbiamo:

$$(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare $(M_F)_{E_4}^{E_3}$ da $(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}}$ usiamo la formula

$$(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{E_3} = (M_F)_{E_4}^{E_3}$$

$$(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}} \cdot \left(M_{E_3}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = (M_F)_{E_4}^{E_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (M_F)_{E_4}^{E_3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (M_F)_{E_4}^{E_3}$$

□

Osservazione 21.8. [LLZ08] *Notiamo che le coordinate in base B dei vettori di una base B di $\mathbb{K}^n$ sono i vettori canonici e quindi*

$$M_B^B = I_n$$

Esempio 21.9. [LLZ09] *Determinare $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ morfismo che realizza la rotazione di angolo θ in senso antiorario dei punti di $\mathbb{R}^2$.*

Dimostrazione. È chiaro che R_θ è un morfismo. Vediamo di trovare la matrice associata a R_θ. Vediamo come viene trasformata la base canonica

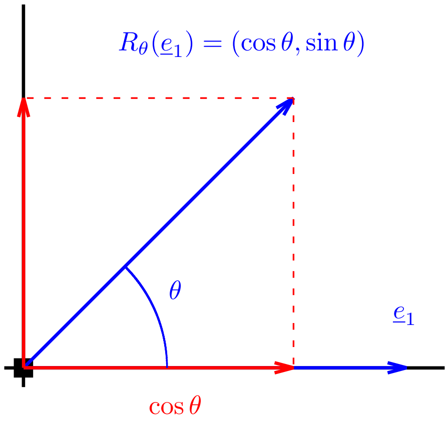
$$\underline{e}_1 = (1,0) \overset{R_\theta}{\mapsto} (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \underline{e}_2 = (0,1) \overset{R_\theta}{\mapsto} (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Quindi

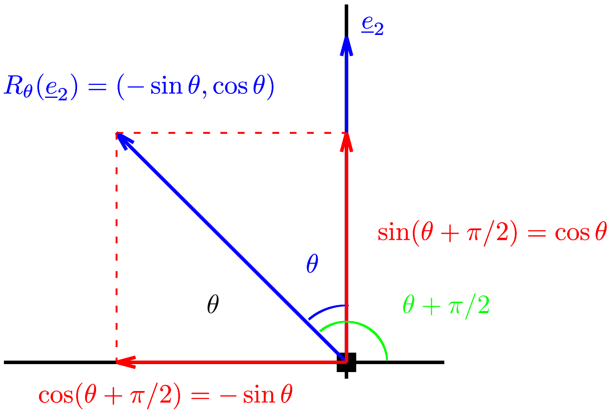
$$(M_{R_\theta})_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R_\theta((x,y)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

□

GNU8: Trasformazione di $\underline{e}_1$



GNU9: Trasformazione di $\underline{e}_2$



21.3 Esercizi svolti

Esempio 21.10. `[JJJ64]` *Data la base* $\mathcal{B} = (1,1,1), (0,1,-2), (1,2,0)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *ed i vettori*

$$\underline{v} = (0,1,3)_{E_3} \quad e \quad \underline{w} = (1,0,2)_B$$

voglio determinare $M^{\mathcal{B}}_{E_3}$, $M^{E_3}_{\mathcal{B}}$, $\underline{v}_B$, $\underline{w}_{E_3}$.

Soluzione. La matrice $M^{\mathcal{B}}_{E_3}$ ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ espressi in coordinate E_3, quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\underline{w}_{E_3} = M^{\mathcal{B}}_{E_3}\underline{w}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{E_3}$$

Abbiamo che

$$M^{E_3}_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{E_3}\right)^{-1}$$

E quindi

```
MBE:=Mat([[1,0,1],
          [1,1,2],
          [1,-2,0]]);

MEB:=Inverse(MBE);

MEB;
Mat[[4, -2, -1],
    [2, -1, -1],
    [-3, 2, 1]];
```

$$\underline{v}_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{E_3} \cdot \underline{v}_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{E_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

□

Esercizio 21.11. `[LL91]` *Al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sia data una funzione con le seguenti caratteristiche*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{Q}^3 & \longrightarrow & \mathbb{Q}^3 \\ & \underline{v}_1 = (1,2,3) & \mapsto & (1,2,0) \\ & \underline{v}_2 = (0,1,2) & \mapsto & (1,1,0) \\ & \underline{v}_3 = (2,1,0) & \mapsto & (a,b,c) \end{array}$$

1. *Esistono a, b, c tali che T sia lineare?*
2. *Al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$ determinare tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni di cui sopra.*
3. *Al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$ determinare il rango di tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni di cui sopra.*

Soluzione.

1. Esistono a, b, c tali che T sia lineare?

   Dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ i tre vettori $(1,2,3), (0,1,2), (2,1,0)$ non sono linearmente indipendenti. Cerchiamo una combinazione lineare dei primi due che mi dia il terzo, che deve esistere perchè i primi due sono chiaramente linearmente indipendenti.

$$\alpha(1,2,3) + \beta(0,1,2) = (2,1,0)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

   Quindi

$$(2,1,0) = 2(1,2,3) - 3(0,1,2)$$

   Per avere la linearità dobbiamo imporre

$$\begin{aligned} T((2,1,0)) &= T(2(1,2,3) - 3(0,1,2)) \\ (a,b,c) &= 2T((1,2,3)) - 3T((0,1,2)) \\ (a,b,c) &= 2(1,2,0) - 3(1,1,0) \\ (a,b,c) &= (-1,1,0) \end{aligned}$$

   Quindi un'appliczione T che soddisfi le tre condizioni di cui sopra può essere lineare se e solo se $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$.

