Capitolo 13

Tredicesima lezione

13.1 Esercizi Rango e Rouchè-Capelli

Esempio 13.1. `[JJS37]` *Calcoliamo il rango della matrice*

```
M:=Mat([[ 1, 3, 1,4, 0, 3],
        [ 1, 3, 1,0, 1, 2],
        [-1,-3,-1,8,-3, 0],
        [ 1, 3, 1,12,-2,5]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 3, 1, 4, 0, 3]
     2^a-1*1^a [0, 0, 0, -4, 1, -1]
     3^a+1*1^a [0, 0, 0, 12, -3, 3]
     4^a-1*1^a [0, 0, 0, 8, -2, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 4]=-4
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 3, 1,  4, 0,  3]
-------------- [0, 0, 0, -4, 1, -1]
     3^a+3*2^a [0, 0, 0,  0, 0,  0]
     4^a+2*2^a [0, 0, 0,  0, 0,  0]
```

Il rango della matrice è 2*, le colonne linearmente indipendenti sono la prima e la quarta, le righe linearmente indipendentila prima e la seconda (non ha operato scambi di riga).*

Esempio 13.2. `[FFF81]` *Calcoliamo il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{K})$$

Abbiamo che $1 \leq rk(A) \leq 4$*. Riduciamo la prima colonna con Gauss*

```
A:=Mat([[1,1,2,2,3],
        [1,1,1,2,2],
        [0,2,1,2,0],
```

```
        [1,3,4,4,4]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 2, 2, 3]
     2^a-1*1^a [0, 0, -1, 0, -1]
  0 sotto pivot[0, 2, 1, 2, 0]
     4^a-1*1^a [0, 2, 2, 2, 1]
```

vediamo facilmente che la sottomatrice $A_{(1,2,3);(2,3,4)}$ è non singolare. Questo ci dice che $rk(A) \geq 3$. Il rango è quindi 3 o 4. Notiamo che la quarta riga della matrice è la differenza della terza e della seconda. Quindi non ci sono quattro righe indipendenti e il rango è 3.

Avremmo potuto considerare ugualmente la sottomatrice $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$

Esercizio 13.3. [LL25] *Calcolare il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3a & a-1 & -1 & -a-2b \\ a & a+b & a+b & -2a-2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ e poi $a, b \in \mathbb{C}$.

Soluzione. Svolgiamo i conti e alla fine distingueremo i casi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Dato che esiste un elemento della matrice $-1 \neq 0$ non dipendente dai parametri a, b, il rango di A è almeno uno. Inoltre la matrice A ha ordine 2×4 quindi il rango è al massimo 2.

Per stabilire se è 1 o 2 dobbiamo considerare le sottomatrici di ordine 2: se tutte le 6 sottomatrici 2×2 di A sono singolari allora abbiamo che il rango è 1 altrimenti è 2 . Potremmo mettere a sistema queste sei equazioni non lineari, sperando di risolvere il sistema facilmente, ma è più efficiente esaminare la matrice.

Scegliamo una sottomatrice 2×2 per cui calcoliamo il determinante e discutiamo per quale valore di a, b è diverso da 0. Per esempio, prendiamo in considerazione la matrice

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a

$$(a-1)(a+b) + (a+b) = (a-1+1)(a+b) = a(a+b) \neq 0 \iff a \neq 0 \text{ oppure } a \neq -b$$

In tal caso il rango di A sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$ è 2.

Studiamo quindi il caso $a = 0$. La matrice diviene

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2b \\ 0 & b & b & -2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che tale matrice ha la prima colonna nulla, la seconda e la terza uguali, pertanto le sottomatrici che coinvolgono due su tre di tali colonne sono singolari. L'unica matrice non singolare di cui calcoliamo il determinante è :

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -2b \\ b & -2 \end{pmatrix} = 2(b^2+1)$$

A questo punto possiamo concludere che per $a = 0$ il rango di A su $\mathbb{R}$ è esattamente 2 per ogni $b \in \mathbb{R}$; mentre il rango di A su $\mathbb{C}$ è esattamente 2 per $a = 0$ e $b \neq \pm i$, altrimenti è 1.

Adesso consideriamo il caso $b = -a$. La matrice assegnata diventa:

$$\begin{pmatrix} 3a & a-1 & -1 & a \\ a & 0 & 0 & -2a-2 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso scegliamo una sottomatrice che ha determinante dipendente dal parametro a, che ci sembra semplice, e ne calcoliamo il determinante. Per esempio la sottomatrice

$$\det\begin{pmatrix} 3a & a-1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = a(a-1)$$

Affinchè tale determinante sia nullo bisogna che $a = 0$ o $a = 1$.

