Capitolo 7

Settima Lezione

Definizione 7.1 (Matrici a blocchi)**.** `[CCQ00]` *Una matrice* $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *si può scrivere come*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

dove A, B, C, D *sono opportune matrici. La matrice* M *scritta in questo modo si dice* matrice a blocchi *e la matrici* A, B, C, D *si dicono* blocchi *della matrice* A*. Possiamo facilmente generalizzare la definizione a matrici con un numero qualunque di blocchi.*

Esempio 7.2. `[CCQ01]` *Esempi di matrici a blocchi*

1.
$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}\right)$$

2.
$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}\right)$$

3.
$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{array}\right)$$

4.
$$\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline A & 0 & B \\ \hline C & C & C \end{array}\right)$$

Osservazione 7.3. [CCD17] *Una matrice* $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *in forma normale si può scrivere come*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

ove 0 *è una opportuna matrice di zeri, e* A, B *opportune matrici.*

7.1 Indipendenza lineare

Esempio 7.4. [CCC64] *Risolviamo in* $\mathbb{K}$ *il sistema*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Vediamo facilmente che nessuna delle due equazioni è superflua.

Esempio 7.5. [CCC60] *Risolviamo in* $\mathbb{K}$ *il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Vediamo facilmente che la terza equazione è la somma delle altre due, ed è quindi superflua.

Esempio 7.6. [CCC53] *Risolviamo in* $\mathbb{K}$ *il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ -x - 7y + 5z = -1 \end{cases}$$

