# Capitolo 3

# Terza lezione

## 3.1 Esercizi svolti

**Esempio 3.1.** [AAA46] *Dato il polinomio* $x^3 - 2x^2 - 5x + 10$*, abbiamo che* $f(2) = 0$ *e* $f(\sqrt{5}) = 0$*. Per il teorema di Ruffini, abbiamo che* $x - 2$ *e* $x - \sqrt{5}$ *dividono* $x^3 - 2x^2 - 5x + 10$*. Abbiamo infatti*

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = (x - 2)(x^2 - 5) = (x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

**Osservazione 3.2.** [BBB08] *Sia* $A$ *un campo. Se esiste* $a \in A$ *zero divisore,* $a$ *non è invertibile. Quindi un campo non ha zero divisori.*

*Dimostrazione.* Sia $a \in A$ zero divisore. Allora esiste $b \in A,\ b \neq 0$ tale che $a \cdot b = 0$. Supponiamo per assurdo che $a$ sia invertibile. Allora esiste $a^{-1} \in A$ tale che $a^{-1} \cdot a = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a^{-1} \cdot a \cdot b &= a^{-1} \cdot 0 \\ 1 \cdot b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Ed abbiamo ottenuto $b = 0$ contro l'ipotesi. Questa è una contraddizione (un assurdo) e quindi è assurdo supporre che $a$ sia invertibile. Quindi $a$ non è invertibile. □

**Osservazione 3.3** (Legge di cancellazione)**.** [BBX08] *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo, e* $a, b, c \in \mathbb{K}$*,* $a \neq 0$*. Allora* $ab = ac \Leftrightarrow b = c$*.*

*Dimostrazione.* Dato che $a \neq 0$, $\exists\ a^{-1}$, quindi

$$ab = ac \Leftrightarrow a^{-1}ab = a^{-1}ac \Leftrightarrow b = c$$

□

**Esercizio 3.4.** [AAV89]

*Dire per quali* $a, b \in \mathbb{Q}$ *i polinomi* $f(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + 3$*,* $g(x) = 3x^3 + (a-b)x^2 + a$ *in* $\mathbb{Q}[x]$ *sono uguali.*

*Soluzione.* Usiamo il principio di identità dei polinomi

$$ax^3 + (a+b)x^2 + 3 \underset{\mathbb{Q}[x]}{\equiv} 3x^3 + (a-b)x^2 + a$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a+b = a-b \\ 0 = 0 \\ 3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$$

□

Un metodo di fattorizzazione è quello della forza bruta - si traduce il problema della fattorizzazione in un problema di risoluzione di un sistema polinomilale.

Dato che risolvere sistemi di equazioni polinomiali non è facile, il metodo della forza bruta non sempre è usabile in pratica.

**Esercizio 3.5.** [MS02] *Fattorizzare il polinomio* $f(x) = x^4 + 1$ *in* $\mathbb{R}[x]$.

*Soluzione.* Vediamo come procedere con il metodo della forza bruta.

Dato che $x^4+1$ non ha radici reali, perchè è somma di quadrati, $x^4+1$ non ha fattori lineari per il Teorema di Ruffini. Se fosse fattorizzabile, dovrebbe quindi avere due fattori di grado 2, siano $x^2+bx+c$ e $x^2+cx+d$. Possiamo limitarci a polinomi monici (coefficente del termine di testa uguale ad 1). Quindi dovrebbe valere

$$\begin{aligned} x^4+1 &\underset{\mathbb{K}[x]}{\equiv} (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \\ &\underset{\mathbb{K}[x]}{\equiv} x^4 + x^3(a+c) + x^2(ac+b+d) + x(bc+ad) + bd \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = a+c \\ 0 = ac+b+d \\ 0 = bc+ad \\ 1 = bd \end{cases} \end{aligned}$$

Per il principio di identitá dei polinomi. Svolgendo i calcoli si vede che le uniche soluzioni sono le due quadruple

$$a = \sqrt{2},\ b = d = 1,\ c = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad a = -\sqrt{2},\ b = d = 1,\ c = \sqrt{2}$$

che danno, a meno dell'ordine dei fattori, la stessa fattorizzazione,

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

□

**Esercizio 3.6.** [AAA78] *Fattorizzare in* $\mathbb{R}[x]$ *il polinomio* $p(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9$.

