Capitolo 20

Ventesima Lezione

20.1 Esercizi svolti

L'isomorfismo T tra morfismi e matrici introdotto nella Proposizione 19.34 precedente trasforma la composizione in prodotto di matrici

Proposizione 20.1. [JJJ08] *Se $L_A\colon V \to W$, $L_B\colon W \to U$ sono morfismi di $\mathbb{K}$-spazi (ed abbiamo visto che tutti i morfismi di $\mathbb{K}$-spazi si possono esprimere attraverso le matrici associate quando le basi di V, W, U sono finite). Allora*

$$\begin{array}{rccc} L_B \circ L_A\colon & V & \to & U \\ & \underline{v} & \mapsto & L_B\left(L_A(\underline{v})\right) \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{rccc} L_{B\cdot A}\colon & V & \to & U \\ & \underline{v} & \mapsto & (B\cdot A)\cdot \underline{v} \end{array}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall\ \underline{v} \in V \quad L_A \circ L_B(\underline{v}) = L_{A\cdot B}(\underline{v})$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} L_A \circ L_B(\underline{v}) &= L_A(L_B(\underline{v})) \\ &= L_A(B\cdot \underline{v}) \\ &= A\cdot (B\cdot \underline{v}) \\ &\text{proprietà associativa} \\ &= (A\cdot B)\cdot \underline{v} \\ &= L_{A\cdot B}\cdot \underline{v} \end{aligned}$$

□

Osservazione 20.2. [JJW11] *La trasposta è un isomorfismo. Dalle proprietà della trasposta si vede che*

$$\begin{array}{rccc} (\cdot)^T\colon & \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & A^T \end{array}$$

è un morfismo di spazi vettoriali con inverso se stesso.

Esempio 20.3. [JJJ05]

1. $\mathbb{K}^{d+1} \simeq \mathbb{K}[x]_{\leq d}$. *Due isomorfismi sono, per esempio,*

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{K}^{d+1} & \to & \mathbb{K}[x]_{\leq d} \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & 1 \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & x \\ & \vdots & \mapsto & \vdots \\ & \underline{e}_{d+1} & \mapsto & x^d \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} G\colon & \mathbb{K}^{d+1} & \to & \mathbb{K}[x]_{\leq d} \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & x^d \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & x^{d-1} \\ & \vdots & \mapsto & \vdots \\ & \underline{e}_{d+1} & \mapsto & 1 \end{array}$$

2. $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn}$. *Un isomorfismo è*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^{mn} \\ & M_{ij} & \mapsto & \underline{e}_{f(i,j)} \end{array}$$

dove $f\colon \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} \to 1,\ldots,mn$ *è una bigezione.*

3. $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$. *Sia direttamente con la trasposta sia da*

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn} \simeq \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

4. *Se* V, W *sono* $\mathbb{K}$*-spazi di dimensione finita* n, $V \simeq \mathbb{K}^n$. *Dato* $\dim V = \dim W = n$ *esistono due basi* $\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{w}}$ *rispettivamente di* V, W *della stessa cardinalità. Basta considerare l'isomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & V & \to & W \\ & \underline{v}_i & \mapsto & \underline{w}_i \end{array}$$

che è morfismo peerchè è definito per linearità sulla base $\underline{\underline{v}}$ *ed è bigettivo perchè invertibile, dato che la funzione*

$$\begin{array}{rccc} G\colon & W & \to & V \\ & \underline{w}_i & \mapsto & \underline{v}_i \end{array}$$

è chiaramente la sua inversa.

5. *Come immediata conseguenza, se* W *è un* $\mathbb{K}$*-spazio di dimensione finita* n, $V \simeq \mathbb{K}^n$.

Osservazione 20.4. [JJJ20] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e ricordiamo la definizione del morfismo associato*

$$\begin{array}{rccc} L_A\colon & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & \underline{v} & \mapsto & A\cdot\underline{v} \end{array}$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A *è invertibile.*
2. L_A *è iniettiva* ($\ker L_A = \{\underline{0}\}$).
3. L_A *è surgettiva* ($\mathrm{Im}\, L_A = \mathbb{K}^m$).
4. $rk\, A = n$.
5. *Le colonne di* A *sono linearmente indipendenti.*
6. *Le righe di* A *sono linearmente indipendenti.*
7. $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) = \{\underline{0}\}$.