Se $a = 0$ anche $b = -a = 0$ e otteniamo che

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $a = 1$ quindi $b = -1$ e otteniamo

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Riassumendo: il rango di A su $\mathbb{C}$ è 2 per ogni $a \in \mathbb{C}$ e $b = \pm i$, mentre su $\mathbb{R}$ è 2 per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Svolgiamo adesso l'esercizio mediante la forza bruta. Iniziamo con il calcolare tutti i determinanti delle sei matrici 2×2:

$$\begin{aligned}
\det A_{(1,2);(1,2)} &= 3a(a+b) - a(a-1) = 2a^2 + 3ab + a \\
\det A_{(1,2);(1,3)} &= 3a(a+b) + a = 3a^2 + 3ab + a \\
\det A_{(1,2);(1,4)} &= 3a(-2a-2) + a(a+2b) = -5a^2 + 2ab - 6a \\
\det A_{(1,2);(2,3)} &= (a-1)(a+b) + (a+b) = a^2 + ab = a(a+b) \\
\det A_{(1,2);(2,4)} &= (a-1)(-2a-2) + (a+b)(a+2b) = -a^2 + 3ab + 2b^2 + 2 \\
\det A_{(1,2);(3,4)} &= (2a+2) + (a+b)(a+2b) = a^2 + 3ab + 2a + 2b^2 + 2
\end{aligned}$$

Poi mettiamo a sistema queste sei equazioni ponendole a zero e cerchiamo di semplificarle per quanto possibile:

$$\begin{cases} 2a^2 + 3ab + a = a(2a + 3b + 1) = 0 \\ 3a^2 + 3ab + a = a(3a + 3b + 1) = 0 \\ -5a^2 + 2ab - 6a = a(-5a + 2b - 6) = 0 \\ a(a+b) = 0 \\ -a^2 + 3ab + 2b^2 + 2 = 0 \\ a^2 + 3ab + 2a + 2b^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che la piú semplice è la quarta equazione: $a(a+b) = 0$ da cui deduciamo che $a = 0$ o $a = -b$. Sfruttando queste uguaglianze il sistema trovato è equivalente ai due seguenti sistemi ottenuti rispettivamente ponendo nel primo $a = 0$ e nel secondo $b = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ b^2 + 1 = 0 \\ b^2 + 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -a^2 + a = 0 \\ a = 0 \\ -7a^2 - 6a = 0 \\ 0 = 0 \\ -2a^2 + 2 = 0 \\ 2a + 2 \end{cases}$$

Osserviamo che il secondo sistema è chiaramente impossibile quindi discutiamo solo le soluzioni del primo dove abbiamo posto $a = 0$ e ottenuto l'equazione $b^2 + 1 = 0$. Pertanto possiamo concludere che il rango di A su $\mathbb{R}$ è 2 per ogni $a = 0$ e per ogni $b \in \mathbb{R}$, mentre il rango di A su $\mathbb{C}$ è 1 per $a = 0$ e $b = \pm i$ ed è 2 altrimenti.

Riassumendo: il rango di A su $\mathbb{C}$ è 2 per ogni $a \in \mathbb{C}$ e $b \neq \pm i$, mentre su $\mathbb{R}$ è 2 per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Esempio 13.4 (Esercizio di esame, 8pt). `[ES10]` *Dato* $k, a, b, c \in \mathbb{R}$ *ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} kx + y + z = b \\ x + y + 3z = a \\ kx + y + 2z = c \end{cases}$$

discutere le soluzioni del sistema al variare di $k, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per comodità scambiamo la prime e seconda equazione.

```
Riduciamo con Gauss la matrice completa del sistema
M:=Mat[[1, 1, 3, a],
       [k, 1, 1, b],
       [k, 1, 2, c]];
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,      1,       3,       a]
     2^a-k*1^a [0, -k + 1, -3k + 1, -ka + b]
     3^a-k*1^a [0, -k + 1, -3k + 2, -ka + c]
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,      1,       3,       a]
-------------- [0, -k + 1, -3k + 1, -ka + b]
     3^a-1*2^a [0,      0,       1,  -b + c]
```

- Se $k \neq 1$ la matrice incompleta ha tre pivot non nulli ed è quindi non singolare per ogni a, b, c, il suo rango è 3, questo forza il rango della completa ad essere 3 e per Rouchè-Capelli il sistema ammette un unica soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Se $k = 1$ il rango della matrice incompleta, dato che ha solo due pivot non nulli è 2 per ogni a, b, c. Abbiamo quindi infinite o nessuna soluzioni. La matrice completa diviene

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & -2 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & -b+c \end{array} \right)$$

  Dato che la prima e seconda colonna sono uguali, il rango di M' è uguale al rango della sottomatrice

$$M'_{(1,2,3);(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & -a+b \\ 0 & 1 & -b+c \end{pmatrix}$$

  Questa è una matrice quadrata di ordine tre e si vede facilmente che

$$\det(M'_{(1,2,3);(2,3,4)}) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -a+b \\ 1 & -b+c \end{pmatrix} = -2(-b+c) - (-a+b) = a + b - 2c$$

  Quindi per $k = 1$

  - Se $k = 1$, $a + b - 2c \neq 0$ il rango della matrice completa è 3, diverso dal rango dell'incompleta, e quindi il sistema non ha soluzioni.
  - Se $k = 1$, $a + b - 2c = 0$ e si verifica facilmente che il rango della matrice completa è 2, uguale al rango dell'incompleta, e quindi il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Ricapitolando

- Se $k \neq 1$ esiste un unica soluzione.
- Se $k = 1$
  - e $a + b - 2c = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni.
  - e $a + b - 2c \neq 0$ il sistema non ha soluzioni.

□

Proposto: determinare esplicitamente le soluzioni del sistema.