*Soluzione.* Proviamo il metodo del gcd. Dobbiamo calcolare

$$\gcd(p(x), p(x)') = \gcd(x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9, 6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 6x + 9)$$

Calcoliamo il gcd

```
[x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9, 6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 6x + 9)

(6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 6x + 9, -65x^4 - 88x^3 + 90x^2 + 264x + 315)

(-65x^4 - 88x^3 + 90x^2 + 264x + 315,-73x^3 + 20x^2 + 219x - 60)

(-73x^3 + 20x^2 + 219x - 60,-x^2 + 3)

(-x^2 + 3,0)
```

Quindi $\gcd(p(x), p(x)') = x^2 - 3$ e $x^2 - 3$ è un fattore multiplo di $p(x)$ (il prodotto dei due fattori irriducibili dello stesso grado $x - \sqrt{3}$ e $x + \sqrt{3}$). Quindi $(x^2 - 3)$ ha molteplicità almeno 2. Vediamo se ha molteplicità 3

$$\frac{p(x)}{(x^2-3)^2} = x^2 + x + 1$$

Che è irriducibile su $\mathbb{R}$ dato che ha il discriminante negativo, e la molteplicità di $x^2 - 3$ è quindi esattamente 2. Quindi

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 3)^2$$

Per vedere che la molteplicità di $x^2 - 3$ è esattamente 2 avremmo anche potuto controllare, facendo la divisione, che $(x^2 - 3)^3 \nmid p(x)$ □

**Esercizio 3.7.** `[AAA77]` *Fattorizziamo il polinomio*

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)^2(x^2 - 5)^3 = x^{12} - 20x^{10} + 158x^8 - 624x^6 + 1285x^4 - 1300x^2 + 500$$

*usando la regola della derivata formale. Teniamo il polinomio sempre come fattorizzato per chiarire i conti ed i concetti, ovviamente se partissimo da un polinomio gia' fattorizzato non dovremmo fare più nulla.*

*Calcolo*

$$f'(x) = 12x^{11} - 200x^9 + 1264x^7 - 3744x^5 + 5140x^3 - 2600x$$

*So, per la regola di derivazione del prodotto che vale*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2-1)'(x^2-2)^2(x^2-5)^3 + (x^2-1)^1\left((x^2-2)^2\right)'(x^2-5)^3 + (x^2-1)^1(x^2-2)^2\left((x^2-5)^3\right)' \\
f'(x) &= 2x(x^2-2)^2(x^2-5)^3 + (x^2-1)(2x(x^2-2))(x^2-5)^3 + (x^2-1)(x^2-2)^2(2x(x^2-5)^2) \\
&= (x^2-2)(x^2-5)^2[2x(x^2-2)(x^2-5) + (x^2-1)(2x)(x^2-5) + (x^2-1)(x^2-2)(2x(x^2-5))]
\end{aligned}$$

*Chiaramente $(x^2 - 2)(x^2 - 5)^2$ è un fattore comune tra $f(x)$ ed $f'(x)$. Che sia il $\gcd(f(x), f'(x))$ segue dal Teorema 4.38. Avremmo quindi potuto trovare direttamente*

$$\gcd(f(x), f'(x)) = (x^2 - 2)(x^2 - 5)^2 = x^6 - 12x^4 + 45x^2 - 50$$

*usando l'algoritmo Euclideo. Avendo trovato un fattore di $f(x)$, dividiamo quest'ultimo polinomio per il fattore e troviamo un secondo fattore*

$$\frac{(x^2-1)(x^2-2)^2(x^2-5)}{(x^2-2)(x^2-5)^2} = (x^2-1)(x^2-2)(x^2-5) = x^6 - 8x^4 + 17x^2 - 10$$

*e potremmo poi continuare a ridurre questi fattori*

$$(x^2-2)(x^2-5)^2 = x^6-12x^4+45x^2-50 \qquad (x^2-1)(x^2-2)(x^2-5) = x^6-8x^4+17x^2-10$$

*Notiamo che sarà nutile insistere con il metodo della derivata formale sul secondo fattore, dopo la divisione non ci sono più fattori multipli e il* gcd *con la derivata verrebbe banalmente* 1.