8. $\forall\ \underline{b} \in \mathbb{K}^n\ \ \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{A^{-1}\underline{b}\}$.

9. *Riducendo A alla forma a scala S, questa ha n pivot (è non singolare).*

10. $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Tutte le equivalenze sono banali. □

Definizione 20.5. `[III56]` *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, definiamo*

1. $\ker A = \ker L_A$

2. $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, L_A = rk\, L_A$

Osservazione 20.6. `[III54]` *Sia $L_A \colon V \to W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi. Allora*

1. $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$ *le colonne di A.*

2. $\dim \mathrm{Im}\, T = rk(A)$.

Dimostrazione.

1. Le colonne di A sono per costruzione $T(\underline{e}_1), \dots, T(\underline{e}_n)$, che generano $\mathrm{Im}\, A$ per la Proposizione 19.13.

2. Il rango di A è proprio il numero massimo di colonne indipendenti, che è per definizione $\dim \mathrm{Im}\, T$.

□

Osservazione 20.7. `[III57]` *Possiamo riscrivere il Teorema di Rouchè-Capelli nel linguaggio di morfismi: Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$,*

$$n = \dim \ker A + rk(A)$$

Esempio 20.8. `[IIX17]` *La funzione*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x] & \to & \mathbb{K}[x] \\ & f(x) & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

è un morfismo.

Esempio 20.9. `[IIY17]` *La funzione*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x] & \to & \mathbb{K}[x] \\ & f(x) & \mapsto & f(x^2) \end{array}$$

è un morfismo

Esempio 20.10. `[IIG17]` *La funzione*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x] & \to & \mathbb{K}[x] \\ & f(x) & \mapsto & f(3x) \end{array}$$

è un morfismo

Esempio 20.11. `[IIF17]` *La funzione*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x] & \to & \mathbb{K}[x] \\ & f(x) & \mapsto & f(3x+2) \end{array}$$

non è un morfismo

Osservazione 20.12. [III06]

1. *la funzione nulla* $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ T(\underline{v}) = \underline{0}$ *si può scrivere come*
$$L_0\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ L_0(\underline{v}) = 0_{m\times n}\cdot \underline{v}$$
2. *la funzione identità* $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ T(\underline{v}) = \underline{v}$ *si può scrivere come*
$$L_{I_n}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ L_{I_n}(\underline{v}) = I_n\cdot \underline{v}$$

Esempio 20.13. [III41] *Dato il morfismo*
$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (ix+y, 5x+z, 2iy+3z) \end{array}$$
Determinare M_T

Soluzione. Abbiamo che
$$\begin{aligned} T(\underline{e}_1) &= T((1,0,0)) = (i,5,0) \\ T(\underline{e}_2) &= T((0,1,0)) = (1,0,2i) \\ T(\underline{e}_3) &= T((0,0,1)) = (0,0,3) \end{aligned}$$

e quindi
$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Osservazione 20.14. [III70] *Data* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *e* $L_A\colon V \to W$ *abbiamo che*
$$\ker A = \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

Esempio 20.15. [IIQ44] *La funzione*
$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y+2, x-y) \end{array}$$
non è lineare, dato che $F((0,0)) = (2,0) \neq \underline{0}$.

Esercizio 20.16. [PP03] *Sia* $F = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$. *Determinare* $a, b \in \mathbb{R}$ *tale che l'applicazione*
$$\begin{array}{rccc} T\colon & F & \to & \mathbb{R}^2 \\ & f & \mapsto & (f(a), 2f(1)+a+b) \end{array}$$
sia lineare

Soluzione. Procediamo con la definizione. Dobbiamo avere che

- $\forall\ f \in F, \lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f) = \lambda T(f)$. Ma

$$\begin{aligned}
T(\lambda f) &= \lambda T(f)\\
(\lambda f(a), 2\lambda f(1) + a + b) &= \lambda(f(a), 2f(1) + a + b)\\
(\lambda f(a), 2\lambda f(1) + a + b) &= (\lambda f(a), 2\lambda f(1) + \lambda(a + b))\\
&\begin{cases}\lambda f(a) = \lambda f(a)\\ 2\lambda f(1) + a + b = 2\lambda f(1) + \lambda(a + b))\end{cases}\\
&\begin{cases}a + b = \lambda(a + b)\end{cases}
\end{aligned}$$

  e dato che l'uguaglianza deve valere per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ questo implica $a + b = 0$

