Appendice B

Sequenze di Sturm, cfr. Abate, Geometria, 14.C.2

Problema B.1. *Per usare il criterio del polinomio minimo dobbiamo avere un metodo per vedere se un polinomio ha radici multiple (lo abbiamo: il metodo del* gcd*) e un metodo per vedere se un polinomio ha tutte le radici in* $\mathbb{K}$*. Per* $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ *questo non è un problema. Per* $\mathbb{R}$*, invece si.*

Richiamo B.2. `[NNN81]` *Ricordiamo la sequenza di polinomi creata dall'algoritmo di Euclide per il calcolo del* gcd *dei polinomi* $p_0(t), p_0'(t) \in \mathbb{K}[t]$*. Ad ogni riga* j*, da* p_{j-1} *e* p_j *determiniamo* p_{j+1} *come il resto della divisione di* p_{j-1} *per* p_j*, ovvero data da* $p_{j-1}(t) = q_1(t)p_j(t) + p_{j+1}(t)$*.*

$$
\begin{aligned}
p_0(t) &= p(t) \\
p_1(t) &= p'(t) \\
\\
p_2(t) &= p_0(t) - q_1(t)p_1(t) \qquad \textit{con } \deg p_2(t) < \deg p_1(t) \\
&\vdots \\
p_{j+1}(t) &= p_{j-1}(t) - q_j(t)p_j(t) + \qquad \textit{con } \deg p_{j+1}(t) < \deg p_j(t) \\
&\vdots \\
p_s(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Si crea la sequenza

$$[p_0(t), p_1(t) = p_0'(t), p_2(t), \ldots, p_{s-1}(t), p_s(t) = 0]$$

dove $\gcd(p_0(t), p_0'(t)) = p_{s-1}(t)$*. Da un altro punto di vista, creiamo la sequenza di coppie*

$$(p_0(t), p_1(t)), (p_1(t), p_2(t)), \ldots, (p_j(t), p_{j+1}(t)), \ldots, (p_{s-1}(t), 0)$$

con la proprietà che per ogni j*,*

$$\gcd(p(t), p'(t)) = \gcd(p_j(t), p_{j+1}'(t)) = p_{s-1}(t)$$

Osserviamo che

1. *moltiplicare un qualunque elemento di una qualunque coppie per un elemento invertibile non cambia il risultato.*

2. *Dato che le uniche operazioni effettuate durante lo svolgimento dell'algoritmo euclideo sono divisioni, moltiplicazioni, somme e differenze di polinomi, il campo specifico su cui stiamo operando è indifferente. In concreto, se abbiamo due polinomi in $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, il risultato dell'algoritmo euclideo non cambia se li consideriamo come polinomi in $\mathbb{R}[x]$ o in $\mathbb{C}[x]$.*

,

Definizione B.3. [NNN17] *Sia $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ non costante. Definiamo* sequenza standard *associata a $p(t)$ la successione di polinomi $p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_s(t)$ data da*

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= p(t)\\
p_1(t) &= p'(t)\\
\\
p_2(t) &= q_1(t)p_1(t) - p_0(t) \qquad \textit{con } \deg p_2(t) < \deg p_1(t)\\
&\vdots\\
p_{j+1}(t) &= q_j(t)p_j(t) - p_{j-1}(t) \qquad \textit{con } \deg p_{j+1}(t) < \deg p_j(t)\\
&\vdots\\
p_s(t) &= 0
\end{aligned}$$

Si tratta della sequenza di Euclide per il calcolo di $\gcd(p(t), p'(t))$ modificata come segue: ad ogni riga j, da p_{j-1} e p_j definiamo p_{j+1} come l'opposto del resto della divisione di p_{j-1} per p_j.