**Esercizio 3.8.** [BBB94] *Fattorizzare in* $\mathbb{Q}[x]$ *il polinomio*

$$x^6-5x^5+8x^4-x^3-15x^2+24x-12$$

*Soluzione.* Dato che i divisori del termine noto sono $1,2,3,4,6,12$ e l'unico divisore del termine di testa è 1, le possibili radici razionali di $f(x)$ sono

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$$

Iniziamo a testare e calcoliamo

$$f(1) = 1-5+8-1-15+24-12 = 0.$$

Quindi $x-1$ è un fattore di $f(x)$ pertanto si divide $f(x)$ per $x-1$ e si ottiene:

$$x^6-5x^5+8x^4-x^3-15x^2+24x-12 = (x-1)(x^5-4x^4+4x^3+3x^2-12x+12)$$

Ripartiamo cercando di fattorizzare

$$g(x) = x^5-4x^4+4x^3+3x^2-12x+12.$$

Dato che il termine noto e quello di testa non sono cambiati, dobbiamo testare tutte le candidate radici. Notiamo che:

$$\begin{aligned} g(1) &= 1-4+4+3-12+12 \neq 0 \\ g(-1) &= -1-4-4+3+12+12 \neq 0 \\ g(2) &= 32-4\cdot16+4\cdot8+3\cdot4-12\cdot2+12 = 0. \end{aligned}$$

Quindi $x-2$ è un fattore di $g(x)$. Scomponiamo $g(x)$ come segue:

$$\begin{aligned} x^6-5x^5+8x^4-x^3-15x^2+24x-12 &= (x-1)(x^5-4x^4+4x^3+3x^2-12x+12) \\ &= (x-1)(x-2)(x^4-2x^3+3x-6) \end{aligned}$$

Poniamo $h(x) = x^4-2x^3+3x-6$ e cerchiamo di fattorizzarlo. Il termine noto è cambiato, adesso è 6, quindi possiamo evitare le candidate radici $\pm12$. Possiamo evitare anche le candidate radici $\pm1$ che, non essendo radici di $g(x)$, non possono esserlo di $h(x)$. Dobbiamo testare tutte le altre le candidate radici.

Notiamo che, nuovamente $h(2) = 0$, quindi $x-2$ è un fattore di $h(x)$ ed essendo anche un fattore di $g(x)$ e $f(x)$ ha molteplicità almeno 2.

Dividiamo quindi $h(x)$ per $x-2$, ottenendo che

$$h(x) = x^4-2x^3+3x-6 = (x-2)(x^3+3)$$

Ed il fattore $x^3+3$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$ per il Criterio di Eisenstein, $p=3$. A questo punto abbiamo che la fattorizzazione in irriducibili del polinomio

$$x^6-5x^5+8x^4-x^3-15x^2+24x-12$$

su $\mathbb{Q}$ è $(x-1)(x-2)^2(x^3+3)$. □

**Esercizio 3.9.** `[MMX78]` *[Proposto] Fattorizzare il polinomio dell'esercizio precedente su $\mathbb{R}$.*

**Esercizio 3.10.** `[MM11]` *Fattorizzare in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ il polinomio*

$$f(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4$$

*Soluzione.* Usando la regola delle radici razionali vediamo che le possibili radici sono $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Si verifica facilmente che $f(\pm 1), f(\pm 2), f(\pm 4) \neq 0$ e quindi nessuna delle possibili radici è effettivamente una radice.

Proviamo a fattorizzare su $\mathbb{R}[x]$ con il metodo della molteplicità pertanto calcoliamo un gcd tra $f(x)$ e $f'(x)$ ovvero

$$\gcd(x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4, 6x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 4) = x^2 - 2$$
$$x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4 = (x^2 - 2)^2(x^2 + x + 1).$$

Osserviamo che il polinomio $x^2 + x + 1$ è irriducibile su $\mathbb{R}[x]$ avendo discriminante negativo e quindi è irriducibile anche su $\mathbb{Q}[x]$.