2. Determinare tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni di cui sopra.

   Dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti ma non formano una base di $\mathbb{Q}^3$, possiamo completarli a base con un vettore $\underline{v} = (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$. Imponiamo le condizioni su $\underline{v}$ perchè $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}$ siano linearmente indipendenti, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \neq 0$$
$$x - 2y + z \neq 0$$

   Quindi ogni vettore (x, y, z) che soddisfi la condizione $x - 2y + z \neq 0$ completa $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ a base di $\mathbb{Q}^3$. L'applicazione T, definita univocamente sulla base $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, (x, y, z)$ è associata mediante B, E_3 alla matrice

$$(M_T)^B_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   dove $T(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ arbitrari.

3. Determinare il rango di tali applicazioni.

   Basta calcolare il rango di una matrice associata all'applicazione mediante due basi. Dato che per costruzione conosciamo già $(M_T)^B_{E_3}$, calcoliamo il rango di quest'ultima, al variare di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \gamma(1 - 2) = -\gamma$$

   Quindi

   - Se $\gamma \neq 0$ il rango è 3 per ogni α, β.
   - Se $\gamma = 0$ il determinante della matrice è nullo e la matrice diviene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     che dato che la sottomatrice $A_{(1,2);(1,2)}$ è non singolare ha rango 2 per ogni α, β.

□

Esercizio 21.12. [LL87]
Determinare un applicazione lineare di $\mathbb{C}$ spazi

$$\phi : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5$$

tale che

- $\phi((1, 2, 2, 0, 1)) = \phi((1, 3, -1, 2, 0)) = \phi((1, 0, 8, -4, 3)) = \underline{0}$.
- $\dim \mathrm{Im}(\phi) = 2$.

- $\dim(\mathrm{Im}(\phi) \cap \mathrm{Span}((1,2,0,1,0),(2,1,1,0,1))) = 1$.

Soluzione.

1. Vogliamo determinare innanzitutto una base di $\mathbb{C}^5$ che contenga, se possibile, i tre vettori

$$\underline{v}_1 = (1,2,2,0,1),\ \underline{v}_2 = (1,3,-1,2,0),\ \underline{v}_3 = (1,0,8,-4,3)$$

Vediamo se questi sono linearmente indipendenti determinando il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con alcuni passi di Gauss

$$\begin{array}{c} \\ 2^a \to 2^a - 1^a \\ 3^a \to 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Da questa riduzione è evidente che la terza riga è multipla della seconda, e quindi v_3 è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. Questi ultimi due sono linearmente indipendenti, dato che ciascuno ha un pivot non nullo.

Una candidata base di $\mathbb{C}^5$ è pertanto $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5$. Che B sia base è facile da vedere, dato che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è massimo, 5. Una applicazione candidata è

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & \mathbb{C}^5 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & 0 \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & 0 \\ & \underline{e}_3 & \mapsto & 0 \\ & \underline{e}_4 & \mapsto & \underline{w} = (1,2,0,1,0) \\ & \underline{e}_5 & \mapsto & \underline{e}_1 \end{array}$$

Abbiamo che $\phi(\underline{v}_1) = \phi(\underline{v}_2) = 0$ e dato che $\underline{v}_3$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, si ha $\phi(\underline{v}_3) = \underline{0}$.

Dato che $\underline{w}, \underline{e}_1$ sono linearmente indipendenti,

$$\mathrm{Im}(\phi) = Span(\underline{w}, \underline{e}_1) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(\phi) = 2$$

Sia $W = \mathrm{Span}((1,2,0,1,0),(2,1,1,0,1))$.

Dato che $\underline{w} \in \mathrm{Im}(\phi)$ e $\underline{w} \in W$, abbiamo che $\dim(\mathrm{Im}(\phi) \cap W) \geq 1$.

Se $\underline{e}_1 \notin W$ e quindi $\mathrm{Im}(\phi) \neq W$ abbiamo che $\dim(\mathrm{Im}(\phi) \cap W) < 2$ Da questi due fatti si ha che

$$\dim(\mathrm{Im}(\phi) \cap W) = 1$$

verifichiamo che $\underline{e}_1 \notin W$ verificando che il sistema

$$x(1,2,0,1,0)+y(2,1,1,0,1)=(x+2y,2x+y,y,x,y)=(1,0,0,0,0)$$

è impossibile, immediato dato che abbiamo $x=y=0$ e $x+2y=1$.

L'applicazione candidata soddisfa quindi le condizioni.