Riduciamo con Gauss la matrice completa associata al sistema

```
A:=Mat([ [1,1,1,1],
         [2,5,-1,2],
         [-1,-7,5,-1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1]
     2^a-2*1^a [0, 3, -3, 0]
     3^a+1*1^a [0, -6, 6, 0]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1]
-------------- [0, 3, -3, 0]
     3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Notiamo che la terza riga è stata ridotta a zero, e quindi un sistema equivalente al dato è

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Facendo l'operazione (di Gauss) sulla seconda riga al contrario `2^a->2^a+2*1^a` *otteniamo il sistema equivalente*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+5y-z=2 \end{cases}$$

Abiamo scoperto che la terza equazione è combinazione lineare delle prime due e quindi inutile.

Problema 7.7. `[CCC54]` *Dato un sistema di equazioni, come faccio a riconoscere le equazioni superflue?*

Notazione 7.8. `[CCC43]` *Siano* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$. *Indichiamo il vettore* $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) \in \mathbb{K}^{ns}$ *come* $\underline{\underline{v}}$.

Definizione 7.9. `[CCC44]` *I vettori* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ *sono* linearmente dipendenti *se e solo se*

$$\exists\ \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n,\ \underline{\lambda} \neq \underline{0} \text{ tale che } \underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{0}$$

o, scritto in modo meno compatto, se e solo se

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq \underline{0}, \text{ tali che } \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

Vettori che non siano linearmente dipendenti si dicono *linearmente indipendenti*

Definizione 7.10. `[CCC41]` *Siano* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$. *Diciamo che* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *sono* linearmente indipendenti *se una loro combinazione lineare nulla ha forzatamente tutti i coefficenti nulli. Più formalmente, se*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Scritto in forma più compatta

$$\forall\ \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n, \quad \underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\lambda} = 0(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Esempio 7.11. `[CCC91]` *È facile vedere che i vettori* $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ *non sono linearmente dipendenti (sono quindi linearmente indipendenti) applicando la definizione: sto cercando* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *non tutti nulli tali che*

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) &= (0,0,0) \\ (\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) &= (0,0,0) \\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= (0,0,0) \\ &\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unica soluzione del sistema lineare è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, *quindi non esiste una soluzione non nulla e quindi i tre vettori non sono linearmente dipendenti. Sono quindi linearmente indipendenti.*

Osservazione 7.12. `[CCC92]` *Per verificare che i vettori* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ *siano linearmente indipendenti o meno, basta verificare che il sistema lineare* $\underline{\underline{v}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ *abbia una unica soluzione (quella nulla è sempre presente).*

Definizione 7.13. `[CCC68]` *Un sistema lineare* $A\underline{x} = \underline{0}$ *si dice* omogeneo. *Ha sempre almeno la soluzione* $\underline{x} = \underline{0}$.

Osservazione 7.14. `[CCC75]` *Posso copiare le definizioni che ho dato per i vettori per polinomi univariati e multivariati, equazioni, funzioni, matrici etc. etc....... Tutto quello che mi serve è la somma, la moltiplicazione per uno scalare e la defnzione precisa di uguaglianza.*

Definizione 7.15. `[CCC50]` *Siano* $f_1(\underline{x}), \ldots, f_n(\underline{x}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. *Diciamo che* $f_1(\underline{x}), \ldots, f_n(\underline{x})$ *sono* linearmente indipendenti *se*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 f_1(\underline{x}) + \ldots + \lambda_n f_n(\underline{x}) \underset{\mathbb{K}[x]}{\equiv} 0 \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Analogamente, per le funzioni

Definizione 7.16. `[CCA51]` *Siano* $f_1, \ldots, f_n$ *funzioni* $: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. *Diciamo che* $f_1, \ldots, f_n$ *sono* linearmente indipendenti *se*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \equiv \underline{0} \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$$

Richiamo 7.17. `[CCC51]` *Ricordiamo che due funzioni*

$$f\colon \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ a & \mapsto & g(a) \end{array}$$

sono uguali come funzioni ($f \equiv g$) *se e solo se*

$$\forall\ x \in A\ f(a) = g(a)$$

7.2 Esempi di dipendenza/indipendenza lineare

Esercizio 7.18. `[KK13]` *Stabilire se i tre vettori* $(1,2,3), (1,2,4), (2,4,7) \in \mathbb{R}^3$ *sono linearmente indipendenti.*

Soluzione: Usando la definizione di indipendenza lineare, questa domanda equivale a chiedersi se il sistema

$$\alpha(1,2,3) + \beta(1,2,4) + \gamma(2,4,7) = \underline{0}$$

ammette solo la soluzione $\underline{0}$. Dato che $(1,2,3) + (1,2,4) = (2,4,7)$ il sistema ammette anche la soluzione $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = -1$; i tre vettori non sono quindi linearmente indipendenti. □

Esercizio 7.19. `[LL82]` *Dati i polinomi in* $\mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^7 + 3x^5 - 3x^2 + 1 \\ p_2(x) &= 5x^7 + 2x^2 + 3 \\ p_3(x) &= -4x^5 + 3x^2 + 2 \\ p_4(x) &= 6x^7 - x^5 + 2x^2 + 6 \end{aligned}$$

stabilire se sono linearmente indipendenti e in caso contrario, determinare una relazione lineare tra di essi.

Soluzione. Usiamo la definizione di indipendenza lineare, cercando le soluzioni del sistema omogeneo in $\alpha, \beta, \gamma, \theta$

$$\alpha(x^7 + 3x^5 - 3x^2 + 1) + \beta(5x^7 + 2x^2 + 3) + \gamma(-4x^5 + 3x^2 + 2) + \theta(6x^7 - x^5 + 2x^2 + 6) \underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} 0$$

ovvero, raccogliendo le potenze della la x

$$x^7(\alpha + 5\beta + 6\theta) + x^5(3\alpha - 4\gamma - \theta) + x^2(-3\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\theta) + \alpha + 3\beta + 2\gamma + 6\theta \underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} 0$$

che per il principio di identità dei polinomi ci dà il sistema in quattro equazioni, quattro incognite

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta + 6\theta = 0 \\ 3\alpha - 4\gamma - \theta = 0 \\ -3\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\theta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma + 6\theta = 0 \end{cases}$$

che risolviamo con Gauss