- Ponendo $a + b = 0$ verifichiamo che $\forall\ f, g \in F$, $T(f + g) = T(f) + T(g)$. Ma

$$\begin{aligned}
T(f + g) &= T(f) + T(g)\\
(f + g(a), 2(f + g)(1) + a + b) &= (f(a), 2f(1) + a + b) + (g(a), 2g(1) + a + b)\\
(f(a) + g(a), 2f(1) + 2g(1) + a + b) &= (f(a) + g(a), 2f(1) + 2g(1) + 2(a + b))\\
&\begin{cases}f(a) + g(a) = f(a) + g(a)\\ 2(f + g)(1) + a + b = 2f(1) + 2g(1) + 2(a + b)\end{cases}\\
&\begin{cases}a + b = 2(a + b)\end{cases}
\end{aligned}$$

  e questo è verificato per ogni a, b tali che $a + b = 0$

Quindi T è lineare per tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + b = 0$. □

Esercizio 20.17. `[JJ13]` *Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice*

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & t\\ t & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. *Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\ker \mathcal{L}_{A_t})$ e $\dim(Im\mathcal{L}_{A_t})$.*
2. *Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $(2, 2, 0)$ appartiene ad $\operatorname{Im} \mathcal{L}_{A_t}$.*

Soluzione.

1. Vogliamo determinare $\dim(\ker \mathcal{L}_{A_t})$ e $\dim(Im\mathcal{L}_{A_t})$. Calcoliamo il determinante di A sviluppando secondo la terza riga

$$\det A_t = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & t\\ t & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}3 & t\\ 0 & -2\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1 & t\\ t & -2\end{pmatrix} = -6 - (-t^2 - 2) = t^2 - 4$$

   Se $t \neq \pm 2$ abbiamo che il determinante di A_t è non nullo e quindi

$$\dim \operatorname{Im}(A_t) = rk\, A_t = 3 \text{ da cui } \dim\ker(A_t) = 3 - rk\, A_t = 0$$

Se $t = \pm 2$, abbiamo che $\det A_t = 0$ e quindi $rk\, A_t < 3$. La sottomatrice

$$A_{(1,3),(1.2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che non dipende da t, è non singolare, e quindi per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\dim \operatorname{Im}(A_t) = rk\, A_t = 2 \text{ da cui } \dim \ker(A_t) = 3 - rk\, A_t = 1$$

2. Per determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $(2, 2, 0)$ appartiene ad $\operatorname{Im} \mathcal{L}_{A_t}$ vediamo le t per cui esiste almeno una soluzione del sistema

$$\mathcal{L}_{A_t}((x_1, x_2, x_3)) = (2, 2, 0)$$

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ t & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usiamo il teorema di Rouchè-Capelli. La matrice completa è

$$A'_t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & t & 2 \\ t & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $t \neq \pm 2$ abbiamo gia' visto che $rk\, A_t$ è massimo, quindi

$$rk\, A'_t = rk\, A_t = 3 \quad \text{massimo}$$

ed esiste un' unica soluzione.

Se $t = \pm 2$, ricordando che $rk\, A_t = 2$ si vede che i determinanti delle sole altre tre sottomatrici 3×3 di A'_t

$$(A_t)_{(1,2,3),(1,2,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ t & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A_t)_{(1,2,3),(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ t & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_t)_{(1,2,3),(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 3 & t & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono sempre uguali a $2t + 4$, che sia annulla solo per $t = -2$. Quindi

- Se $t = 2$, $rk\, A_t = 2 \neq rk\, A'_t = 3$ e non esistono soluzioni.
- Se $t = -2$, $rk\, A_t = rk\, A'_t = 2$ ed esistono ∞^1 soluzioni.

□

Esercizio 20.18. [JJ14] *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un'applicazione lineare tale che*

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}((1, -1, 2)), \quad \ker(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\right\}$$

Si determini $(M_f)^{E_3}_{E_3}$.