□

Esercizio 21.13. `[UI20]` *Sia* $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ *un morfismo di* $\mathbb{R}$*-spazi tale che*

$$\begin{aligned} T(\underline{e}_1)-T(\underline{e}_2) &= -x^3+ix+i \\ 2T(\underline{e}_1)+T(\underline{e}_2) &= x^3+3x^2+2ix-i \\ \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T &= 2 \end{aligned}$$

1. *Determinare* $(M_T)^B_{B'}$, *dove* B, B' *sono basi a piacere*
2. *È vero che* $\operatorname{Im} T \oplus_{\mathbb{R}} \operatorname{Span}(1,x,x^2,x^3,i,ix)=\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$*?*

Soluzione. Risolviamo il sistema lineare a variabili $T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2))$

$$\begin{cases} T(\underline{e}_1)-T(\underline{e}_2) &= -x^3+ix+i \\ 2T(\underline{e}_1)+T(\underline{e}_2) &= x^3+3x^2+2ix-i \end{cases}$$

e troviamo

$$T(\underline{e}_1)=x^2+ix \quad \text{e} \quad T(\underline{e}_2)=x^3+x^2-i$$

È immediato che questi due vettori sono indipendenti nell' $\mathbb{R}$-spazio $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$. Dato che $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2$, possiamo assegnare $T(\underline{e}_3)=T(\underline{e}_4)=\underline{0}$ e il nostro morfismo candidato è

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & x^2+ix \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & x^3+x^2-i \\ & \underline{e}_3 & \mapsto & \underline{0} \\ & \underline{e}_4 & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

- Prendiamo come base $B=E_4$ e come base $B'=(1,x,x^2,x^3,i,ix,ix^2,ix^3)$ (ricordiamo che $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ viene visto come $\mathbb{R}$-spazio). Allora

$$(M_T)^B_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dato che $T(\underline{e}_2)=x^3+x^2-i \in \operatorname{Span}(1,x,x^2,x^3,i,ix)$, abbiamo che

$$\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Span}(1,x,x^2,x^3,i,ix) \neq \{\underline{0}\}$$

e quindi la somma $\operatorname{Im} T +_{\mathbb{R}} \operatorname{Span}(1,x,x^2,x^3,i,ix)$ non è diretta.

□

Esercizio 21.14. `[UI10]` *Al variare di* $\underline{v} \in \mathbb{Q}^4$ *sia* $T : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{Q}^4$ *un'applicazione lineare tale che*

$$T(2x-1) = T(x^2), \quad T(x+1) = 2T(x^2), \quad T(x^2-2x) = \underline{v}$$

- *T è iniettiva, surgettiva?*
- *Determinare il rango di T.*
- *Scegliere due basi B, B' di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ e $\mathbb{Q}^4$ rispettivamente e determinare $(M_T)^B_{B'}$*

Soluzione. I vettori $1, x, x^2$ formano una base di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$. Determiniamo le loro immagini mediante T risolvendo il sistema di equazioni lineari rispetto alle variabili $T(1), T(x), T(x^2)$

$$\begin{cases} T(2x-1) = T(x^2) \\ T(x+1) = 2T(x^2) \\ T(x^2-2x) = \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} 2T(x) - T(1) = T(x^2) \\ T(x) + T(1) = 2T(x^2) \\ T(x^2) - 2T(x) = \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} 2T(x) - T(1) = 2T(x) + \underline{v} \\ T(x) + T(1) = 4T(x) + 2\underline{v} \\ T(x^2) = 2T(x) + \underline{v} \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} T(1) = -\underline{v} \\ -3T(x) = 3\underline{v} \\ T(x^2) = 2T(x) + \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} T(1) = -\underline{v} \\ T(x) = -\underline{v} \\ T(x^2) = 2T(x) + \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} T(1) = -\underline{v} \\ T(x) = -\underline{v} \\ T(x^2) = \underline{v} \end{cases}$$

Dividiamo i due casi $\underline{v} = \underline{0}$ e $\underline{v} \neq \underline{0}$

- $\underline{v} = \underline{0}$. Alora T è l'applicazione nulla, non è iniettiva o surgettiva, ha rango 0 e per ogni due basi B, B' di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}, \mathbb{Q}^4$ rispettivamente $(M_T)^B_{B'} = 0$
- $\underline{v} \neq \underline{0}$. Allora, dato che $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(\underline{v})$, abbiamo che $rk\, T = 1$, e T non è iniettiva o surgettiva. Se scegliamo
$$B = 1, x, x^2 \quad B' = \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$$
dove $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono un completamento di $\underline{v}$ a base di $\mathbb{Q}^4$ (esistono per il teorema del completamento), abbiamo che
$$(M_T)^B_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 21.15. `[ES2122B]` *Data la funzione*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (xyz) & \mapsto & (x+y-2zx-2y+z-2x+y+z) \end{array}$$

1. *Dimostrare che f è lineare e determinare $(M_f)^{E_3}_{E_3}$.*
2. *Dire se f è iniettiva o surgettiva.*
3. *Determinare basi di* $\ker f$ *e* $\mathrm{Im}\, f$
4. *Data la base $\mathcal{B} = (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$, determinare $(M_f)^{\mathcal{B}}_{E_3}$.*
5. *Stabilire per quali di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2)$ appartiene a* $\mathrm{Im}\, f$.

Soluzione.

1. Dato che le componenti del vettore immagine $(x+y-2z, x-2y+z, -2x+y+z)$ sono polinomi omogenei di grado 1, f è lineare. Abbiamo
$$f(\underline{e}_1) = (1,1,-2), \quad f(\underline{e}_2) = (1,-2,1), \quad f(\underline{e}_3) = (-2,1,1),$$
e quindi
$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo il determinante di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
Quindi f non è iniettiva, quindi $\dim \ker f \geq 1$. Per il teorema della dimensione, $\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \ker f$ e dato che $\dim \ker f \geq 1$ abbiamo $dim \operatorname{Im} f \leq 2$, quindi f non è surgettiva.