```
A:=Mat[[1, 5, 0, 6,0],
       [3, 0, -4, -1,0],
       [-3, 2, 3, 2,0],
       [1, 3, 2, 6,0]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 5, 0, 6, 0]
     2^a-3*1^a [0, -15, -4, -19, 0]
     3^a+3*1^a [0, 17, 3, 20, 0]
     4^a-1*1^a [0, -2, 2, 0, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-15
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 5, 0, 6, 0]
-------------- [0, -15, -4, -19, 0]
 3^a+17/15*2^a [0, 0, -23/15, -23/15, 0]
  4^a-2/15*2^a [0, 0, 38/15, 38/15, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-23/15
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 5, 0, 6, 0]
-------------- [0, -15, -4, -19, 0]
-------------- [0, 0, -23/15, -23/15, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
```

Già dalla penultima matrice, che ha due righe multiple una dell'altra, possiamo vedere che non esiste un'unica soluzione, quindi i quattro polinomi sono linearmente dipendenti.

Cerchiamo quindi una relazione lineare tra i polinomi, ovvero una soluzione non nulla del sistema

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta + 6\theta = 0 \\ -15\beta - 4\gamma - 19\theta = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha = -\theta \\ \beta = -\theta \\ \gamma = -\theta \end{cases}$$

Quindi

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{(-d, -d, -d, d) \ \mid \ d \in \mathbb{R}\}$$

e quindi $(1, 1, 1, -1) \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) - p_4(x) \underset{\mathbb{R}[x]}{\equiv} 0$$

è una relazione lineare tra i quattro polinomi. □

Esempio 7.20. [CCB00] *I polinomi in* $\mathbb{K}[x]$

$$x^3 + x + 2, x^2 - 1, 3x - 2, 6$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$*?*

Soluzione. Basta vedere il numero di soluzioni del sistema omogeneo

$$\alpha(x^3+x+2)+\beta(x^2-1)+\gamma(3x-2)+\delta 6=0$$
$$\alpha x^3+\beta x^2+(\alpha+3\gamma)x+2\alpha-\beta-2\gamma+6\delta=0$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \alpha+3\gamma=0\\ 2\alpha-\beta-2\gamma+6\delta=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ \delta=0\end{cases}$$

Quindi Sol $=\{\underline{0}\}$ ed i quattro polinomi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ □

Esercizio 7.21. `[CCB03]` *le funzioni*

$$F\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sin x\end{array} \qquad G\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \cos x\end{array} \qquad H\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$*?*

Soluzione. Usando la definizione di indipendenza lineare, dobbiamo vedere se l'unica soluzione dell'equazione a variabili $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

$$\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma x\equiv\mathbf{0}$$

è la tripla $(\alpha,\beta,\gamma)=\underline{0}$, dove $\mathbf{0}$ è la funzione nulla

$$\mathbf{0}\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 0\end{array}$$

L'uguaglianza sulle funzioni diviene, per il principio di identità delle funzioni,

$$\forall\ x_0\in\mathbb{R} \qquad \alpha\sin x_0+\beta\cos x_0+\gamma x_0=0$$

e queste sono infinite equazioni nelle tre variabili α,β,γ, una equazione per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Dato che questa uguaglianza vale per tutti gli $x_0\in\mathbb{R}$, vale in particolare per $x_0=0,\pi,\frac{\pi}{2}$, che scelgo per la semplicità dei calcoli relativi, avrei potuto prendere altri numeri.

$$\begin{cases}\alpha\sin 0+\beta\cos 0+\gamma 0=0 & x_0=0\\ \alpha\sin\pi+\beta\cos\pi+\gamma\pi=0 & x_0=\pi\\ \alpha\sin\frac{\pi}{2}+\beta\cos\frac{\pi}{2}+\gamma\frac{\pi}{2}=0 & x_0=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

ovvero, dato che $\sin 0=0,\cos 0=1$, $\sin\pi=0,\cos\pi=-1$, $\sin\frac{\pi}{2}=1,\cos\frac{\pi}{2}=0$

$$\begin{cases}\beta=0\\ -\beta+\gamma\pi=0\\ \alpha+\gamma\frac{\pi}{2}=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

Quindi necessariamente $\alpha=\beta=\gamma=0$ e le tre funzioni sono quindi linearmente indipendenti.

Ricordiamo che il nome della variabile associato a $\forall$, che si comporta come parametro, può essere cambiato a piacere. Avremmo potuto considerare la relazione

$$\forall\ a\in\mathbb{R} \qquad \alpha\sin a+\beta\cos a+\gamma a=0$$

oppure

$$\forall\ \spadesuit\in\mathbb{R} \qquad \alpha\sin\spadesuit+\beta\cos\spadesuit+\gamma\spadesuit=0$$

□

7.3 Esercizi svolti

Possiamo operare sulle matrici come sui sistemi, per esempio usando il metodo di riduzione di Gauss.

Esercizio 7.22. [KK05] *Determinare le soluzioni del sistema* 4 *equazioni in* 4 *incognite*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 3x+y+z-t=0 \\ 2x+y+z+2t=1 \\ x+2y+2z+2t=3 \\ 3x-3y+z+2t=-2 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Operiamo una riduzione di Gauss