Soluzione: Determiniamo una base di $\ker(f)$: data la condizione

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_3$$

un vettore generico di $\ker(f)$ è

$$(-2x_2 + 3x_3, x_2, x_3) = x_2(-2, 1, 0) + x_3(3, 0, 1)$$

e una base quindi $\underline{v}_1 = (-2, 1, 0), \underline{v}_2 = (3, 0, 1)$. Dato che i vettori $\underline{e}_1, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, come si vede facilmente dal fatto che la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, e dato che sono tre, formano una base di $\mathbb{R}^3$. L'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & (1, -1, 2) \\ & (-2, 1, 0) & \mapsto & \underline{0} \\ & (3, 0, 1) & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

soddisfa quindi le condizioni poste. Determiniamo le immagini di $\underline{e}_2, \underline{e}_3$ da

$$\begin{cases} f(-2\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \underline{0} \\ f(3\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = \underline{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(\underline{e}_2) = 2f(\underline{e}_1) = (2, -2, 4) \\ f(\underline{e}_3) = -3f(\underline{e}_1) = (-3, 3, -6) \end{cases}$$

e quindi

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 20.19. `[LL31]` *Dati U, W sottospazi del $\mathbb{K}$-spazio V, dimostrare che*

$$U \times W \simeq U \oplus W$$

Dimostrazione. I due spazi non possono essere uguali, dato che il primo ha come elementi coppie di vettori di V mentre il secondo, elementi di V.

$$U \times W \subseteq V^2 \text{ e } U \oplus W \subseteq V$$

Possono però essere isomorfi. Costruiamo un isomorfismo, ovvero un applicazione lineare bigettiva, tra $U \times W$ e $U \oplus W$.

$$\begin{array}{cccc} \phi: & U \times W & \longrightarrow & U \oplus W \\ & (u, w) & \rightsquigarrow & u + w \end{array}$$

Questa è lineare perchè, per ogni $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \times W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(u_1, w_1) + \mu(u_2, w_2)) &= \phi((\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda w_1 + \mu w_2)) \\ &= \lambda u_1 + \mu u_2 + \lambda w_1 + \mu w_2 \\ &= \lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2 \\ &= \phi((\lambda u_1, \lambda w_1)) + \phi((\mu u_2, \mu w_2)) \\ &= \lambda\phi((u_1, w_1)) + \mu\phi((u_2, w_2)) \end{aligned}$$

Per la bigettività:
Vediamo la dimostrazione per se V ha dimensione finita. Il caso generale è lasciato per esercizio.

Vediamo che $U \oplus W$ e $U \times W$ hanno la stessa dimensione. Infatti

- $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$, usando la formula di Grassman e dato che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ dato che la somma è diretta.

- $\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W)$ dato che se $u_1, \dots, u_n$, $w_1, \dots, w_s$ sono basi di U, W rispettivamente, una base di $U \times W$ è data dai $n + s$ vettori

$$(u_1, \underline{0}), \dots, (u_n, \underline{0}), (\underline{0}, w_1), \dots, (\underline{0}, w_s)$$

Quindi basta provare l'iniettività di ϕ, ovvero che $\ker(\phi) = \{\underline{0}\}$. ma

$$(u, w) \in \ker(\phi) \iff u + w = \underline{0}$$

e dato che $w, \underline{0} \in W$ abbiamo che $u \in W$ e dato che $u, \underline{0} \in U$ abbiamo che $w \in U$, da cui $u, w \in W \cap W = \{\underline{0}\}$, ovvero $u = w = \underline{0}$, e quindi abbiamo dimostrato che $(u, w) = (\underline{0}, \underline{0})$.

$\square$

Esempio 20.20. `[MMM01]` *Data l'applicazione lineare di $\mathbb{R}$-spazi*

$$\begin{array}{rrcl} F\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 3} & \to & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & ax^3 + bx^2 + cx + d & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} \end{array}$$

determinare $\dim \ker F$.

Soluzione. Risolviamo questo esercizio trasportando il problema in $\mathbb{K}^4$ mediante isomorfismi. Si sarebbe potuto risolvere direttamente per esempio trovando direttamente una base di $\ker F$.

Abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} F(ax^3 + bx^2 + cx + d) & = & 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{array}$$

Quindi un polinomio generico di $\ker F$ è dato dall'applicazione delle condizioni $a = b = c = 0$ al polinomio generico $ax^3 + bx^2 + cx + d$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Otteniamo che un polinomio generico del $\ker F$ ̀dato da $p(x) = d$, quindi $\ker F$ è composto dai polnomi costanti ed una sua base è 1. La dimensione di $\ker F$ è quindi 1.

Mediate gli isomorfismi:

Introduciamo i tre morfismi

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 3} & \to & \mathbb{R}^4 \\ & ax^3+bx^2+cx+d & \mapsto & (a,b,c,d) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & (a,b,c,d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \overline{F}\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (a,b,c,d) & \mapsto & (a,b,c,a+b) \end{array}$$

I primi due sono chiaramente isomorfismi e chiaramente

$$\phi \circ \overline{F} \circ \psi \equiv F$$

Dato che ψ, ϕ sono isomorfismi, $rk\, F = rk\, \overline{F}$ e quindi

$$\dim \ker F = 4 - rk\, F = 4 - rk\, \overline{F}$$

Dato che

$$\begin{aligned} F((1,0,0,0)) &= (1,0,0,1) \\ F((0,1,0,0)) &= (0,1,0,0) \\ F((0,0,1,0)) &= (0,0,1,0) \\ F((0,0,0,1)) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Costuiamo

$$(M_F)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che si vede facilmente avere rango tre. Quindi $\dim \ker F = 4 - 3 = 1$ □

Esercizio 20.21. `[LL15]` *Sia data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & AX - XA \end{array}$$

1. *T è lineare?*
2. *Determinare* $\dim \ker(T)$.
3. *Determinare* $\ker(T), \mathrm{Im}(T)$. *[Lasciato per esercizio]*
4. *È vero che* $\ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*? [Lasciato per esercizio]*

Soluzione.

1. T è lineare? Verifichiamo le condizioni:

   (a) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\; X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ abbiamo
   $$T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda AX - \lambda XA = \lambda(AX - XA) = \lambda T(X)$$

   (b) $\forall\; X, Y \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ abbiamo
   $$\begin{aligned} T(X+Y) &= A(X+Y) - (X+Y)A \\ &= AX + AY - XA - YA \\ &= (AX - XA) + (AY - YA) \\ &= T(X) + T(Y) \end{aligned}$$

   Quindi T è lineare.

2. Notiamo che
   $$T(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   e analogamente
   $$\begin{aligned} T(e_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T(e_{21}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ T(e_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Trasportiamo il nostro problema in $\mathbb{R}^4$ usando le due basi canoniche e l'isomorfismo
   $$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & e_{11} & \mapsto & \underline{e}_1 \\ & e_{12} & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & e_{21} & \mapsto & \underline{e}_3 \\ & e_{22} & \mapsto & \underline{e}_4 \end{array}$$
   e quindi rispetto alla base canonica $E_{2\times 2} = e_{11}, \ldots, e_{22}$ il morfismo T è associato alla matrice che ha per colonne le trasformate dei vettori e_{ij} scritte in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$
   $$(M_T)_{E_4}^{E_{2\times 2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Abbiamo che la seconda riga è nulla, la prima multipla della quarta e la sottomatrice di indici $(3,4);(1,2)$ non singolare. Quindi $rk\,(M_T)_{E_4}^{E_{2\times 2}} = rk\,T = 2$ e per il Teorema della Dimensione
   $$\dim \ker T = 2 - rk\,T$$

□

Esercizio 20.22. [ES2122C] *Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita dalla formula*

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-2z \\ x-2y+z \\ -2x+y+z \end{pmatrix}$$

1. *Dire se f è iniettiva o surgettiva.*
2. *Determinare immagine e* ker *di f.*
3. *Determinare $f^{-1}((3,0,3))$, la controimmagine di $(3,0,3)$.*
4. *Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che $(1, k+1, k^2-2) \in \operatorname{Im} f$.*

Soluzione. Dato che le entrate del vettore immagine sono polinomi omogenei di grado 1 nelle tre variabili x, y, z, la funzione f è un morfismo di $\mathbb{R}$-spazi. Determiniamo la matrice che gli viene associata dalle basi canoniche. Dato che

$$f((1,0,0)) = (1,1,-2) \quad f((0,1,0)) = (1,-2,1) \quad f((0,0,1)) = (-2,1,1)$$

abbiamo

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dire se f è iniettiva o surgettiva.