3. Per determinare $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x,y,z)) = \underline{0}\}$ risolviamo il sistema
$$f\,(xyz) = \underline{0} \Leftrightarrow (x+y-2z = 0, x-2y+z = 0, -2x+y+z = 0)$$

```
M:=Mat[[1, 1, -2],
       [1, -2, 1],
       [-2, 1, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2]
     2^a-1*1^a [0, -3, 3]
     3^a+2*1^a [0, 3, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2]
-------------- [0, -3, 3]
     3^a+1*2^a [0, 0, 0]
Mettiamo la matrice in forma standard
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -2]
     2^a*-1/3  [0, 1, -1]
-------------- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
   1^a-1*2^a   [1, 0, -1]
-------------- [0, 1, -1]
-------------- [0, 0,  0]
```

Abbiamo quindi le relazioni
$$x = z, \qquad y = z$$

Imponendo queste relazioni sul vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ otteniamo un vettore generico delle soluzioni $(\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1, 1, 1)$. Quindi $(1, 1, 1)$ è una base di $\ker f$.

Sappiamo che $\operatorname{Im} f$ è generato delle colonne di

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Guardando le colonne della riduzione in forma triangolare superiore di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che solo le prime due colonne hanno un pivot, e quindi solo le due prime colonne della matrice $(M_f)_{E_3}^{E_3}$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\operatorname{Im} f$ è quindi $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$.

4. Abbiamo $\mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned}(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}} &= (M_f)_{E_3}^{E_3} \cdot M_{E_3}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notiamo che per le proprietà del prodotto di matrici per avere $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$ basta scambiare opportunamente le colonne di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.

5. Dato che una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$, per trovare i k per cui $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2) \in \operatorname{Im} f$ basta trovare i k per cui $\underline{v}$ è linearmente dipendente da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$. Mettiamo questi tre vettori per riga in una matrice, $\underline{v}$ come ultima riga, riduciamo con Gauss e vediamo per quali k l'ultima riga della riduzione è nulla

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[1,-2,1],
        [1,1,-2],
        [1,k+1,k^2-2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -2, 1]
     2^a-1*1^a [0, 3, -3]
     3^a-1*1^a [0, k + 3, k^2 - 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------   [1, -2,       1]
--------------   [0,  3,      -3]
3^a-1/3k - 1*2^a [0,  0, k^2 + k]
```

Perche' la terza riga sia nulla è necessario e sufficente avere $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k \in \{0, -1\}$, quindi $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$ se e solo se $k \in \{0, -1\}$.

$\square$

Esercizio 21.16. `[ES2122A]`

1. *Dimostrare che esiste un $\mathbb{K}$-endmorfismo T che soddisfa le condizioni*

$$\begin{array}{rrcc} T\colon & \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K}^4 \\ & \underline{v}_1 = (1,2,3,1) & \mapsto & (2,4,4,4) \\ & \underline{v}_2 = (1,1,1,1) & \mapsto & (3,6,6,6) \\ & \underline{v}_3 = (1,2,2,2) & \mapsto & (1,2,3,3) \\ & \underline{v}_4 = (1,2,3,3) & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

2. *Determinare* $(T \circ T)((1,2,3,1)), (T \circ T \circ T)((1,2,3,1))$.
3. *Determinare una base di* $\operatorname{Im} T$.
4. *Scegliere una* **opportuna** *base B di $\mathbb{K}^4$ e determinare* $(M_T)_B^B$.
5. *Determinare* $\left((M_T)_B^B\right)^3$.

Soluzione.

1. Dimostrare che esiste un $\mathbb{K}$ endmorfismo T che soddisfa le condizioni. Si vede facilmente che la matrice che ha i quattro vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_4$ come righe è non singolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
M:=Mat([[1,1,1,1],
        [1,2,3,1],
        [1,2,2,2],
        [1,2,3,3]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1]
     2^a-1*1^a [0, 1, 2, 0]
     3^a-1*1^a [0, 1, 1, 1]
     4^a-1*1^a [0, 1, 2, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1,  1, 1]
-------------- [0, 1,  2, 0]
     3^a-1*2^a [0, 0, -1, 1]
     4^a-1*2^a [0, 0,  0, 2]
```

E quindi il determinante è -2, i quattro vettori f formano una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi, per la Proposizione 19.31, esiste unico un endomorfismo T che soddisfa le condizioni.

2. Determinare $(T \circ T)((1,2,3,1)), (T \circ T \circ T)((1,2,3,1))$.

   Ricordiamo la definizione di T

$$\begin{array}{rrcc} T\colon & \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K}^4 \\ & \underline{v}_1 = (1,2,3,1) & \mapsto & (2,4,4,4) \\ & \underline{v}_2 = (1,1,1,1) & \mapsto & (3,6,6,6) \\ & \underline{v}_3 = (1,2,2,2) & \mapsto & (1,2,3,3) \\ & \underline{v}_4 = (1,2,3,3) & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

   e quindi

$$T(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_3, \quad T(\underline{v}_2) = 3\underline{v}_3, \quad T(\underline{v}_3) = \underline{v}_4, \quad T(\underline{v}_4) = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} (T \circ T)((\underline{v}_1)) &= T^2(\underline{v}_1) = T(T(\underline{v}_1)) = T(2\underline{v}_3) = 2T(\underline{v}_3) = 2\underline{v}_4 \\ (T \circ T \circ T)(\underline{v}_1) &= T(T^2((\underline{v}_1)) = T(2\underline{v}_4) = \underline{0} \end{aligned}$$

3. Per il punto precedente, abbiamo che $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$. Dato che $\underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono parte di una base di $\mathbb{R}^4$, sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\operatorname{Im} T$.