Esempio 13.5. [FFF23] *Abbiamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *Voglo trovare le righe linearmente indipendenti, e per quelle dipendenti la loro espressione come combinazione linerare delle indipendenti.*

Invece di aggiungere a destra la colonna $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *producendo la matrice* $S = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 1 & 2 & 3 & v_2 \\ 4 & 5 & 6 & v_3 \end{array}\right)$ *aggiungiamo i vettori* $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ *alla prima, seconda e terza riga rispettivamente, producendo la matrice*

$$S_1 = (A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Riduciamo fino ad ottenere una forma triangolare superiore per A.

```
Use R::=Q[v[1..3]];
S:=Mat([[1,1,1,v[1]],
        [1,2,3,v[2]],
        [4,5,6,v[3]]]);
S1:=Mat([[1,1,1,1,0,0],
         [1,2,3,0,1,0],
         [4,5,6,0,0,1]]);

RiduciScala(S);
Mat[[1, 1, 1,  v[1]],
    [0, 1, 2, -v[1] + v[2]],
    [0, 0, 0, -3v[1] - v[2] + v[3]]

RiduciScala(S1);
[Mat[[1, 1, 1,  1,  0, 0],
     [0, 1, 2, -1,  1, 0],
     [0, 0, 0, -3, -1, 1]]
```

In ambedue i casi, trovo che la prima e seconda riga sono linearmente indipendenti, mentre per la terza

$$A_3 = 3A_1 + A_2$$

Osservazione 13.6. [FFF20] *Quando opero con questo metodo sulla matrice* $[A|B]$ *(A matrice, B colonne aggiunte, una sola colonna di polinomi oppure la colonna coi vettori* $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ *come nell'Esempio 13.5 posso effettuare scambi di colonna (entro la matrice A) senza alterare il risultato - cambiare coerentemente l'ordine delle componenti dei vettori non altera le relazioni lineari tra essi.*

Esercizio 13.7. `[EE88]` *Dato $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 & 2 \\ c & d & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Determinare, al variare di a, b, c, d il rango di A.

Soluzione. Il rango di A è al massimo 4 e al minimo 1. Per semplificare la matrice, facciamo due operazioni.

$$\begin{matrix} 1^a \to 1^a - b \cdot 4^a \\ 2^a \to 1^a - d \cdot 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 & 2 \\ c & d & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 1 & 2 \\ c & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare il rango di questa matrice. Osserviamo che la terza e quarta colonna sono multiple l'una dell'altra, quando cerco un minore non le considero contemporaneamente. Tra le due sottomatrici possibili scelgo quella con la quarta colonna per semplicità di calcolo e ne calcolo il determinante sviluppando con Laplace secondo la quarta riga e poi secondo l'ultima riga:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^{4+2} \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{3+1} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1 + 0 + a - b \end{aligned}$$

Quindi se $a - b - 1 \neq 0$ si ha che $\det A \neq 0$ e quindi il rango di A è 4.

Se $a - b - 1 = 0$ il rango è forzatamente minore di 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b+1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ b & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo minore ha determinante non nullo pertanto il rango di A è ≥ 3 ma è anche minore di 4, quindi se $a - b - 1 = 0$ il rango di A è uguale a 3.

$\square$

13.2 Come usare la riduzione

Abbiamo i seguenti passi elementari di riduzione su una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$

1. Scambio delle righe $A_i \leftrightarrow A_j$. Passo di Gauss.

2. Scambio delle colonne $A_i \leftrightarrow A_j$.
3. Riduzione $A_j \to A_j + \lambda A_i$, con $i < j$ e cancellazione della componente non nulla piuù a sinistra della riga A_j. Passo di Gauss.
4. Riduzione $A_j \to A_j + \lambda A_i$, con $i > j$ e cancellazione della componente non nulla più a destra della riga A_j.
5. Moltiplicazione di riga per scalare $A_j \to \lambda A_j$ con $\lambda \neq 0$.
6. Sostituzione di riga con combinazione lineare: $A_j \to \alpha A_j + \beta A_i$, con $\alpha \neq 0$. I casi 3, 4 e 5 possono essere visti come casi particolari di questo.
7. Moltiplicazione di colonna per scalare $A_j \to \lambda A_j$ con $\lambda \neq 0$.

Ricordiamo che ciascuno di questi passi può essere attuato moltiplicando la matrice A a destra o a sinistra per una opportuna matrice.

Ricordiamo quali passi possiamo usare e come durante una riduzione per svolgere le seguenti operazioni complesse:

a Risolvere un sistema di equazioni: tutte, avendo cura di scambiare le variabili nella soluzione se ho effettuato uno scambio di colonne nella riduzione.

b Ridurre una matrice a scala: possibile anche solo usando lo scambio di righe 1 e la riduzione 3 con $i < j$.

c Ridurre una matrice in forma standard: possibile anche solo usando lo scambio di righe 1 e le riduzioni 3,4 con $i < j$ e $i > j$.

d Ridurre una matrice in forma normale: possibile anche solo usando lo scambio di righe 1, le riduzioni 3,4 con $i < j$ e $i > j$ e lo scambio di colonne 2.