Osserviamo che

1. *l'algoritmo di Sturm è una versione dell'algoritmo euclideo, e l'ultimo elemento della sequenza prima di zero è uguale a $\gcd(p(t), p(t)')$, dato che stiamo moltiplicando alcuni elementi delle coppie della sequenza per l'elemento invertibile -1.*

2. *Mentre nell'esecuzione dell'algoritmo euclideo possiamo moltiplicare i resti per un qualunque fattore invertibile, nell'algoritmo di Sturm possiamo possiamo moltiplicare i resti per un qualunque fattore invertibile positivo ed avere ancora una sequenza standard.*

Definizione B.4. [NNN18] *Sia $\underline{c} = c_0, \dots, c_s$ una sequenza di reali. Definiamo* numero di variazioni $V(\underline{c})$ *della successione il numero di cambi di segno, non considerando lo* 0.

Definizione-Proposizione B.5. [NNN19] *Sia $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ non costante e la sequenza standard associata a $p(t)$ sia $p_0(t), p_1(t), \dots, p_s(t)$. Definiamo*

- $d_j = \deg p_j(t)$.
- *c_j il coefficente del termine di grado massimo di $p_j(t)$ ovvero il coefficente direttivo di $p_j(t)$.*
- *V_+ è il numero di variazioni della sucessione $c_0, \dots, c_s$.*
- *V_- è il numero di variazioni della sucessione $(-1)^{d_0} \cdot c_0, \dots, (-1)^{d_s} \cdot c_s$.*
- *Allora il numero delle radici reali distinte di $p(t)$ è $V_- - V_+$*

Esempio B.6. `[NNN20]` *Dato* $-t^3-4t^2-t+1\in\mathbb{R}[t]$*, determinare il suo numero di radici in* $\mathbb{R}$*.*

Soluzione.
```
-- Questo algoritmo semplifica la sequenza quando possibile,
-- eliminando fattori invertibili positivi
GCDPolySTURMVerbose(t^3+4t^2+t-1,3t^2+8t+1);

(t^3 + 4t^2 + t - 1)=(1/3t + 4/9)*(3t^2 + 8t + 1)+(-26/9t - 13/9)

Qui ho moltiplicato il resto per il fattore invertibile 9/13, e come da regole per la sequenza di St

(3t^2 + 8t + 1)=(3/2t + 13/4)*(2t + 1)+(-9/4)

Qui ho moltiplicato il resto per il fattore invertibile 4/9, e come da regole per la sequenza di Stu

(2t + 1)=(2t + 1)*(1)+(0)

Lista delle coppie  [[t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1],
                     [3t^2 + 8t + 1, 2t + 1],
                     [2t + 1, 1]]
Record[GCD = 1, Sequence = [t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1, 2t + 1, 1]]
```

La sequenza standard associata a t^3+4t^2+t-1 è quindi

$$\begin{aligned}P_0(t)&=t^3+4t^2+t-1\\P_1(t)&=3t^2+8t+1\\P_2(t)&=26/9t+13/9\\P_3(t)&=9/4\end{aligned}$$

Vediamo che

$$\begin{aligned}V_+&=(1,3,26/9,9/4)=0\\V_-&=((-1)^3\cdot 1,(-1)^2\cdot 3,(-1)^1\cdot 26/9,(-1)^0\cdot 9/4)\\&=(-1,3,-26/9,9/4)=3\end{aligned}$$

Quindi $V_--V_+=3-0=3$. Quindi $-t^3-4t^2-t+1$ ha tre radici reali. □

Esercizio B.7. `[FY01a]` *Determinare se l'endomorfismo di* $\mathbb{R}$*-spazi* $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *associato alla matrice*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&-2&1\\0&1&-3\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile. Abbiamo già visto che il polinomio caratteristico è $p_T(t)=-t^3-4t^2-t+1$ *ed abbiamo già visto che* $p_T(t)$ *non ha radici multiple ed ha tutte le radici in* $\mathbb{R}$*, quindi* T *è diagonalizzabile.*