4. Scegliamo come base di $\mathbb{R}^4$ $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$. Abbiamo quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \left((M_T)_B^B\right)^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Esercizio 21.17. `[FF08]` *Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{K}^3$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$*

$$\begin{array}{llcl} T\colon & \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^3 \\ & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ & a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2 & \mapsto & a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2 \\ & a\underline{v}_3 & \mapsto & \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \end{array}$$

Tra gli a per cui l'endomorfismo sia completamente determinato, determinare gli a per cui T sia isomorfismo.

Soluzione. Perchè l'endomorfismo sia completamente determinato bisogna che i tre vettori $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2, a\underline{v}_3$ formino una base di $\mathbb{R}^3$, ovvero che (esprimendoli nelle coordinate della base $B_1 = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$) si abbia, mettendo tali vettori per riga

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \neq 0$$

Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a(a^2 + a) = a^2(a+1)$$

l'endomorfismo è completamente determinato se e solo se $a \neq 0, -1$. Supporremo d'ora in poi che $a \neq 0, -1$.

L'endomorfismo T è un isomorfismo se la dimensione dell'immagine è massima, ovvero 3, ovvero se i tre vettori (in coordinate B_1) $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti ovvero quando, mettendo tali vettori per riga,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 + a = a(a+1)$$

nelle nostre ipotesi l'endomorfismo è un isomorfismo per ogni valore di $a \neq 0, -1$

Riassumendo, T è ben definito e isomorfismo se $a \neq 0, -1$.

□

Esempio 21.18. `[HHA10]` *Sia* $V = \{(a+b, b, c, a-c, a) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$ *un sottospazio di* $\mathbb{K}^4$. *Questa è una* descrizione parametrica *di* V. *Il* vettore generico di V *è*

$$(a+b, b, c, a-c, a)$$

Ogni vettore di V *si può scrivere in questa forma per opportuni* a, b, c, *quindi un sistema di generatori di* V *è immediato:*

$$(a+b, b, c, a-c, a) = a(1,0,1,1) + b(1,1,0,0) + c(0,1,-1,0)$$

Dato che ogni vettore di V *si può scrivere in questa forma per opportuni* a, b, c, *i tre vettori*

$$(1,0,1,1), (1,1,0,0), (0,1,-1,0)$$

generano V *e*

$$V = \mathrm{Span}((1,0,1,1), (1,1,0,0), (0,1,-1,0))$$

Per determinare una base di V *dobbiamo estrarre dai suoi generatori un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti. Procediamo mediante il metodo del rango. Calcoliamo il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si vede facilmente che la sottomatrice

$$A_{(1,2,3),(1,2,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, quindi $rk(A) = 3$, quindi le tre righe di A sono linearmente indipendenti e quindi

$$(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0)$$

formano una base di V

Può capitare che dal vettore generico non si trovi immediatamente la base:

Esempio 21.19. [HHA12] *Sia $V = \{(a + b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{K}\}$ un sottospazio di $\mathbb{K}^2$ in forma parametrica. Il* vettore generico di V *è*

$$(a + b, a + b)$$

Vogliamo una base di V. Abbiamo che

$$(a + b, a + b) = a(1, 1) + b(1, 1)$$

I due vettori

$$(1, 1,), (1, 1)$$

generano V ma non sono linearmente indipendenti e quindi non formano una base di

$$V = \mathrm{Span}((1, 1), (1, 1))$$

Una base di V è data da $(1, 1)$

Esempio 21.20. [HHA17] *Sia*

$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y - z = 0\right\} = \mathrm{Sol}\left((1, -1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0}\right)$$
$$= \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

una descrizione cartesiana di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^4$. Vogliamo determinare una base di V. Notiamo che il sistema di equazioni che definisce V ci dà le relazioni tra le componenti del vettore generico.

Innanzitutto, che $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$ è immediato dato che $V = \mathrm{Sol}(Ax = \underline{0})$. Per trovare il vettore generico di V, da cui ricaveremo una base, troviamo la soluzione generica di $\mathrm{Sol}(Ax = \underline{0})$.

Un vettore generico di $\mathbb{R}^4$ è (x, y, z, t). Per determinare un vettore generico di V imponiamo a (x, y, z, t) la condizione di appartenenza a V,

$$x - y - z = 0 \Leftrightarrow x = y + z$$

ottenendo

$$(y + z, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

un vettore generico di V. Possiamo quindi scrivere V in forma parametrica

$$V = \{(y + z, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{K}\} = \{(a + b, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

Volendo una base, I vettori

$$(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$$

generano quindi V e dato che la matrice che li ha per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, come si vede immediatamente, questi tre vettori formano una base di V.