e Calcolare il determinante (solo matrice quadrata): le riduzioni 3 e 4 sempre. Gli scambi di riga/colonna 1, 2 ricordandomi che devo cambiare segno. Le moltiplicazioni di riga/colonna 5/7 e la combinazione lineare 6, ricordandomi che devo moltiplicare per λ, α.

f Vedere se il determinante è nullo: tutte le operazioni, senza memoria.

g Calcolo del rango: tutte le operazioni, senza memoria.

h Determinazione di colonne indipendenti in A mediante il metodo dei pivot. Tutte le operazioni, ma se effettuo uno scambio di colonne devo ricordarmene.

i Determinazione delle righe indipendenti in A mediante il metodo dei pivot. Tutte le operazioni, ma se effettuo uno scambio di righe devo ricordarmene.

j Vedere se vi sono righe indipendenti in A mediante la tecnica della riga nulla: tutte le operazioni.

k Determinare le righe indipendenti e le relazioni lineari tra le righe di A usando la tecnica delle tag-variabli o tag-vettori: tutte le operazioni.

Ricordiamo anche che

A Se una riga di una matrice si riduce a zero senza scambi di riga, questa riga è combinazione lineare di tutte le righe precedenti. Se uso il metodo delle tag-variabli o tag-vettori, posso anche sapere di quali righe esattamente ed i coefficenti della combinazione.

13.3 Esercizi svolti

Esempio 13.8. `[FFX21]` *Determinare le relazioni lineari tra i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1,2,3,2,3), \underline{v}_2 = (1,1,0,3,3), \underline{v}_3 = (1,-2,-9,6,3), \underline{v}_4 = (3,4,3,8,3)$$

Mettiamo i vettori per riga in una matrice, aggiungiamo una colonna di variabili tag e riducamo.

```
Use R::=Q[v[1..4]];
M:=Mat([[1,2,3,2,3,v[1]],
        [1,1,0,3,3,v[2]],
        [1,-2, -9, 6, 3,v[3]],
        [3, 4, 3, 8,3,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, 3, v[1]]
     2^a-1*1^a [0, -1, -3, 1, 0, -v[1] + v[2]]
     3^a-1*1^a [0, -4, -12, 4, 0, -v[1] + v[3]]
     4^a-3*1^a [0, -2, -6, 2, -6, -3v[1] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, 3, v[1]]
-------------- [0, -1, -3, 1, 0, -v[1] + v[2]]
     3^a-4*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 3v[1] - 4v[2] + v[3]]
     4^a-2*2^a [0, 0, 0, 0, -6, -v[1] - 2v[2] + v[4]]
```

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti, il vettore $\underline{v}_3$ è combinazione lineare dei primi due con relazioni lineare

$$3v[1] - 4v[2] + v[3] = \underline{0} \Rightarrow v[3] = -3v[1] + 4v[2]$$

Esercizio 13.9. `[UI22]` *Dato il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + hy + kz = k \\ kx + z = 0 \\ x + hy + z = 2 \end{cases}$$

Al variare dei parametri reali $h, k \in \mathbb{R}$ discutere il numero di soluzioni.

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Possiamo semplificare la matrice usando l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{array}{r} \\ 2^a \longrightarrow 2^a - k \cdot 1^a \\ 3^a \longrightarrow 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & k & k \\ 0 & -hk & -k^2+1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k+1 & -k+2 \end{array}\right)$$

Notiamo che abbiamo potuto fare queste operazioni di Gauss perchè non abbiamo effettuato divisioni per elementi che possano essere nulli al variare di h, k; inoltre sostituire ad una riga la riga stessa eventualmente sommata una riga nulla è sempre ammissibile perchè le operazioni di Gauss non cambiano il valore assoluto del determinante, e dato che non abbiamo effettuato scambi di righe non cambia neppure il determinante. Nè cambia il rango della matrice.

La matrice incompleta A è in forma triangolare superiore, quindi

$$\det A = h \cdot k \cdot (k-1)$$

Osserviamo che

$$\det A \neq 0 \iff h \neq 0 \text{ e } k \neq 0, 1$$

In questo caso il rango della matrice incompleta è 3, il rango della completa è forzatamente 3 e quindi il sistema ammette un'unica soluzione. Analizziamo adesso singolarmente i tre casi particolari.

Caso $k = 0$. Preferiamo considerare la matrice $[A|\underline{b}]$ e non la sua forma ridotta con Gauss per semplicità. Il rango della matrice incompleta è ≤ 2. Sostituiamo $k = 0$ nella matrice $[A|\underline{b}]$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Notiamo che il rango della matrice incompleta è 2, dato che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare. Calcoliamo il rango della matrice completa. Tale determinante è chiaramente 3 dato che la sottomatrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

è non singolare. Il sistema è quindi impossibile per il teorema di Rouchè-Capelli.