Osserviamo inoltre che in $\mathbb{Q}[x]$ anche $x^2 - 2$ è irriducibile e pertanto una fattorizzazione in irriducibili di $f(x)$ è

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2)^2.$$

Mentre in $\mathbb{R}[x]$, il polinomio $x^2 - 2$ ha le due radici $\pm\sqrt{2}$ e quindi una fattorizzazione in irriducibili è

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2.$$

□

**Esercizio 3.11.** `[LL24]` *Determinare se i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Q}$.*

*1.* $f(x) = 4x^{12} + 6x + 3$

*2.* $f(x) = x^n - a, \quad n, a \in \mathbb{N}$

*3.* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

*Soluzione.*

1. Nel caso del polinomio $x^2 - 2$: 2 divide tutti i termini del polinomio tranne il primo ma $2^2 = 4 \nmid 2$. Quindi $x^2 - 2$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein..

2. Applichiamo il criterio di Eisenstein al polinomio $4x^{12} + 6x + 3$: 3 non divide 4, divide $6, 3$ ma $3^2 \nmid 3$. Quindi $4x^{12} + 6x + 3$ è irriducibile.

3.
   (a) Se $n = 1$, $x^n - a$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$ per ogni $a$.

   (b) Se $a = 0$, $x^n - a$ è iducibile su $\mathbb{Q}$ per ogni $n > 1$.

   (c) Se $a \in \mathbb{N}$ è una potenza n-esima, abbiamo che esiste $b \in \mathbb{N}$ tale che $a = b^n$ e quindi per le regole dei prodotti notevoli,
   $$x^n - a = x^n - b^n = (x - b)h(x)$$
   per un opportuno $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Quindi $x^n - a$ è riducibile su $\mathbb{Q}$.

   (d) Se $a \in \mathbb{N}$ non è una potenza n-esima, il polinomio $x^n - a$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein se
   $$a = p_1^1 p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$
   con $p_i \in \mathbb{N}$, primi.

(e) Negli altri casi, proposto. Una possibile soluzione completa si può ottenere usando le radici complesse, vedi prossima parte.

4. Il polinomio $x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$, ma non per il criterio di Eisenstein. Se fosse riducibile avrebbe almeno fattore lineare e quindi una radice. Ma nessuna delle possibili radici razionali, $\pm 1$, è effettivamente una radice, dato che $f(\pm 1) \neq 0$. Quindi $f(x)$ non può avere un fattore lineare ed è quindi irriducibile.

$\square$

**Esercizio 3.12.** `[AAA94]` *Risolvere l'equazione*

$$F(x)^2 \underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} x^2 + 3x + 2$$

con incognita il polinomo $F(x)$. *Stiamo cercando le soluzioni tra i polinomi, ovvero vogliamo determinare l'insieme*

$$\{F(x) \in \mathbb{R}[x] \mid F(x)^2 \underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} x^2 + 2x - 1\}$$

*Dato che il quadrato di* $F(x)$ *ha grado* $2$, *necessariamente* $F(x)$ *ha grado* $1$. *Quindi* $F(x) = ax+b$ *per opportuni (ed incogniti)* $a, b \in \mathbb{R}$. *Possiamo quindi riscrivere l'equazione*

$$\begin{aligned} F(x)^2 &\underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} x^2 + 3x + 2 \\ (ax+b)^2 &\underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} x^2 + 3x + 2 \\ a^2x^2 + 2abx + b^2 &\underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

*che per il principio di identità dei polinomi si trasforma in*

$$\begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 2ab = 3 \\ b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

*e si vede facilmente che in tutti e quattro i casi* $(a = 1, b = \sqrt{2}), \ldots, (a = -1, b = -\sqrt{2})$ *la seconda equazione è impossibile. Quindi*

$$F(x)^2 \underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} x^2 + 3x + 2$$

*non ha soluzioni.*

**Esercizio 3.13.** `[AAA66]` *Risolviamo in* $\mathbb{K}[x]$ *il sistema*

$$\begin{cases} 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

*Calcoliamo quindi* $\gcd(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)$.

```
GCDPolyVerbose(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2,3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2);

(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2)=(x - 1)*(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)+(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)

(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)=(x - 1)*(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)+(9x^2 - 6)
```

```
(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)=(x + 2)*(3x^2 - 2)+(0)
```

```
Quindi
```

```
(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2,3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)

(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2,3x^3 + 6x^2 - 2x - 4))

(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4,3x^2 - 2)

(3x^2 - 2,0)
```