```
Ab:=Mat[[3,  1, 1, -1,  0],
        [2,  1, 1,  2,  1],
        [1,  2, 2,  2,  3],
        [3, -3, 1,  2, -2]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 1, 1, -1, 0]
   2^a-2/3*1^a [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
   3^a-1/3*1^a [0, 5/3, 5/3, 7/3, 3]
     4^a-1*1^a [0, -4, 0, 3, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 1, 1, -1, 0]
-------------- [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
     3^a-5*2^a [0, 0, 0, -11, -2]
    4^a+12*2^a [0, 0, 4, 35, 10]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [3, 1, 1, -1, 0],
     [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1],
     [0, 0, 4, 35, 10],
     [0, 0, 0, -11, -2]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 1, 1, -1, 0]
-------------- [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
-------------- [0, 0, 4, 35, 10]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, -11, -2]
```

Il sistema $\mathcal{F}$ è quindi equivalente a

$$\begin{cases} 3x + y + z \quad - t &= \quad 0 \\ \qquad y + z \quad + 8t &= \quad 3 \\ \qquad\qquad 4z + 35t &= \ 10 \\ \qquad\qquad\quad - 11t &= -2 \end{cases}$$

che possiamo facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro

$$\begin{cases} 3x + y \quad + z \quad - t &= \ 0 \\ \quad \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t &= \ 1 \\ \qquad 4z \qquad + 35\frac{2}{11} &= 10 \\ \qquad\qquad t &= \frac{2}{11} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \quad + z \quad - t &= \ 0 \\ \quad \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t &= \ 1 \\ \qquad z &= \frac{10}{11} \\ \qquad\quad t &= \frac{2}{11} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \quad + z - t &= \ 0 \\ \quad \frac{1}{3}y \qquad + \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{11} + \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{11} &= \ 1 \\ \qquad z &= \frac{10}{11} \\ \qquad\quad t &= \frac{2}{11} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y + z - t &= \ 0 \\ \quad y &= \frac{7}{11} \\ \qquad z &= \frac{10}{11} \\ \qquad\quad t &= \frac{2}{11} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x \qquad + \frac{7}{11} + \frac{10}{11} - \frac{2}{11} &= \ 0 \\ \quad y &= \frac{7}{11} \\ \qquad z &= \frac{10}{11} \\ \qquad\quad t &= \frac{2}{11} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= -\frac{5}{11} \\ \quad y &= \ \frac{7}{11} \\ \qquad z &= \ \frac{10}{11} \\ \qquad\quad t &= \ \frac{2}{11} \end{cases}$$

e quindi

$$\mathrm{Sol}(A \cdot \underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}, \frac{2}{11} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{11}(-5, 7, 10, 2) \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

□

Esercizio 7.23. `[EE97]` *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *il sistema lineare*

$$\begin{cases} \qquad y \ + 3z + 2t = 0 \\ x \ + 4y + z \ - t \ = 1 \\ 2x + y \ + z \qquad = 2 \\ \qquad y \ + 2z + 2t = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa $[A \mid b]$ associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Riduciamo questa matrice con Gauss