Caso $k = 1$. Anche in questo caso preferiamo considerare la matrice $[A|\underline{b}]$. Dato che $\det A = 0 \Rightarrow rk\,A \leq 2$. Sostituiamo $k = 1$ ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcoliamo i ranghi delle matrici incompleta e completa prendendo in considerazioni due sottomatrici che hanno entrambe determinante uguale, in valore assoluto, ad h:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h \qquad \det \left(\begin{array}{cc|c} h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 1 & 2 \end{array}\right) = h$$

Quindi se $h \neq 0$, il rango della matrice incompleta è 2 mentre il rango della matrice completa è 3 e pertanto il sistema non ammette soluzioni. Se $h = 0$ invece la matrice diviene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

In questo caso il rango della matrice incompleta è 1 (una sola colonna dell'incompleta è linearmente indipendente), mentre il rango della completa è 2, dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

In ogni caso se $k = 1$ il rango della completa e dell'incompleta sono diversi quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema non ammette soluzioni.

Caso $h = 0$. Sostituiamo $h = 0$ nella matrice ridotta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & k & k \\ 0 & -hk & -k^2+1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k+1 & -k+2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & -k^2+1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k+1 & -k+2 \end{array}\right) = A$$

Il rango della matrice incompleta dipende da k

- Se $k = 1$ la matrice diviene
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
, il rango della incompleta è 1, quello della completa è 2 e quindi non ci sono soluzioni.
- Se $k \neq 1$, l'incompleta ha due pivot, ed ha quindi rango 2, la completa ha una unica sottomatrice potenzialmente non singolare, $A_{(1,2,3);(1,3,4)}$. Svolgiamo i conti
$$\begin{aligned} \det A_{(1,2,3);(1,3,4)} &= 0 \\ (1-k^2)(2-k) - (-k^2)(1-k) &= 0 \\ (1-k)[(1+k)(2-k) + (k^2)] &= 0 \\ (1-k)(2+k) &= 0 \\ k &= -2 \end{aligned}$$

  Quindi il rango dell'incompleta è 1,
  - Se $k = -2$ il rango della completa è 2 e quindi abbiamo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
  - Se $k \neq -2$ il rango della completa è 3 e non esistono soluzioni.

Sintetizziamo l'esercizio:

- $h \neq 0, k \neq 0, 1$ il sistema ha un'unica soluzione;
- se $h = 0$, $k = -2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni;
- altrimenti il sistema è impossibile

□

Esercizio 13.10. [LL12] *Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcolare il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+3c & a+1 & a+c & b \\ 1 & a+2c & c & b+c & a+b+c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Soluzione. La matrice A ha ordine 2×3 pertanto il rango di A risulta per definizione minore uguale a 2. Consideriamo la sottomatrice $A_{(2,1)} = (1)$ che ha determinante 1 quindi non nullo. Possiamo affermare che $1 \leq rk\, A \leq 2$. Affichè il rango sia 1, bisogna che tutte le sottomatrici 2×2 di A abbiano determinante nullo.

Vogliamo esaminare determinanti il piu' possibile semplici, quindi cominciamo dalla sottomatrice formata dalla prima e terza colonna e ne calcoliamo il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = c(a+1) - (a+1) = (a+1)(c-1)$$

Osserviamo immediatamente che se $a = -1$ e $c = 1$ la matrice assegnata diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & b+1 & b \end{pmatrix}$$

la cui sottomatrice formata dalle prime due colonne ha determinante non nullo per ogni valore di b. Quindi se $a = -1, c = 1, \forall\, b$ abbiamo che $rk\, A = 2$.

Supponiamo adesso $a \neq -1, c = 1$. Allora la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2a+3 & a+1 & a+1 & b \\ 1 & a+2 & 1 & b+1 & a+b+1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di una sottomatrice 2×2, per esempio scegliamo la prima e la quarta colonna:

$$\det \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix} = (a+1)(b+1) - (a+1) = (a+1)(b+1-1) = b(a+1)$$

Poiche $c = 1, a \neq -1$ abbiamo che se $b \neq 0 \implies rk\, A = 2$, altrimenti la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2a+3 & a+1 & a+1 & 0 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo per esempio la prima e l'ultima colonna:

$$\det \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = (a+1)^2 \neq 0 \iff a \neq -1$$

ma essendo in questo caso abbiamo che $rk\, A = 2$.

Rimane l'ultimo caso $a = -1, c \neq 1$ dove la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2+3c & 0 & -1+c & b \\ 1 & -1+2c & c & b+c & -1+b+c \end{pmatrix}$$

Basta scegliere la prima e la quarta colonna

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1+c \\ 1 & b+c \end{pmatrix} = -1(-1+c) = 1 - c \neq 0 \iff c \neq 1$$

Quindi esiste una sottomatrice con determinante non nullo e anche in questo caso $rk\, A = 2$.

Notiamo che, per vedere se fosse possibile avere $rk\, A = 1$, avremmo potuto imporre che tutti i determinanti delle sottomatrici 2×2 fossero nulli. Questo però avrebbe richiesto di risolvere un sistema di equazioni non lineari non banale nelle variabili a, b, c. Il procedimento seguito equivale a risolvere le equazioni una dopo l'altra, ed in *in questo caso* $\square$

Esercizio 13.11. `[MK01]` *Discutere (*NON determinare*) le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} tx + y + tz + z = 0 \\ tx + 3y + z = 1 \\ (t+1)x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

1. *Su* $\mathbb{R}$*, con* $t \in \mathbb{R}$*.*

2. *Su* $\mathbb{C}$*, con* $t \in \mathbb{C}$*.*

Soluzione. Scriviamo la matrice completa associata al sistema.