*Abbiamo quindi che* $\gcd(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2) = 3x^2 - 2$ *e le soluzioni del sistema sono quindi*

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

**Esempio 3.14.** `[AAA69]` *Dato che*

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 5x + 10 &= (x+1)(x-1)(x+3) \\ x^2 - 1 &= (x+1)(x-1) \\ x^2 + 2x - 3 &= (x-1)(x+3) \end{aligned}$$

*abbiamo che*

$$(x^2 - 1) \ \mid \ (x^3 - 2x^2 - 5x + 10) \qquad e \qquad (x^2 + 2x - 3) \ \mid \ (x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$$

*Quindi*

$$\gcd(x^2 - 1, x^2 + 2x - 3) = (x - 1) \ \mid \ (x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$$

*ma*

$$(x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = (x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3x) \nmid (x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$$

**Esempio 3.15.** `[AAA71]` *Chiaramente, se trovo il* gcd *non banale di due polinomi, posso parzialmente fattorizzare questi polinomi. Nell'esempio visto prima, abbiamo che*

$$\gcd(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2) = 3x^2 - 2$$

*e quindi, con semplici divisioni*

$$\frac{3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{3x^2 - 2} = x^3 + x + 1 \qquad \frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2}{3x^2 - 2} = x^2 + x + 1$$

*da cui otteniamo una fattorizzazione parziale dei due polinomi.*

$$\begin{aligned} 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= (3x^2 - 2)(x^3 + x + 1) \\ 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2 &= (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

## 3.2 Esercizi proposti

**Esercizio 3.16.** [AAQ08] *Scrivere per quanto possibile le formule per*

1. $a^5 - b^5$.
2. $a^7 + b^7$.
3. $a^4 - b^4$.
4. $a^{2n+1} \pm b^{2n+1}$ *(esponente dispari).*
5. $a^{2n} \pm b^{2n}$ *(esponente pari).*
6. $a^{15} - b^{15}$.
7. $a^{16} - b^{16}$.

**Esercizio 3.17.** [AAQ09] *Calcolare le seguenti potenze*

1. $(x+2)^4$
2. $(3x-1)^5$
3. $(x+1)^9$

**Esercizio 3.18.** [AAV32] *Due polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ che hanno le stesse radici con la stessa molteplicità sono uguali a meno di un fattore invertibile?*

**Esercizio 3.19.** [AAQ10] *Dire, al variare di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, quando sono uguali i polinomi*

$$3(a-b+2c)x^2 - (a+b)x - a + b - c, \qquad (a+b+c-d)x^3 + 2x^2 - (2a+b-c)x + 3$$

**Esercizio 3.20.** [AAA90] *Calcolare il resto delle seguenti divisioni*

1. $x^5 + x^3 + 1,\ x - 3$. *[Sol: 271]*
2. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 1,\ x^2 + x + 1$. *[Sol: 2]*
3. $x^5 + 3x^4 + x^2 + x,\ x^2 + 2x + 1$. *[Sol: $-8x - 6$]*
4. $x^{15} + 3x^4 + x^2 + x,\ x^{12} + 2x + 1$. *[Sol: $x^4 - x^3 + x^2 + x$]*

**Esercizio 3.21.** [AAA91] *Calcolare i seguenti*

1. $\gcd(x^{16} - 1, x^{12} - 1)$. *[Sol: $x^4 - 1$]*
2. $\gcd(x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1, x^3 + 1)$. *[Sol: $x^3 + 1$]*
3. $\gcd(x^8 - x^7 + x^5 - x^3 + x - 1, x^2 - 1, x - 1)$. *[Sol: $x - 1$]*
4. $\gcd(x^3 + x - 1, x^2 - 1, x - 1)$. *[Sol: $x - 1$][Sol: 1]*

**Esercizio 3.22.** [NN01] *Calcolare* gcd *e lcm dei seguenti polinomi*

1. $x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2, x^3 - x^2 + x - 1$. *Soluzione* $\gcd = x - 1$.
2. $x^3 - 8x^2 + 21x - 18, x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. *Soluzione* $\gcd = x^2 - 5x + 6$.