Esempio 21.21. `[HHA33]` *La forma cartesiana può essere utile :*

1. *Dato* $W = \operatorname{Span}((2,0,2),(0,0,1),(1,0,0))$
   notiamo che tutti i generatori di W hanno la terza componente nulla. Quindi tutti i vettori di W devono avere la stessa proprietà e
   $$W \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z = 0\} = V$$
   e dato che $\dim V = 3$ *(base $\underline{e}_1, \underline{e}_2$) abbiamo che* $\dim W \leq 2$. *Dato che i primi due generatori di V sono indipendenti,* $\dim V \geq 2$. *Quindi* $\dim W = 2$ *ed una base è data dai primi due generatori.*

2. *Dato* $W = \operatorname{Span}((1,2,0,2),(2,0,0,4),(3,1,0,6))$
   notiamo che tutti i generatori di W hanno la quarta componente uguale al doppio della prima e la terza componente nulla. Quindi tutti i vettori di W devono avere le stessa proprietà e
   $$W \subseteq \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ \begin{cases} z = 0 \\ t = 2x \end{cases} \right\} = V$$
   e dato che $\dim V = 2$ *(* $\dim = \#$*variabili*$-\#$*condizioni indipendenti* $= 4-2 = 2$*) abbiamo che* $\dim W \leq 2$.

Esempio 21.22. `[HHA14]` *Vogliamo passare il sottospazio*
$$V = \{(a+b, b+c, a-c, a) \ \mid \ a,b,c \in \mathbb{K}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$$
dell'esercizio precedente in forma cartesiana. Vogliamo cioè trovare le relazioni tra le componenti del vettore generico di V. Assegnamo una variabile a ciascuna componente
$$x = a+b, \ y = b+c, \ z = a-c, \ t = a$$
e troviamo le relazioni tra le variabili. Questo si ottiene risolvendo rispetto alle variabili a,b,c,d (e considerando x,y,z come parametri) il sistema
$$\begin{cases} a+b = x \\ b+c = y \\ a-c = z \\ a = t \end{cases}$$
ovvero, scrivendo la matrice completa B, riducendo

```
Use R::=Q[x,y,z,t];
B:=Mat[[1, 1,0,x],
       [0, 1, 1,y],
       [1,0,-1,z],
       [1,0,0,t]];
L:=RiduciScalaVerbose(B);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 0, x]
  0 sotto pivot[0, 1, 1, y]
     3^a-1*1^a [0, -1, -1, -x + z]
     4^a-1*1^a [0, -1, 0, -x + t]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 0,          x]
-------------- [0, 1, 1,          y]
     3^a+1*2^a [0, 0, 0, -x + y + z]
     4^a+1*2^a [0, 0, 1, -x + y + t]
```

È evidente da questa riduzione, senza bisogno di fare l'ultimo scambio di righe, che la relazione cercata tra i parametri x, y, z, t è data dalla terza riga

$$[0, 0, 0, -x + y + z]$$

che ci dice che $-x + y + z$ dà $\underline{0}$, ovvero che la somma dell'opposto della prima componente e della seconda e terza deve fare zero perchè il vettore appartenga a V. Dato che questa è l'unica riga con zero le prime tre componenti, in una matrice ridotta, questa, $-x+y+z = 0 \Leftrightarrow x = y+z$, è l'unica relazione tra le componenti. Quindi

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y - z = 0\}$$

Esempio 21.23. `[LLZ01]` *Sia $B = \underline{v}_1 = (1, 3), \underline{v}_2 = (2, 4)$ base di $\mathbb{R}^2$, calcolare le coordinate in base B dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$.*

Dimostrazione. In base B abbiamo $\underline{v}_1 = 1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 = (1, 0)_B$ e analogamente $\underline{v}_2 = (0, 1)_B$.

Per trovare le coordinate in base B dei vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ costruiamoci la matrice M_B^E. Abbiamo la matrice M_E^B, le cui colonne sono le coordinate in base E di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ rispettivamente. Sappiamo che

$$M_B^E = \left(M_E^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
(\underline{e}_1)_B &= M_B^E \cdot (\underline{e}_1)_E \\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\
&= -2\underline{v}_1 + 3/2\underline{v}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{e}_2)_B &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \underline{v}_1 - 1/2\underline{v}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2)_B &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 7/2 \end{pmatrix} \\
&= -4\underline{v}_1 + 7/2\underline{v}_2
\end{aligned}$$

□

Esempio 21.24. `[LLZ02]` *Sia $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$, una base di $\mathbb{R}^3$ e*

$$\begin{array}{rccc}
T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\
& \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 & \mapsto & (0, 2, 3) \\
& \underline{v}_2 + \underline{v}_3 & \mapsto & (0, 0, 1) \\
& \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto & (0, 2, 1)
\end{array}$$

morfismo dato per linearità.

1. *Determinare dimensioni e basi di* $\operatorname{Im} T$ *e* $\ker T$.
2. *Se* $\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$, $\underline{v}_2 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$, $\underline{v}_3 = \underline{e}_1 - 3\underline{e}_3$
   (a) *Determinare* $(M_T)_{E_3}^{E_3}$.
   (b) *Determinare* $(M_T)_B^B$.

Dimostrazione. I tre vettori $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3$, $\underline{w}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$, $\underline{w}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti perchè, se mettiamo le loro coordinate per riga in base B nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Un passo Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ non singolare}$$

Quindi $B' = \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato che si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 3. Scriviamo la matrice associata a T rispetto alle basi B', E_3.

$$(M_T)_{E_3}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che non è specificato in quali coordinate vogliamo le basi, prenderemo quelle che ci verranno più comode.