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & t+1 & 0 \\ t & 3 & 1 & 1 \\ t+1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Non è immediato calcolare i ranghi delle matrici completa ed incompleta. Vogliamo operare almeno un passo di riduzione di Gauss, ma preferiremmo non avere come primo pivot un termine dipendente dal parametro t. Scambiamo la prima e seconda colonna, operazione che lascia invariato il rango sia della matrice completa (ovviamente) che dell'incompleta (non abbiamo spostato la colonna dei termini noti).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t+1 & 0 \\ 3 & t & 1 & 1 \\ 2 & t+1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

e procediamo con Gauss per cancellare gli elementi sotto questo primo pivot.

$$\begin{array}{r} \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t+1 & 0 \\ 0 & -2t & -3t-2 & 1 \\ 0 & -t+1 & -2t & 2 \end{array}\right)$$

In questa forma è più semplice calcolare il rango. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta sopra scritta, sviluppando con la regola di Laplace rispetto alla prima colonna ed otteniamo facilmente il polinomio $t^2 + t + 2$. Tale polinomio è di secondo grado con discriminante negativo. Pertanto

- in $\mathbb{R}$ il polinomio $t^2 + t + 2$ e quindi il determinante della marice incompleta è sempre non nullo. La matrice incompleta è quindi non singolare ed ha rango 3, forzando la matrice completa ad avere rango uguale, 3. Il sistema ha pertanto una unica soluzione.

- In $\mathbb{C}$, il determinante della matrice incompleta è non nullo se $t \neq -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ e in tal caso il sistema, come sopra, ammette un'unica soluzione. Mentre nel caso in cui $t = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ il rango della matrice incompleta è 2. Calcoliamo il rango della matrice completa. Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(A_{(1,2,3);(2,3,4)}) &= \det \begin{pmatrix} t & t+1 & 0 \\ -2t & -3t-2 & 1 \\ -t+1 & -2t & 2 \end{pmatrix} \\ &\text{(Laplace su terza colonna)} \\ &= 0 - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} t & t+1 \\ -t+1 & -2t \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} t & t+1 \\ -2t & -3t-2 \end{pmatrix} \\ &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

  e dato che questo polinomio ha radici ± 1 non si annulla in $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

  Quindi se $t = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ c'è una sottomatrice 3×3 della completa non singolare e quindi il rango della completa è 3 mentre il rango dell'incompleta, come visto, è 2 ed il sistema non ha soluzioni per il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Vediamo adesso negli Esercizi 13.12,13.13 e 13.14 tre modi diversi di trovare le righe indipendenti di una matrice e, per le dipendenti, le loro espressioni come combinazione lineare delle indipendenti. Naturalmente potremmo risolvere il problema per le colonne della matrice trasposta.

Esercizio 13.12. [FFE11] *Determinare il massimo numero di righe linearmente indipendenti, r, della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & -4 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scelte r righe indipendenti, trovare le descrizioni delle rimanenti da queste mediante combinazioni lineari.

Soluzione. Procediamo col metodo delle tag-variabili.

```
M1:=Mat([[3, 2, 2, 1, 0, 1,v[1]],
         [3, 2, 5, 2, 1, 0,v[2]],
         [-3, -2, -11, -4, -3, 2,v[3]],
         [6, 4, 1, 1, 1, 1,v[4]],
         [-3, -2, -2, -1, -2, 1,v[5]]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]]
     2^a-1*1^a [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]]
     3^a+1*1^a [0, 0, -9, -3, -3, 3, v[1] + v[3]]
     4^a-2*1^a [0, 0, -3, -1, 1, -1, -2v[1] + v[4]]
     5^a+1*1^a [0, 0, 0, 0, -2, 2, v[1] + v[5]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]]
-------------- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]]
     3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[3]]
     4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3v[1] + v[2] + v[4]]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -2, 2, v[1] + v[5]]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]],
     [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]],
     [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3v[1] + v[2] + v[4]],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[3]],
     [0, 0, 0, 0, -2, 2, v[1] + v[5]]])
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=2
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0,  1,  v[1]]
-------------- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]]
-------------- [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3v[1] + v[2] + v[4]]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0,  0, -2v[1] + 3v[2] + v[3]]
     5^a+1*3^a [0, 0, 0, 0, 0,  0, -2v[1] + v[2] + v[4] + v[5]]
```

Il rango della matrice è 3, dato che abbiamo tre pivot. Abbiamo quindi esattamente tre righe indipendenti. Abbiamo anche le due relazioni lineari

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases}$$

Volendo tenere come linearmente indipendenti le righe A_1, A_2, A_4, quelle dei pivot (ricordiamo lo scambio righe), abbiamo che

$$A_3 = 2A_1 - 3A_2 + A_3 \text{ e } A_5 = 2A_1 - A_2 - A_4$$

Notiamo che, anche se ci fossimo dimenticati di aver scambiato la terza e quarta riga, il fatto che nella matrice ridotta ci fosse come terza riga un vettore i cui compare la variabile v_4 e non v_5 ce lo avrebbe ricordato. Avremmo potuto scegliere la triple di righe indipendenti in modo diverso, usando le relazioni lineari.