```
Ab:=Mat([[0,1,3,2,0],
         [1,4,1,-1,1],
         [2,1,1,0,2],
         [0,1,2,2,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [1, 4, 1, -1, 1],
     [0, 1, 3,  2, 0],
     [2, 1, 1,  0, 2],
     [0, 1, 2,  2, 1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  4,  1, -1, 1]
  0 sotto pivot[0,  1,  3,  2, 0]
     3^a-2*1^a [0, -7, -1,  2, 0]
  0 sotto pivot[0,  1,  2,  2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 4,  1, -1, 1]
-------------- [0, 1,  3,  2, 0]
     3^a+7*2^a [0, 0, 20, 16, 0]
     4^a-1*2^a [0, 0, -1,  0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=20
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 4,  1, -1, 1]
-------------- [0, 1,  3,  2, 0]
-------------- [0, 0, 20, 16, 0]
  4^a+1/20*3^a [0, 0, 0, 4/5, 1]
```

La matrice è adesso in forma triangolare superiore, e dato che tutti i pivot sono diversi da zero, ammette un'unica soluzione. Troviamo questa soluzione mettendo la matrice incompleta in forma diagonale mediante operazioni di tipo Gauss, il che è equivalente ad operare una sostituzione all'indietro.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 4, 1, -1, 1]
-------------- [0, 1, 3, 2, 0]
    3^a*+1/20  [0, 0, 1, 4/5, 0]
     4^a*+5/4  [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
   1^a*-1*4^a  [1, 4, 1, 0, 9/4]
   2^a*+2*4^a  [0, 1, 3, 0, -5/2]
 3^a*+4/5*4^a  [0, 0, 1, 0, -1]
-------------- [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
   1^a*+1*3^a  [1, 4, 0, 0, 13/4]
   2^a*+3*3^a  [0, 1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0, 0, 1, 0, -1]
-------------- [0, 0, 0, 1, 5/4]
```

```
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
   1^a*+4*2^a  [1, 0, 0, 0, 5/4]
-------------- [0, 1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0, 0, 1, 0, -1]
-------------- [0, 0, 0, 1, 5/4]
```

Dalla matrice in questa forma leggiamo immediatamente la soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \\ t = \frac{5}{4} \end{cases}$$

□

Esercizio 7.24. [MM77] *Determinare le soluzioni in* $\mathbb{R}$ *del sistema*

$$\begin{cases} 3x + y \;\; + z + 3t = 1 \\ x \;\; + 4y \qquad + t \;\; = 1 \\ 5x + 2y \qquad\qquad = 1 \\ 2x + y \qquad\qquad\; = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa $[A|\underline{b}]$ associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Notiamo che se mettessimo come prime colonne la terza e la quarta, la riduzione Gaussiana sarebbe molto piu' semplice. Possiamo farlo, tenendo presente che questo equivale a introdurre nuove variabili $x' = z$, $y' = t$, $z' = x$, $t' = y$ e a risolvere il sistema nelle nuove variabili associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Svolgiamo i passi di riduzione di Gauss necessari a mettere il sistema in forma triangolare superiore, basta sostituire la quarta riga con la quarta riga meno 2/5 le terza, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

Risolviamo con la sostituzione all'indietro *nelle variabili* x', y', z', t' ed otteniamo facilmente

$$t' = 3,\ z' = -1,\ y' = -10,\ x' = 31,$$

da cui

$$t = y' = -10,\ z = x' = 31,\ y = t' = 3,\ x = z' = -1,$$

□

N.B. Avremmo potuto risolvere la terza e quarta equazione ricavando la soluzione unica in $x = x_0$, $y = y_0$, e sostituire poi $x = x_0$, $y = y_0$ nella prima e seconda riga, ottenendo un sistema di due equazioni nelle due variabili y, t facilmente risolubile.