   Dato che, con facili calcoli, si trova che
   $$\det (M_f)_{E_3}^{E_3} = 0$$
   e che la prima e seconda riga sono chiaramente indipendenti, $rk(f) = 2 \neq 3$ e quindi f non è surgettiva. Per il teorema della dimensione, $\dim \ker(f) = 3 - rk(f) = 3 - 2 \neq 0$ e quindi f non è iniettiva.

2. Determinare immagine e ker di f.

   Riduciamo con Gauss $(M_f)_{E_3}^{E_3}$

```
M:=Mat([[ 1, 1,-2],
        [ 1,-2, 1],
        [-2, 1, 1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2]
     2^a-1*1^a [0, -3, 3]
     3^a+2*1^a [0, 3, -3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2]
-------------- [0, -3, 3]
     3^a+1*2^a [0, 0, 0]
```

Una base di $\operatorname{Im} f$ è data dalle colonne originarie che hanno un pivot nella riduzione, ovvero $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$. Quindi

$$\operatorname{Span}(\operatorname{Im} f) = ((1, 1, -2), (1, -2, 1))$$

Per determinare una base del ker troviamo le soluzione del sistema associato alla matrice $(M_f)^{E_3}_{E_3}$, ovvero, per comodita, alla sua riduzione

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Quindi un vettore generico delle soluzioni è (z, z, z) e

$$\ker(f) = \operatorname{Span}((1, 1, 1))$$

3. Determinare $f^{-1}((3, 0, 3))$, la controimmagine di $(3, 0, 3)$.

   Per definizione
   $$f^{-1}((3, 0, 3)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; f((x, y, z)) = (3, 0, 3)\}$$
   ovvero, $f^{-1}((3, 0, 3))$ è composto dalle soluzioni (x, y, z) del sistema
   $$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$$

   Risolviamo il sistema con Gauss

```
M:=Mat([[ 1,  1, -2, 3],
        [ 1, -2,  1, 0],
        [-2,  1,  1, 3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2, 3]
     2^a-1*1^a [0, -3, 3, -3]
     3^a+2*1^a [0, 3, -3, 9]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2, 3]
-------------- [0, -3, 3, -3]
     3^a+1*2^a [0, 0, 0, 6]
```

   vediamo immediatamente dall'ultima riga che il sistema non ha soluzioni, e quindi $f^{-1}((3, 0, 3)) = \emptyset$.

4. Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che $(1, k + 1, k^2 - 2) \in \operatorname{Im} f$.

   Dato che una base di $\operatorname{Im} f$ è $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$, ci viene chiesto di determinare se esistono, al variare di k, combinazioni lineari di questi vettori che diano $(1, k+1, k^2-2)$, ovvero valori del parametro k tali che il sistema
   $$a(1, 1, -2) + b(1, -2, 1) = (1, k + 1, k^2 - 2)$$
   nelle variabili a, b abbia soluzioni. Risolviamo con Gauss.