Per esempio, avremmo potuto scegliere come dipendenti la prima e la seconda, e quindi come indipendenti la terza, quarta e quinta. Dalle relazioni avremmo ottenuto

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 = 3A_2 + A_3 \\ -3A_2 - A_3 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 = 3A_2 + A_3 \\ -2A_2 - A_3 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 3/2A_2 + 1/2A_3 \\ A_2 = -1/2A_3 + 1/2A_4 + 1/2A_5 \end{cases}$$

Pero' abbiamo dovuto risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases}$$

rispetto alle variabili A_1, A_2. Se avessimo scelto le variabili A_3, A_5 la soluzione sarebbe stata immediata. □

Esercizio 13.13. [FFE12] *Determinare il massimo numero di righe linearmente indipendenti, r, della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & -4 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scelte r righe indipendenti, trovare le descrizioni delle rimanenti da queste mediante combinazioni lineari.

Soluzione. Ripetiamo l'esercizio precedente col metodo dei tag-vettori

```
M1:=Mat([[ 3,  2,   2,  1,  0, 1  ,1,0,0,0,0],
         [ 3,  2,   5,  2,  1, 0,  0,1,0,0,0],
         [-3, -2, -11, -4, -3, 2,  0,0,1,0,0],
         [ 6,  4,   1,  1,  1, 1,  0,0,0,1,0],
         [-3, -2,  -2, -1, -2, 1,  0,0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
     2^a-1*1^a [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
     3^a+1*1^a [0, 0, -9, -3, -3, 3, 1, 0, 1, 0, 0]
     4^a-2*1^a [0, 0, -3, -1, 1, -1, -2, 0, 0, 1, 0]
     5^a+1*1^a [0, 0, 0, 0, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=3
```

```
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
     3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0]
     4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0],
     [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0],
     [0, 0, 0, 0, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=2
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0]
     5^a+1*3^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 1, 0, 1, 1]
```

e fin qui avremmo trovato le stesse relazioni lineari

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases}$$

Ma continuiamo la riduzione, il che vuol dire che stiamo risolvendo il sistema delle relazioni con Gauss

```
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 7]=-2
Cancello la 7^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 2, 2, 1, 0, 1,    1,  0,  0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 3, 1, 1, -1,  -1,  1,  0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 2, -2,  -3,  1,  0, 1, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0, 0,   -2,  3,  1, 0, 0]
     5^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 0,    0, -2, -1, 1, 1]
```

Dalla quarta e quinta riga della matrice leggiamo immediatamente che

$$A_1 = 3/2A_2 + 1/2A_3 \text{ e } A_2 = -1/2A_3 + 1/2A_4 + 1/2A_5$$

□

Esercizio 13.14. [FFE13] *Determinare il massimo numero di righe linearmente indipendenti, r, della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & -4 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scelte r righe indipendenti, trovare le descrizioni delle rimanenti da queste mediante combinazioni lineari.

Soluzione. Ripetiamo l'esercizio precedente con la definizione: cerchiamo le $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 A_1 + \cdots + x_5 A_5 = \underline{0} \Leftrightarrow x_1(3,2,2,1,0,1) + \cdots + x_5(-3,-2,-2,-1,-2,1) = \underline{0}$$

ovverlo le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -11 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema $A^T \underline{x} = \underline{0}$

```
MT:=Transposed(M);
MT:=Mat([[3, 3, -3, 6, -3],
         [2, 2, -2, 4, -2],
         [2, 5, -11, 1, -2],
         [1, 2, -4, 1, -1],
         [0, 1, -3, 1, -2],
         [1, 0, 2, 1, 1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(MT);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 3, -3, 6, -3]
   2^a-2/3*1^a [0, 0, 0, 0, 0]
   3^a-2/3*1^a [0, 3, -9, -3, 0]
   4^a-1/3*1^a [0, 1, -3, -1, 0]
  0 sotto pivot[0, 1, -3, 1, -2]
   6^a-1/3*1^a [0, -1, 3, -1, 2]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 3, -3, 6, -3],
     [0, 3, -9, -3, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 1, -3, -1, 0],
     [0, 1, -3, 1, -2],
     [0, -1, 3, -1, 2]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 3, -3,  6, -3]
-------------- [0, 3, -9, -3,  0]
  0 sotto pivot[0, 0,  0,  0,  0]
   4^a-1/3*2^a [0, 0,  0,  0,  0]
   5^a-1/3*2^a [0, 0,  0,  2, -2]
   6^a+1/3*2^a [0, 0,  0, -2,  2]
Scambio la 3^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 3, -3, 6, -3],
     [0, 3, -9, -3, 0],
     [0, 0, 0, 2, -2],
```

```
     [0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 0, -2, 2]])
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=2
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 3, -3,  6, -3]
-------------- [0, 3, -9, -3,  0]
-------------- [0, 0,  0,  2, -2]
  0 sotto pivot[0, 0,  0,  0,  0]
  0 sotto pivot[0, 0,  0,  0,  0]
     6^a+1*3^a [0, 0,  0,  0,  0]
```