3. $4x^5 - 4x^4 - 27x^3 + 30x^2 + 45x - 54, 4x^6 + 20x^5 - 35x^4 - 148x^3 + 189x^2 + 216x - 270$. *Soluzione* $\gcd = 4x^2 - 12x + 9$.

**Esercizio 3.23.** `[EX97]` *Fattorizzare* $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$ *su* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

*Soluzione.* In $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x] : f(x) = (x+4)(x+3)(x-1)(x-2)$. □

**Esercizio 3.24.** `[EX54]` *Fattorizzare* $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 30$ *su* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

*Soluzione.*

$$\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) = (x-2)(x^2-5)(x^2+3)$$
$$\text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) = (x-2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+3)$$

□

**Esercizio 3.25.** `[EX53]` *Fattorizzare su* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ $f(x) = 24x^3 - 94x^2 + 117x - 45$.

*Soluzione.*

$$\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) = (4x-3)(3x-5)(2x-3)$$
$$\text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) = (4x-3)(3x-5)(2x-3)$$

□

**Esercizio 3.26.** `[LL49]` *Fattorizzare in* $\mathbb{R}[x]$ *il polinomio*

$$f(x) = x^{10} - 4x^8 + x^6 + 10x^4 - 4x^2 - 8$$

*Soluzione.*

$$x^{10} - 4x^8 + x^6 + 10x^4 - 4x^2 - 8 = (x^2+1)^2(x^2-2)^3$$

□

**Esercizio 3.27.** `[NN02]` *Risolvere la seguente equazione a variable polinomio* $F(x)$

$$F(x) \cdot F(x+1) \underset{\mathbb{Q}[x]}{\equiv} x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x + 10$$

*Hint: il grado del polinomio* $F(x)$ *è uguale al grado del polinomio* $F(x+1)$*. Dato che il prodotto di questi due polinomi ha grado* 4, $\deg F(x) = 2$ *e quindi* $F(x) \underset{\mathbb{Q}[x]}{\equiv} ax^2 + bx + c$ *per incogniti* $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

*Soluzione:* $F(x) \underset{\mathbb{Q}[x]}{\equiv} \pm(x^2 + 2x + 2)$.

**Esercizio 3.28.** `[AAX94]` *Trovare un polinomio* $F(y) \in \mathbb{R}[y]$ *tale che* $F(y)(3y^2+1) \equiv 3y^4 + 4y^2 + 1$

**Esercizio 3.29.** `[AAX95]` *Trovare un polinomio* $F(a) \in \mathbb{R}[a]$ *tale che* $F(a)$ *diviso per* $a+3$ *abbia quoto* $a^2 - 2a + 5$ *e resto* $-13$

**Esercizio 3.30.** `[AAX96]` *Trovare un polinomio* $F(t) \in \mathbb{R}[t]$ *tale che* $3F(t) + t^2 \equiv 3t^4 - 2t^2 + 3t$

**Esercizio 3.31.** `[AAX11]` *Trovare, se possibile, un campo finito, ovvero un insieme finito* $A$ *con due operazioni* $\oplus$, $\odot$ *che soddisfino le condizioni di campo.*

**Esercizio 3.32.** [AAX33] *Trovare, se possibile, un campo finito con* 5 *elementi.*

**Esercizio 3.33.** [AAX22] *Trovare, se possibile, un campo finito con* 4 *elementi.*

**Osservazione 3.34** (Legge di cancellazione per anelli)**.** [BBX66] *Sia $A$ un anello, e $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a$ non zero-divisore. Allora $ab = ac \Leftrightarrow b = c$.*

**Esercizio 3.35.** [AAG67] *L'operazione di estrazione di radice $a \oplus b = \sqrt[a]{b}$ è associativa o commutativa?*

**Esercizio 3.36.** [AAG23] *Trovare, se esistono, due sottocampi non banali di $\mathbb{R}$ diversi da $\mathbb{Q}$, contenuti l'uno dentro l'altro.*

**Esercizio 3.37.** [AAG22] *Trovare, se esiste, un sottocampo non banale di $\mathbb{Q}$.*