Capitolo 11

Undicesima lezione

Esempio 11.1. [EEE89] *Esempio con la terza riga* $(4,9,6)=(1,1,1)+(3,8,5)$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\4&9&6\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\1&1&1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\3&8&5\end{pmatrix}\\ &= -1 + -14\\ &= -15\end{aligned}$$

Esempio con la seconda riga $(0,2,3)=(0,2,0)+(0,0,3)$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\4&9&6\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&0\\4&9&6\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&3\\4&9&6\end{pmatrix}\\ &= -12 + -3\\ &= -15\end{aligned}$$

11.1 Rango di una matrice

Problema 11.2. [EEH46] *Se una matrice quadrata ha determinante nullo, possiamo dire quante tra le sue righe e colonne sono linearmente indipendenti e quali?*

Problema 11.3. [FFF22] *Se riduco una matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *in forma a scala, standard o normale* S*, le righe e colonne della matrice* S *che corrispondono ai pivot sono chiaramente linearmente indipendenti. Anche le corrispondenti righe e colonne della matrice* A *sono linearmente indipendenti?*

Problema 11.4. [FFF40] *Data una matrice quadrata* A *di ordine* n *e una sua riduzione a scala* S*, con esattamente* n *pivot. Il prodotto dei pivot non dipende dalla particolare riduzione attuata, dato che è uguale al determinante. Anche il numero dei pivot è indipendente dalla particolare riduzione effettuata?*

Problema 11.5. [FFF33] *Una matrice quadrata può avere determinante nullo. Tra tutte le matrici con determinante nullo, possiamo dare una distanza da essere la matrice nulla?. Possiamo dire che le matrici* $\begin{pmatrix}1&3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ *sono più vicine alla matrice nulla delle matrici* $\begin{pmatrix}1&3&1\\4&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&3&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ *?*

Problema 11.6. `[FFF26]` *Per una matrice quadrata abbiamo il determinante. Possiamo generalizzare a matrici non quadrate?*

La risposta a questi problemi sta nel concetto di rango di una matrice.

Definizione 11.7. `[EEE84]` *Data una matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ *e due insiemi di interi* $\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $\{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *definiamo* sottomatrice di indici $\{i_1, \ldots, i_s\}$, $\{j_1, \ldots, j_k\}$ di A, e scriviamo $A_{(i_1,\ldots,i_s;j_1,\ldots,j_k)}$ *la matrice appartenente a* $\mathrm{Mat}_{s,k}(\mathbb{K})$ *ottenuta da* A *mediante la cancellazione di tutte le righe all'infuori delle righe* $i_1, \ldots, i_s$ *e di tutte le colonne all'infuori delle colonne* $j_1, \ldots, j_k$*. È inteso che gli indici* $i_1, \ldots, i_s$ *(e* $j_1, \ldots, j_k$*) sono tutti diversi gli uni dagli altri*

Esempio 11.8. `[EEE62]`

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ allora } A_{(1,3;2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A_{(1;2,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Definizione 11.9 (Rango di una matrice)**.** `[FFF27]` *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *tale che*

1. *Esiste una sottomatrice quadrata di ordine* r *non singolare.*
2. *Tutte le sue sottomatrici quadrate di ordine* $> r$ *sono singolari.*

Allora diciamo che la matrice A *ha* rango r *e scriviamo* $rk(A) = r$

Osservazione 11.10. `[FFF32]` *Se* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $0 \leq rk(A) \leq \min(m, n)$*. Si ha* $rk(A) = 0$ *se e solo se tutte le entrate della matrice* A *sono nulle.*

Esempio 11.11. `[FFF31]` *il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è 2 *dato che* A *è non singolare.*

Esempio 11.12. `[FFF28]` *Il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

non può essere 3 *dato che* $\det(A) = 0$*. È almeno* 1 *dato che esiste una entrata non nulla. Dato che*

$$\det(A_{1,2;1,2}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

abbiamo che $rk(A) = 2$.