Abbiamo che il rango è 3, dato che ci sono 3 pivot. Abbiamo anche che la prima, terza e quarta colonna sono indipendenti. Lo sono quindi la prima, terza e quarta riga della matrice M, visto che stavamo lavorando sulla trasposta M^T. Vogliamo trovare le relazioni, ovvero le soluzioni. Continuiamo con la riduzione all'indietro, mettendo la matrice in forma standard.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*+1/3  [1, 1, -1, 2, -1]
     2^a*+1/3  [0, 1, -3, -1, 0]
     3^a*+1/2  [0, 0, 0, 1, -1]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 4  pivot
   1^a*+2*3^a  [1, 1, -1, 0, 1]
   2^a+1*3^a   [0, 1, -3, 0, -1]
-------------- [0, 0, 0, 1, -1]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2  pivot
   1^a-1*2^a   [1, 0,  2, 0,  2]
-------------- [0, 1, -3, 0, -1]
-------------- [0, 0,  0, 1, -1]
-------------- [0, 0,  0, 0,  0]
-------------- [0, 0,  0, 0,  0]
-------------- [0, 0,  0, 0,  0]
```

ed abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 3x_3 + x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases}$$

Sostituiamo

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad \rightarrow \quad & (-2x_3 - 2x_5 3x_3 + x_5, x_3, x_5, x_5) = \\ & = x_3(-2, 3, 1, 0, 0) + x_5(-2, 1, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo le relazioni, al variare delle variabili x_3, x_5. Per esempio, se

- $x_3 = 1,\ x_5 = 0$ che ci dà che $(-2, 3, 1, 0, 0)$ è soluzione ed quindi abbiamo

$$-2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \longrightarrow A_1 = 3/2A_2 + 1/2A_3$$

- $x_3 = 0,\ x_5 = 1$ che ci dà che $(-2, 1, 0, 1, 1)$ è soluzione ed quindi abbiamo

$$-2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \longrightarrow A_2 = 1/2A_3 + 1/2A_4 + 1/2A_5$$

□

13.4 Esercizi proposti

Esercizio 13.15. [GG82] *Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2xk - 2x + yk - y + zk - 3z + 6 = 0 \\ 2xk - 2x + 3yk + 2y + 4zk + 11 = 0 \\ xk - x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k.

Soluzione. Se $k = 0, \pm 1$ il sistema è impossibile, se $k \neq 0, \pm 1$, il sistema ha un'unica soluzione. □

Esercizio 13.16. [GG77] *Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} xk + y + 2z + 3 = 0 \\ xk + y + 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k.

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema è impossibile; se $k \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione. □

Esercizio 13.17. [GG83] *Dato $a, k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} y + 2z + 2a + 1 = 0 \\ xk + 2z + 2a + 1 = 0 \\ xk + y + 2z + 3a + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di a, k.

Soluzione. Se $k = 0,\ a \neq 0$ il sistema è impossibile; se $k = 0,\ a = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni; se $k \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione. □

Esercizio 13.18 (Proposto)**.** [FFA00] *Introduciamo l'operazione sostituzione di colonna con combinazione lineare di colonne: $A^j \to \alpha A^j + \beta A^i$, con $\alpha \neq 0$. Per cosa posso usare questa nuova operazione e con che cautele?*

Capitolo 14

Quattordicesima Lezione

14.1 Formula di Cramer e formula dell' inversa

Teorema 14.1 (Cramer - dimostrazione non vista in classe e non richiesta)**.** `[FFF37]` *Sia dato il sistema* $A\underline{x} = \underline{b}$*, con* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *con* $A = [A^1, \ldots, A^n]$ *non singolare (data per colonne). Sia*

$$B_i = \left(A^1, \ldots, A^{i-1}, \underline{b}, A^{i+1}, \ldots, A^n\right)$$

la matrice uguale ad A tranne che la i-esima colonna viene sostituita con $\underline{b}$*. Allora*

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

Dimostrazione. Sappiamo già che la soluzione esiste unica, dato che A è non singolare. Partendo a ritroso dalla formula

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \Leftrightarrow \det(A)x_i = \det(B_i)$$

vorrei usare il teorema di Binet sulla formula

$$AX_i = B_i$$

Quindi devo trovare delle matrici X_i, con $i : 1, \ldots, n$ tali che $\det X_i = x_i$ e $A \cdot X_i = B_i$.

Costruiamo X_i **per colonne**:

$$X_i = \left(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{i-1}, \underline{x}, \underline{e}_{i+1}, \ldots, \underline{e}_n\right)$$

Per costruzione, $\det X_i = x_i$. Se moltiplichiamo a destra A per X, ricordando che $A\underline{x} = \underline{b}$ ed usando le regola della moltiplicazione a destra (le colonne di X_i mi danno la combinazione lineare delle colonne di A per ottenere il risultato) otteniamo che $\forall\ i : 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
A \cdot X_i &= A \cdot \left(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{i-1}, \underline{x}, \underline{e}_{i+1}, \ldots, \underline{e}_n\right) \\
&= \left(A \cdot \underline{e}_1, \ldots, A \cdot \underline{e}_{i-1}, A\underline{x}, A \cdot \underline{e}_{i+1}, \ldots, A \cdot \underline{e}_A\right) \\
&= \left(A^1, \ldots, A^{i-1}, \underline{b}, A^{i+1}, \ldots, A^n\right) \\
&= B_i
\end{aligned}$$