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[1, 1,     1],
        [1,-2,   k+1],
        [-2,1, k^2-2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1]
     2^a-1*1^a [0, -3, k]
     3^a+2*1^a [0, 3, k^2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,      1]
-------------- [0, -3,      k]
     3^a+1*2^a [0,  0, k^2 + k]
```

Chiaramente soluzioni esistono se e solo se $k^2 + k = 0$, ovvero se $k = 0, -1$, dato che solo in questo caso abbiamo due pivot sia nella completa che nell'incompleta.

I conti possono essere sostanzialmente minimizzati risolvendo prima il punto 3, e sfruttando la riduzione della matrice incompleta ivi calcolata nella risoluzione degli altri punti. Qui si è preferito svogere tutti i conti indipendentemente per maggiore chiarezza. □

Esercizio 20.23. [ASD02] *Sia dato un morfismo di* $\mathbb{K}$*-spazi* $T\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ *che soddisfa le condizioni*

$$T(3x^2 - 1) = x^2 \qquad T(x + 2) = 3$$

1. *Descrivere tutti i morfismi* T *che soddisfano le condizioni.*
2. *Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi* T *per cui (le condizioni sono indipendenti).*
   (a) $rk(T) = 4$ *e* $1 \in \mathrm{Im}(T)$.
   (b) $rk(T) = 3$ *e* $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$
   (c) $rk(T) = 2$ *e* $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$

Soluzione.

1. Descrivere tutti i morfismi T che soddisfano le condizioni.

   È immediato vedere che i tre vettori $3x^2-1, x+2, 1$, tutti di grado diverso, siano linearmente indipendenti e quindi formino una base B di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$, che ha dimensione 3. I morfismi che soddisfano le condizioni sono quindi scrivibili, usando la base B, come

$$T\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \\ 3x^2-1 & \mapsto & x^2 \\ x+2 & \mapsto & 3 \\ 1 & \mapsto & ax^3+bx^2+cx+d \end{array} \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{K}$$

2. Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi T per cui (le condizioni sono indipendenti)

(a) $rk(T) = 4$ e $1 \in \text{Im}(T)$. Non esiste alcun morfismo che soddisfi le condizioni. Per il teorema della dimensione abbiamo

$$\dim \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = rk(T) + \dim \ker T \Leftrightarrow 3 = 4 + \dim \ker T$$

e la dimensione è sempre positiva o nulla.

(b) $rk(T) = 3$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$. Ragioniamo come sopra. Un esempio di morfismo è

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \\ & 3x^2-1 & \mapsto & x^2 \\ & x+2 & \mapsto & 3 \\ & 1 & \mapsto & x^3 \end{array}$$

I vettori $3x^2 - 1, x + 2, 1$ sono una base B di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$. Dato che

$$x^3 + x^2 + 1 = T(1) + T(3x^2 - 1) + \frac{1}{3}T(x + 2) = T(1 + 3x^2 - 1 + \frac{1}{3}(x + 2))$$

abbiamo che $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$.

(c) $rk(T) = 2$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$. Non esiste alcun morfismo che soddisfi le condizioni. Infatti se $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$, abbiamo in $\text{Im}\, T$ tre polinomi di grado diverso. Il rango di T è quindi almeno 3, contraddicendo la condizione $rk(T) = 2$.

□

20.2 Esercizi proposti

Esercizio 20.24. `[IIA80]` *Una funzione*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ & \underline{x} & \mapsto & (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})) \end{array}$$

dove

$$\forall\, i : 1 \dots m \quad f_i(\underline{x}) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

è lineare se e solo se tutti i polinomi $f_i(\underline{x})$ sono di grado uno ed omogenei.

Esercizio 20.25. `[IIA00]` *Dire se le seguenti applicazioni sono lineari*

1. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. *[No]*
2. $T\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ T(p(x)) = p(x^2)$ *[Si]*
3. $T\colon \text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4},\ T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a + b)x^2 + c + d$ *[Si]*
4. $F\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ F(p(x)) = p(x^2)$ *[Si]*
5. $F\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K},\ F(p(x)) = p(0)$ *[Si]*
6. $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \sin x$ *[No]*

Esercizio 20.26. `[IIA03]` *Dire se la funzione traccia di una matrice*

$$\begin{array}{rccc} tr\colon & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

è lineare

Esercizio 20.27. `[IIA04]` *Caratterizzare tutte le funzioni lineari* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Esercizio 20.28. `[IIQ06]` *Dato lo spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ $\mathcal{F} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *e* $g \in \mathcal{F}$*, dire se*

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & f & \mapsto & f \circ G \end{array}$$

è lineare. [No]

Esercizio 20.29. `[IIQ55]` *Dato lo spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ $\mathcal{F} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *e* $g \in \mathcal{F}$*, dire se*

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & f(x) & \mapsto & 2f(x) \end{array}$$

è lineare. [Si]

