Appendice C

Spazi affini

Definizione C.1. `[PPP01]` *Sia* V *un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale,* $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ *e* $\underline{v}_0 \in V$*. L'insieme*

$$L = \{\underline{w} + \underline{v}_0 \mid \underline{w} \in W\} = W + \underline{v}_0$$

è detto sottospazio affine *di* V*,* W *è la sua* giacitura*, e diremo che* L *è* parallelo *a* W*. La dimensione di* L *è uguale alla dimensione di* W*. Il vettore* $\underline{v}_0$ *è detto* vettore fisso *di* L

Esempio C.2. `[PPP02]` *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme*

$$L = \{(x+1, 2x+3) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}((1,2)) + (1,3)$$

è uno spazio affine di dimensione 1 *parallelo allo spazio vettoriale* $\mathrm{Span}((1,2))$*, la sua giacitura. Il vettore fisso di* L *è* $(1,3)$*.*

Osservazione C.3. `[PPP03]` *Ogni sottospazio* W *di un* $\mathbb{K}$*-spazio* V *è sottospazio affine, basta prendere come vettore fisso* $\underline{0}$*.*

Esempio C.4. `[PPP04]` *In* $\mathbb{R}^2$*, i sottospazi affini sono i punti, le rette e tutto lo spazio.*

Esempio C.5. `[PPP05]` *In* $\mathbb{R}^3$*, i sottospazi affini sono i punti, le rette, i piani e tutto lo spazio.*

Proposizione C.6. `[PPP16]` *[Cfr. con la dimostrazione del Teroema di ¡rochè-Capelli in forma generale, 17.2] Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$*,* $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ *e* $\underline{v}_0 \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$*. Allora ogni altra soluzione è della forma* $\underline{w} + \underline{v}_0$*, con* $\underline{w} \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$*.*

Dimostrazione.

1. Se $\underline{w} \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ allora $\underline{w} + \underline{v}_0 \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Infatti

$$A(\underline{w} + \underline{v}_0) = A \cdot \underline{w} + A \cdot \underline{v}_0 = \underline{0} + \underline{b} = \underline{b}$$

2. Sia $\underline{v} \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora

$$A \cdot \underline{v} = \underline{b} \text{ e } A \cdot \underline{v}_0 = \underline{b} \Rightarrow A \cdot (\underline{v} - \underline{v}_0) = \underline{0}$$

Quindi $\underline{v} = (\underline{v} - \underline{v}_0) + \underline{v}_0 \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) + \underline{v}_0$

□

Corollario C.7. `[PPP06]` *L'insieme* $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ *è uno spazio affine di giacitura* $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ *e vettore fisso* $\underline{v}_0$*.*

Osservazione C.8. [PPP07] *Possiamo estendere le definizioni di vettore generico, descrizione cartesiana e parametrica dagli spazi vettoriali etc. agli spazi affini.*

Esempio C.9. [PPP08] *L'insieme* $L = \operatorname{Span}((1,2,1),(0,2,2)) + (0,0,1)$ *è un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^3$ *dato mediante una descrizione parametrica. La sua giacitura è* $\operatorname{Span}((1,2,1),(0,2,2))$ *ed un vettore fisso* $(0,0,1)$. *dato che*

$$a(1,2,1) + b(0,2,2) + (0,0,1) = (a, 2a+2b, a+2b+1)$$

L si scrive anche come

$$\{(a, 2a+2b, a+2b+1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \text{ oppure } \begin{cases} x = a \\ y = 2a+2b \\ z = a+2b+1 \end{cases}$$

Un vettore generico di L è $(a, 2a+2b, a+2b+1)$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$.

Esempio C.10. [PPP19] *L'insieme*

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ *dato mediante una descrizione cartesiana. La sua giacitura è*

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \right\}$$

Per determinare un suo vettore fisso devo trovare una sua descrizione parametrica. Fatelo per esercizio.

Esempio C.11. [PPP20] *Diamo una descrizione cartesiana dello spazio affine*

$$L = \{(a+b, a-b-2, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Soluzione. Cerchiamo le relazioni tra le tre componenti, che indichiamo rispettivamente come x, y, z. Dobbiamo quindi trovare le relazioni tra i parametri x, y, z che permettono l'esistenza di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b-2=y \\ 1=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{x+y+2}{2} \\ b=\frac{x-y-2}{2} \\ 1=z \end{cases}$$