1. Il rango della matrice $(M_T)_{E_3}^{B'}$ è 2, quindi $rk\,T = 2$. Per il teorema della dimensione,

$$\dim\ker T = 3 - rk\,T = 3 - 2 = 1$$

Una base di $\operatorname{Im} T$ è data da due vettori linearmente indipendenti tra $(0, 2, 3)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 2, 1)$, quindi per esempio $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$, in coordinate E_3. Per trovare una base di $\ker T$ *in coordinate* B' dobbiamo risolvere il sistema

$$(M_T)_{E_3}^{B'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \text{ ovvero } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Riduciamo con Gauss dopo aver riordinato le righe

```
M:=Mat([[2,0,2],
        [3,1,1],
        [0,0,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 0, 2]
   2^a-3/2*1^a [0, 1, -2]
  0 sotto pivot[0, 0, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 0,  2]
-------------- [0, 1, -2]
  0 sotto pivot[0, 0,  0]
```

Quindi le soluzioni sono $y = 2z$ e $x = -z$. Sosituiamole nel vettore generico di (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per avere il vettore generico $(-z, 2z, z)$ delle soluzioni. Una base delle soluzioni, vale a dire di $\ker T$, è quindi $(-1, 2, 1)_{B'}$.

2. Abbiamo $\underline{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\underline{v}_3 = (1, 0, -3)$ e quindi

$$\begin{aligned} \underline{w}_1 &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = (1, 1, 1) + (1, 0, 2) - (1, 0, -3) = (1, 1, 6) \\ \underline{w}_2 &= \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = (1, 0, 2) + (1, 0, -3) = (2, 0, -1) \\ \underline{w}_3 &= \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = (1, 1, 1) - (1, 0, 2) = (0, 1, -1) \end{aligned}$$

(a) Vogliamo $(M_T)_{E_3}^{E_3}$. Dato che abbiamo $(M_T)_{E_3}^{B'}$ usiamo la formula

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = (M_T)_{E_3}^{B'} \cdot M_{B'}^{E_3}$$

ci serve $M_{B'}^{E_3} = \left(M_{E_3}^{B'}\right)^{-1}$. Abbiamo $M_{E_3}^{B'}$, le sue colonne sono i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$. procediamo con il calcolo dell'inversa col metodo della aggiunta della matrice identica

```
B:=Mat([[1, 2, 0],
        [1, 0, 1],
        [6,-1,-1]]);
A:=Mat([[1, 2, 0,  1,0,0],
        [1, 0, 1,  0,1,0],
        [6,-1,-1,  0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
     2^a-1*1^a [0, -2, 1, -1, 1, 0]
     3^a-6*1^a [0, -13, -1, -6, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
-------------- [0, -2, 1, -1, 1, 0]
  3^a-13/2*2^a [0, 0, -15/2, 1/2, -13/2, 1]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
     2^a*-1/2  [0, 1, -1/2, 1/2, -1/2, 0]
    3^a*-2/15  [0, 0, 1, -1/15, 13/15, -2/15]
Cancello la colonna sopra il 3  pivot
-------------- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
 2^a+1/2*3^a   [0, 1, 0, 7/15, -1/15, -1/15]
-------------- [0, 0, 1, -1/15, 13/15, -2/15]
Cancello la colonna sopra il 2  pivot
   1^a-2*2^a   [1, 0, 0,  1/15,  2/15,  2/15]
-------------- [0, 1, 0, n7/15, -1/15, -1/15]
-------------- [0, 0, 1, -1/15, 13/15, -2/15]
```

Quindi

$$\left(M_{E_3}^{B'}\right)^{-1} = M_{B'}^{E_3} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \\ -1 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

E

$$\begin{aligned}
(M_T)_{E_3}^{E_3} &= (M_T)_{E_3}^{B'} \cdot M_{B'}^{E_3} \\
&= (M_T)_{E_3}^{B'} \cdot \left(M_{E_3}^{B'}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \\ -1 & 13 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 28 & -2 \\ 9 & 18 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Il calcolo di $(M_T)_B^B$ è lasciato per esercizio.

□

21.4 Esercizi proposti

Esercizio 21.25. `[IIQ01]` *Determinare, se esiste, un applicazione lineare che soddisfi le condizioni*

1.

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (1,1,0) & \mapsto (1,2,0,8) & \\ & (1,1,-2) & \mapsto (2,3,-1,16) & \\ & (0,1,2) & \mapsto (0,1,1,0) & \end{array}$$

2. $rk(T) = 2$ *e* $\underline{e}_1 \in \operatorname{Im} T$

Esercizio 21.26. `[IIQ22]` *Determinare, se esiste, al variare di* $a \in \mathbb{R}$*, un applicazione lineare che soddisfi le condizioni*

1.