Esercizio 20.30. `[III80]` *Una funzione*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ & \underline{x} & \mapsto & (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})) \end{array}$$

dove

$$\forall\ i : 1 \dots m \quad f_i(\underline{x}) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n],\ \deg f_i(\underline{x}) = 1,\ f_i(\underline{x}) \text{ omogeneo}$$

è lineare.

Dimostrazione. La dimostrazione, lasciata per esercizio, segue dalla definizione di morfismo. □

Esempio 20.31. `[III20]` *Il prodotto scalare per un vettore* $\underline{v}$ *è lineare*

$$\begin{array}{rccc} F_{\underline{v}}\colon & V & \to & V \\ & \underline{w} & \mapsto & \underline{v} \cdot \underline{w} \end{array}$$

è lineare.

Dimostrazione. Discende immediatamente dalle proprietà del prodotto scalare. □

Esempio 20.32. `[III40]` *Dati* V $\mathbb{K}$*-spazio e* $U, W \underset{SSP}{\subseteq} V$ *tali che* $V = U \oplus W$*, la funzione*

$$\begin{array}{rccc} Proj_U\colon & U \oplus W & \to & U \\ & \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} & \mapsto & \underline{u} \end{array} \qquad \text{con } \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$$

è ben definita e lineare.

Dimostrazione. La dimostrazione, lasciata per esercizio, segue dalle proprietà della somma diretta. □

Esercizio 20.33. `[JJ2]` *Sia data, al variare di* $a, b \in \mathbb{R}$*, l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (ax + 2ay + z, bx + 2by + z) \end{array}$$

1. *Si determinino gli eventuali valori di* a, b *per cui* T *è surgettiva.*
2. *Si trovi una base di* $\ker(T)$.

Esercizio 20.34. [IIQ00] *Sia data, al variare di* $a, b \in \mathbb{R}$, *l'applicazione lineare*

$$T\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (ax+ay, bx+by+bz, bx, ax+bz) \end{array}$$

1. *Si determinino gli eventuali valori di* a, b *per cui* T *è iniettiva.*
2. *Si trovi una base di* $\ker(T)$.

Capitolo 21

Ventunesima Lezione

Definizione 21.1. `[JJJ65]` *Data un applicazione* $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *con basi* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{K}^n$ *e* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{K}^m$ *Indicheremo spesso* M_F *come come* $(M_F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$*, per esplicitare il ruolo delle basi.*

21.1 Cambio di base per vettori

Definizione 21.2. `[JJJ60]` *Sia* V $\mathbb{K}$*-spazio, con* $\dim(V) = n$ *e*

$$\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n, \quad \mathcal{B}' = v_1', \dots, v_n' \text{ basi di } V$$

Se $\underline{w}_{\mathcal{B}}$ *e* $\underline{w}'_{\mathcal{B}}$ *sono le rappresentazioni del vettore* $\underline{w}$ *in base* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *rispettivamente (le coordinate del vettore rispetto alle basi* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$*),*

Il morfismo

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}^n, \mathcal{B} & \to & \mathbb{K}^n, \mathcal{B}' \\ & \underline{v}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \underline{v}_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

è il cambio di base da dalle coordinate $\mathcal{B}$ alle coordinate $\mathcal{B}'$, (da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in breve) *La matrice associata a* T *secondo le regole viste precedentemente ha le colonne date dalla trasformazione dei vettori di una base di* $\mathbb{K}^n$*, scegliamo la base* $\mathcal{B}$ *, e quindi la matrice è*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ (\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} & \cdots & (\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{ed abbiamo} \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot \underline{w}_{\mathcal{B}} = \underline{w}'_{\mathcal{B}}$$

Diciamo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ *è la* matrice di cambio di base dalle coordinate $\mathcal{B}$ alle coordinate $\mathcal{B}'$ (da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in breve). *Il morfismo* T *si indica come* $L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}$ *Dato che* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *sono basi,* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ *è non singolare e* $L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}$ *è un isomorfismo.*

Osservazione 21.3. `[JJJ62]` *È immediato che*

$$L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}} \circ L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}} = \mathrm{id} = L_{I_n} \text{ e quindi } M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = I_n$$

Nel linguaggio delle applicazioni lineari, l'applicazione $L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}$ cambia le coordinate dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$, ed è associata alla matrice $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$, le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}'$ espressi in base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{rccc} L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}\colon & (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) & \to & (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}') \\ & v & \mapsto & L_{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}(v) \end{array}$$