Esercizio 7.25. [MM16] *Risolvere in $\mathbb{K}$ il sistema lineare associato alla matrice completa*

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soluzione. Mettiamo la matrice incompleta in forma il più possibile vicino alla diagonale mediante operazioni di Gauss:

```
Ab:=Mat[[ 2,  3,  1, -1, 2, 1, 1],
        [ 2,  3,  1,  0, 0, 1, 0],
        [ 0,  0,  2,  1, 2, 2, 2],
        [-2, -3,  0, -1, 6, 0, 4],
        [ 2,  3, -1, -2, 4, 0, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
     2^a-1*1^a [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
  0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
     4^a+1*1^a [0, 0, 1, -2, 8, 1, 5]
     5^a-1*1^a [0, 0, -2, -1, 2, -1, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[2, 3, 1, -1, 2, 1, 1],
    [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2],
    [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1],
    [0, 0, 1, -2, 8, 1, 5],
    [0, 0, -2, -1, 2, -1, -1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
-------------- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
   4^a-1/2*2^a [0, 0, 0, -5/2, 7, 0, 4]
     5^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 4, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
-------------- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
-------------- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
   4^a+5/2*3^a [0, 0, 0, 0, 2, 0, 3/2]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 4, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 5]=2
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
```

```
-------------- [2, 3, 1, -1,  2, 1,   1]
-------------- [0, 0, 2,  1,  2, 2,   2]
-------------- [0, 0, 0,  1, -2, 0,  -1]
-------------- [0, 0, 0,  0,  2, 0, 3/2]
     5^a-2*4^a [0, 0, 0,  0,  0, 1,  -2]
```

Abbiamo ridotto la matrice $[A|\underline{b}]$ in forma a scala. Vediamo ora di fare la sostituzione all'indietro mediante operazioni di Gauss

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*+1/2  [1, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 1/2, 1/2]
     2^a*+1/2  [0, 0, 1, 1/2, 1, 1, 1]
-------------- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
     4^a*+1/2  [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 6 pivot
 1^a*+1/2*5^a  [1, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 0, 3/2]
   2^a*+1*5^a  [0, 0, 1, 1/2, 1, 0, 3]
-------------- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 5 pivot
   1^a*+1*4^a  [1, 3/2, 1/2, -1/2, 0, 0, 3/4]
   2^a*+1*4^a  [0, 0, 1, 1/2, 0, 0, 9/4]
   3^a*-2*4^a  [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
 1^a*-1/2*3^a  [1, 3/2, 1/2, 0, 0, 0, 1]
 2^a*+1/2*3^a  [0, 0, 1, 0, 0, 0, 2]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
 1^a*+1/2*2^a  [1, 3/2, 0, 0, 0, 0,   0]
-------------- [0,   0, 1, 0, 0, 0,   2]
-------------- [0,   0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0,   0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
-------------- [0,   0, 0, 0, 0, 1,  -2]
```

Da cui otteniamo le equazioni:

$$x + \frac{3}{2}y = 0, \quad z = 2, \quad t = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{3}{4}, \quad v = -2$$

Le soluzioni sono

$$\left\{ \left(-\frac{3}{2}\lambda, \lambda, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -2 \right) \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

□

Esempio 7.26. `[CCC38]` *Risolvere il sistema*

$$S : \begin{cases} 3xt + yt + \frac{t(t-5)}{2}z = \frac{t(2-t)}{2} \\ x + y + tz = 0 \\ x - y - z = t \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ *al variare di* $t \in \mathbb{R}$. *(t è quindi parametro). Questo equivale a descrivere più in dettaglio l'insieme delle soluzioni*

$$Sol(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 3xt + yt + 1/2zt^2 - 5/2zt = -1/2t^2 + t \\ x + y + tz = 0 \\ x - y - z = t \end{cases} \right\}$$

Scriviamo il sistema nella forma equivalente mediante la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 3t & t & 1/2t^2 - 5/2t & -1/2t^2 + t \\ 1 & 1 & t & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

Per semplificare i calcoli, riordiniamo le righe in modo da non avere nella posizione a_{11} *un entrata dipendente da* t, *riconducendoci mediante scambio di righe al sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \\ 3t & t & 1/2t^2 - 5/2t & -1/2t^2 + t \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat[ [1,  1,             t,           0],
        [1, -1,            -1,           t],
        [3t, t, 1/2t^2 - 5/2t, -1/2t^2 + t]];

L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1, t             ,            0]
     2^a-1*1^a [0, -2,          -t - 1,            t]
    3^a-3t*1^a [0, -2t, -5/2t^2 - 5/2t, -1/2t^2 + t]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,              t,           0]
-------------- [0, -2,         -t - 1,           t]
     3^a-t*2^a [0,  0, -3/2t^2 - 3/2t, -3/2t^2 + t]
```