Una descrizione cartesiana di L è quindi $z = 1$. $\square$

Esempio C.12. [PPP10] *Diamo una descrizione cartesiana dello spazio affine*

$$L = \{(a+2, a-b-2, 3a-b, 2a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Soluzione. Cerchiamo le relazioni tra le tre componenti, che indichiamo rispettivamente come x, y, z, t. Dobbiamo quindi trovare le relazioni tra i parametri x, y, z che permettono l'esistenza di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a+2=x \\ a-b-2=y \\ 3a-b=z \\ 2a-b=t \end{cases}$$

```
Use R::=Q[x,y,z,t];
M:=Mat([[1, 0,x-2],
        [1,-1,y+2],
        [3,-1,z],
        [2,-1,t]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  0, x - 2]
     2^a-1*1^a [0, -1, -x + y + 4]
     3^a-3*1^a [0, -1, -3x + z + 6]
     4^a-2*1^a [0, -1, -2x + t + 4]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  0, x - 2]
-------------- [0, -1, -x + y + 4]
     3^a-1*2^a [0,  0, -2x - y + z + 2]
     4^a-1*2^a [0,  0, -x - y + t]
```

Una descrizione cartesiana di L è quindi

$$\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -2x - y + z + 2 = 0 \\ -x - y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

□

Esempio C.13. [PPP11] *Determinare una descrizione parametrica dello spazio affine*

$$L = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases} \right\}$$

Soluzione. Basta trovare il vettore generico delle soluzioni

```
M:=Mat([[1,-1, -1,-1,3],
        [2, 2, -1 ,0,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -1, -1, -1, 3]
     2^a-2*1^a [0, 4, 1, 2, -4]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, -1, -1, -1, 3]
     2^a*+1/4  [0, 1, 1/4, 1/2, -1]

Cancello la colonna sopra il 2  pivot

   1^a+1*2^a   [1, 0, -3/4, -1/2, 2]
-------------- [0, 1, 1/4, 1/2, -1]
```

Ho quindi che $x = 3/4z + 1/2t + 2$, $y = -1/4z - 1/2t - 1$. Sostituendo nel vettore generico (x, y, z, t) di $\mathbb{R}^4$ le condizioni di appartenenza alle soluzioni otteniamo

$$(3/4z + 1/2t + 2, -1/4z - 1/2t - 1, z, t)$$

un vettore generico delle soluzioni e possiamo scrivere

$$L = \begin{cases} x = 3/4\lambda + 1/2\mu + 2 \\ y = -1/4\lambda - 1/2\mu - 1 \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \quad \text{oppure } L = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Esempio C.14. `[QQQ01]` *Dire se l'insieme*

$$L = \{(t^3, t^3, 1) \ \mid \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. L'insieme L non ha una descrizione parametrica lineare, quindi non possiamo dire immediatamente che si tratta di uno spazio affine. Vediamo di trovare una descrizione cartesiana di L risolvendo rispetto alla variabile T e parametri x, y, z il sistema

$$\begin{cases} t^3 = x \\ t^3 = y \\ 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = x \\ x = y \\ 1 = z \end{cases}$$

Abbiamo quindi che le relazioni tra x, y, z perchè (x, y, z) appartenga a L sono

$$\begin{cases} x = y \\ 1 = z \end{cases}$$

e x può assumere ogni valore in $\mathbb{R}$, non ha limitazioni dati dalla prima equazione del sistema $t^3 = x$. quindi

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \begin{cases} x = y \\ 1 = z \end{cases} \}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ □

Osservazione C.15. `[QQQ02]` *Dati V $\mathbb{K}$-spazio e $L, J \subseteq V$ spazi affini, gli insiemi*

$$L \cap J = \{\underline{v} \in V \ \mid \ \underline{v} \in L, \ vv \in K\} \ e \ L + J = \{\underline{v} + \underline{w} \ \mid \ \underline{v} \in L, \ \underline{w} \in K\}$$

sono spazi affini.

La determinazione di $L \cap J$ è semplice se abbiamo una descrizione cartesiana di L, J, basta unire le equazioni (vedi esempio sotto).

La determinazione di $L + J$ è semplice se abbiamo una descrizione parametrica di L, J, basta sommare la giaciture e i vettori fissi (vedi esempio sotto).

Per vedere se $L = J$ basta trovare una descrizione cartesiana di L, J e vedere se i sistemi di equazioni associati sono equivalenti. Un altro metodo è di determinare un vettore generico di L e vedere che soddisfa le equazioni cartesiane di J (mi dice $J \supseteq L$) e vice versa (mi dice $L \supseteq J$) da cui l'uguaglianza.

Osservazione C.16. [QQQ20] *Un sistema di equazioni* $A\underline{x} = \underline{b}$ *senza soluzioni non descrive uno spazio affine.*

Osservazione C.17. [QQQ10] *Le descrizioni parametriche e cartesiane degli spazi affini non sono uniche, come non lo sono per gli spazi vettoriali.*

Esercizio C.18. [QQQ03] *Dati gli spazi affini*

$$L = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\} \ e \ J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ \begin{cases} z + t = 2 \end{cases} \right\}$$

determinare una descrizione parametrica dello spazio affine $L \cap J$ *e una descrizione dello spazio affine* $L + J$.