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (1,1,0) & \mapsto (1,2,0) & \\ & (1,1,1) & \mapsto (a, a-1, -a-1) & \\ & (1,1,2) & \mapsto (0,1,1) & \end{array}$$

2. $\dim \ker T = 1$ *e determinare una base di* $\ker T$

Esercizio 21.27. `[IIQ47]` *Dati i vettori linearmente indipendenti* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ *e l' applicazione lineare*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \\ & \underline{v}_2 & \mapsto \underline{v}_2 + \underline{v}_3 & \\ & \underline{v}_3 & \mapsto \underline{v}_1 + \underline{v}_3 & \end{array}$$

determinare una base di $\ker T$ *e* $\operatorname{Im} T$*.*

Esercizio 21.28. `[IIQ03]` *Dati i vettori linearmente indipendenti* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ *e, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *l' applicazione lineare*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & k\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_2 + k\underline{v}_3 \\ & \underline{v}_3 & \mapsto & \underline{v}_1 + \underline{v}_3 \end{array}$$

determinare una base di $\ker T$ *e* $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 21.29. `[IIQ45]` *[Difficile] Dato* $\mathcal{F} = \{T\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid T(0) = 0\}$ *ed i suoi sottoinsiemi*

$$\mathcal{F}_1 = \{T\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(1) = T(2) - T(3)\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{T\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(1) = T(2) = T(3)\}$$

dimostrare che $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \underset{SSP}{\subseteq} \mathcal{F}$ *e determinare* $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ *e* $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$

Esercizio 21.30. `[IIQ66]` *[Difficile] Dato* $\mathcal{F} = \{T\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid T(0) = 0\}$ *ed i suoi sottoinsiemi*

$$\mathcal{F}_1 = \{T\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(3) = T(1) + T(2)\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{T\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(2) = 2T(1), T(3) = 3T(1)\}$$

dimostrare che $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \underset{SSP}{\subseteq} \mathcal{F}$ *e determinare* $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ *e* $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$

Esercizio 21.31. `[JJ15]` *Sia dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,2,3) & \mapsto & (2,2,6) \\ & (1,1,3) & \mapsto & (3,3,3) \\ & (1,1,1) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \end{array}$$

1. *Determinare la matrice associata a* T *mediante le basi canoniche, ovvero* $(M_T)^{E_3}_{E_3}$

Esercizio 21.32. `[KL07]` *Dati* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *si determini se esista una applicazione lineare*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,2,3) & \mapsto & (3,1,5) \\ & (3,1,0) & \mapsto & (1,2,3) \\ & (1,1,1) & \mapsto & (2,0,0) \\ & (4,2,1) & \mapsto & (3,2,3) \\ & (a,b,0) & \mapsto & (a,b,c) \end{array}$$

determinando altresì $(M_T)^{E_3}_{E_3}$

Esercizio 21.33. `[KL11]` *Abbiamo* $a, b, \in \mathbb{R}$ *e una funzione*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (1,2,3,0) & \mapsto & (1,1,1,2) \\ & (3,0,1,1) & \mapsto & (1,-1,2,1) \\ & (3,-6,-7,2) & \mapsto & (-1,-5,a,b) \\ & (1,1,2,0) & \mapsto & \underline{0} \\ & \underline{e}_4 & \mapsto & \underline{e}_4 \end{array}$$

1. *Per quali a, b, la funzione può essere un applicazione lineare?*
2. *Dare, per una base a scelta B di $\mathbb{R}^4$, la matrice $(M_T)_B^B$*
3. *Dare la matrice $(M_T)_E^E$*

Esercizio 21.34. [LL88] *Abbiamo l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (1,1,0) & \mapsto & (1,1,0,1) \\ & (1,-1,2) & \mapsto & (1,2,-1,0) \\ & (0,0,1) & \mapsto & (0,0,1,1) \end{array}$$

1. *L'applicazione T è iniettiva, surgettiva, biunivoca?*
2. *Determinare l'immagine di $(2,0,3)$.*

Esercizio 21.35. [LLL89] *Determinare tutti i morfismi $T\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq} 3$ che soddisfano le condizioni*

$$x^2+1 \mapsto x^2+1 \qquad x^2+3 \mapsto x^3-2$$

1. *Tra questi, dire se esistono determinare tutti i morfismi iniettivi.*
2. *Per questi questi, determinare $T(x)^{-1}$*

Esercizio 21.36. [LLL90] *Determinare tutti i morfismi $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ che soddisfano le seguenti condizioni*

1. $\dim \ker T = 1$.
2. $I_2 \in \operatorname{Im} T$.
3. $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

Esercizio 21.37. [LLS90] *Determinare tutti i morfismi $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ che soddisfano le seguenti condizioni*

1. $\dim \ker T = 1$.
2. $I_2 \in \operatorname{Im} T$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$.
4. $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

Esercizio 21.38. [LLX90] *Dare descrizione cartesiana dei seguenti spazi*

1. $V = \mathrm{Span}((1,2,1,0),(0,0,1,2),(1,1,1,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{Q}^4$.
2. $V = \mathrm{Span}((i+1,i+1,i+1,i+1),(0,i+1,1,2),(i,i,i,i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^4$.
3. $V = \{(a+b+c, a-b, -a-c, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

4. $V = \{(a+b+c, a+b-c, a+b+3c) \ \mid \ a,b,c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

5. $V = \{(a,b,c,d) \ \mid \ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

Esercizio 21.39. [LLX91] *Dare descrizione parametrica dei seguenti spazi*

1. $V = \{(x,y,z,t) \ \mid \ \begin{cases} 2x+y-3z=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

2. $V = \{(x,y,z) \ \mid \ \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

3. $V = \{(x,y) \ \mid \ \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$

4. $V = \{(x,y,z,t) \ \mid \ \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+t=0 \\ 2x-3y-4z+t=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$