Esercizio B.8. `[NNN51]` *Dato l'endomorfismo di* $\mathbb{Q}$*-spazio* $T\colon\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ *definito da*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$p_T(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = -t^3 + 4t^2 - 3t + 1$$

$\mathbb{Q}$ Vediamo le radici razionali: candidati sono solo ± 1 e $p_T(1) \neq 0 \neq p_T(-1)$. Dato che non ci sono radici razionali, T non è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{C}$ Le radici sono tutte in $\mathbb{C}$. Vediamo se $p_T(1)$ ha radici multiple (se non le ha, non le può avere neppure $PM_T(t)$).

```
GCDPolyVerbose(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1,-3t^2+8t-3);
(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1)=(1/3t - 4/9)*(-3t^2 + 8t - 3)+(14/9t - 1/3)
(-3t^2 + 8t - 3)=(-3/14t + 103/196)*(14t - 3)+(-279/196)
(14t - 3)=(-14t + 3)*(-1)+(0)
Record[GCD = -1, Sequence = [-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3, 14t - 3, -1]]
Ricordiamo che nella sequenza i fattori invertibili positivi sono stati semplificati
```

Quindi $\gcd(p_T(t), p'_T(t)) = 1$, non ci sono radici multiple su $\mathbb{C}$ neppure del polinomio minimo, quindi T è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ Non ci sono radici multiple, dato che non ce ne sono su $\mathbb{C}$, ma dobbiamo verificare se tutte le radici sono in $\mathbb{R}$.

Costuiamo la sequenza di Sturm

```
GCDPolySTURMVerbose(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1,-3t^2+8t-3);
(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1)=(1/3t - 4/9)*(-3t^2 + 8t - 3)+(14/9t - 1/3)
(-3t^2 + 8t - 3)=(3/14t - 103/196)*(-14t + 3)+(-279/196)
(-14t + 3)=(-14t + 3)*(1)+(0)
Lista delle coppie  [[-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3], [-3t^2 + 8t - 3, -14t + 3], [-14t
Record[GCD = 1, Sequence = [-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3, -14t + 3, 1]]
Ricordiamo che nella sequenza i fattori invertibili positivi sono stati semplificati
```

Quindi

- $\underline{c} = (-1, -3, -14, 1)$ e $V_+ = 1$.
- $((-1)^3 \cdot (-1), (-1)^2 \cdot (-3), (-1)^1 \cdot (-14), (-1)^0 \cdot 1) = (1, -3, 14, 1)$, $V_- = 2$
  (ci sono tutti i gradi, cambio segno a posto alterno)
- $V_- - V_+ = 2 - 1 = 1$. C'è una sola radice reale, T non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

N.B. Avremmo potuto naturalmente usare direttamente il metodo di Sturm per calcolare il gcd tra il polinomio e la sua derivata anche nel caso complesso, evitando di fare due volte l'algoritmo euclideo in versioni leggermente diverse. Abbiamo effettuato i due svolgimenti per permettere di vedere le differenze di calcolo tra l'algoritmo euclideo in forma usuale e in forma di Sturm in un caso concreto. □

Esercizio B.9. `[NNN24]` *Discutere la fattorizzabilità su* $\mathbb{R}$ *i seguenti polinomi.*

1. $x^6 + 7x^4 + 15x^2 + 9$. *[Due fattori, uno quadratico di molteplicita' 1 ed uno quadratico di molteplicita' 2]*

2. $x^{11} + 10x^9 + 25x^7 + 3x^5 + 3x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 75x + 75$. *[Due fattori, uno di grado* 7 *di molteplicita'* 1 *uno quadratico di molteplicita'* 2. *Il fattore di grado* 7 *si scompone in un fattore lineare e tre fattori quadratici distinti]*

3. $x^{12} - x^8 - x^4 + 1$. *[Due fattori lineari di molteplicita'* 2, *un fattore quadratico di molteplicita'* 2, *due fattori quadratici di molteplicita'* 1*]*