Soluzione.

1. Per $L \cap J$, abbiamo che

$$L \cap J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y + t = 0 \\ z + t = 2 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \right\}$$

   Un vettore generico di $L \cap J$ si ottiene dal vettore generico di $\mathbb{R}^4$ con le condizioni $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 1 - t$ ed è

$$(1 + t, -t, 1 - t, t) = t(1, -1, -1, 1) + (1, 0, 1, 0)$$

   Quindi $L \cap J = \operatorname{Span}((1, -1, -1, 1)) + (1, 0, 1, 0)$.

2. Per $L + J$, troviamo descrizioni parametriche di L, J ed operiamo le somme.

   (a) per L, abbiamo

$$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z + 2t \\ y = -t \end{cases}$$

   Un vettore generico di L è (x, y, z, t) più le condizioni $x = 2 - z + 2t, \ y = -t$, ovvero

$$(2 - z + 2t, -t, z, t) = z(-1, 0, 1, 0) + t(2, -1, 0, 1) + (2, 0, 0, 0)$$

   Quindi $L = \operatorname{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)) + (2, 0, 0, 0)$.

   (b) Per J abbiamo

$$\begin{cases} z + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - t \end{cases}$$

   Un vettore generico di J è (x, y, z, t) più la condizioni $z = 2 - t$, ovvero

$$(x, y, 2 - t, t) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, -1, 1) + (0, 0, 2, 0)$$

   Quindi $L = \operatorname{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (0, 0, 2, 0)$.

   Quindi

$$\begin{aligned} L + J &= \operatorname{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)) + (2, 0, 0, 0) + \operatorname{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (0, 0, 2, 0) \\ &= \operatorname{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)) + \operatorname{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (2, 0, 0, 0) + (0, 0, 2, 0) \\ &= \operatorname{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (2, 0, 2, 0) \end{aligned}$$

   Per esercizio, determinare una base di $\operatorname{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$.

□

C.1 Esercizi proposti

Esercizio C.19. [PPP22] *Dare una descrizione parametrica dello spazio affine*

$$L = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 3a+3b-b-c=1 \\ 5a-b+3c+d=2 \end{cases} \in \mathbb{R} \right\}$$

Soluzione. vettore generico $(4/9x+5/18y, -7/9x-11/18y, x, y), \quad x,y \in \mathbb{R}$ □

Esercizio C.20. [PPP12] *Dare una descrizione cartesiana dello spazio affine*

$$L = \{(a+2b-c+d, 2a-b-c-1, b+d, a-b-d, a-d-3) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

Soluzione. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-2z+t-1=0\}$ □

Esercizio C.21. [PPP13] *Dare una descrizione cartesiana dello spazio affine*

$$L = \begin{cases} x = a+3b+1 \\ y = a-b-1 \\ z = b+2 \end{cases}$$

Soluzione. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -1/4x+1/4y+z-3/2=0\}$ □

Esercizio C.22. [QQQ11] *Dati gli spazi affini*

$$L = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-2z+t=1 \\ x+y-z-3t=2 \\ x+z-t=0 \\ y+t=0 \end{cases} \right\} \; e \; J = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+z+t=0 \\ x-z-t=1 \end{cases} \right\}$$

determinare una descrizione parametrica dello spazio affine $L \cap J$ e una descrizione dello spazio affine $L+J$.

Esercizio C.23. [QQQ61] *Dati gli spazi affini*

$$L = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x-y-4z+t=0 \\ 3x+y-z-3t=2 \\ 2x+z-3t=0 \\ y+t=0 \end{cases} \right\} \; e \; J = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+2z+2t=1 \\ x-z-t=1 \\ 5x-2t=3 \end{cases} \right\}$$

dire se $L \subseteq J$ o $L \supseteq J$

Sol: NO in entrambe i casi.

Esercizio C.24. [QQQ04] *Dire se l'insieme*

$$L = \{(t^2-2, t^2+1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. No □

Esercizio C.25. [QQQ05] *Data una funzione $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surgettiva e $a,b,c \in \mathbb{R}$ dire se l'insieme*

$$L = \{(\phi(t)+a, \phi(t)+b, +c) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. Si □

Esercizio C.26. `[QQQ06]` *Data una funzione* $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *iniettiva e* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *dire se l'insieme*

$$L = \{(\phi(t) + a, \phi(t) + b, c) \ \mid \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. Non sempre. □