Che, rimettendo il sistema nella forma equazionale, ci da'

$$\begin{cases} x + y + tz = 0 \\ -2y - (t+1)z = t \\ -\frac{3}{2}(t+1)tz = \frac{(2-3t)t}{2} \end{cases}$$

Notiamo che in ogni passo di Gauss il coefficente della combinazione linear relativo alla riga che stavamo manipolando è sempre stato sicuramente non nullo. Quindi non è mai stato necessario spezzare i casi.

L'ultima equazione

$$-\frac{3}{2}(t+1)tz = \frac{(2-3t)t}{2}$$

ha soluzione unica se e solo se $t \neq 0, -1$, *e questa soluzione è*

$$\boxed{z = \frac{3t-2}{3(1+t)}}$$

Sostituendo la z *nella seconda equazione otteniamo*

$$2y - (t+1)\frac{3t-2}{3(1+t)} = t$$

da cui

$$\boxed{y = \frac{3t-1}{3}}$$

Sostituendo la z *e la* y *nella prima equazione otteniamo*

$$x + \frac{3t-1}{3} + t\frac{3t-2}{3(1+t)} = 0$$

da cui

$$\boxed{x = \frac{1-6t^2}{3t+3}}$$

e quindi le soluzioni sono

$$Sol(S) = \left\{ \left(\frac{1-6t^2}{3t+3}, \frac{3t-1}{3}, \frac{3t-2}{3(1+t)} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Trattiamo a parte i due casi $t = 0, -1$.

$t = 0$ *Il sistema diviene, sostituendo* $t = 0$ *nella forma triangolare superiore,*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 2y \end{cases}$$

e quindi le soluzioni, per $t = 0$, *sono*

$$Sol(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = -y \\ z = 2y \end{cases} \right\}$$

ovvero

$$Sol(S) = \{(-y, y, 2y)) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(-\lambda, \lambda, 2\lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$t = -1$ *In questo caso la terza equazione del sistema diviene*

$$0 = \frac{-(2+3)}{2}$$

che è chiaramente impossibile, e quindi il sistema è impossibile.

Riassumendo, il sistema S

- *per $t = -1$ è impossibile.*
- *Per $t = 0$ ha ∞ soluzioni*

$$Sol(S) = \{(-\lambda, \lambda, 2\lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda\,(-1, 1, 2)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{-\lambda\,(1, -1, -2)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- *Per $t \neq 0, -1$ ha un unica soluzione (al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$)*

$$Sol(S) = \left\{ \left(\frac{1 - 6t^2}{3t + 3}, \frac{3t - 1}{3}, \frac{3t - 2}{3(1 + t)} \right) \ \mid \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 7.27. [EE7] *Risolvere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sistema lineare*

$$\begin{cases} -tx + (t - 1)y + z = 1 \\ (t - 1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Scegliamo di non fare scambi di righe.

Andiamo avanti con Gauss con la trasformazione $III^a \to III^a + \frac{2}{t} \cdot I^a$. Dato che stiamo dividendo per t, dobbiamo porre $t \neq 0$. risolveremo a parte più tardi il caso $t = 0$.

Dato che $t \neq 0$ possiamo operare con Gauss

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & \frac{2t-2}{t} & \frac{t+2}{t} & \frac{5t+2}{t} \end{pmatrix} \quad III^a \to III^a + \tfrac{2}{t} \cdot I^a$$

N.B. *Avremmo potuto anche operare sulla terza riga con la trasformazione $III^a \to t \cdot III^a + 2 \cdot I^a$. Avremmo dovuto considerare a parte il caso $t = 0$ perchè avremmo avuto nullo il coefficente riga che stiamo sostituendo*

Possimo moltiplicare per t la terza riga, dato che $t \neq 0$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 2t-2 & t+2 & 5t+2 \end{pmatrix} \quad III^a \to t \cdot III^a$$

Continuiamo con la seconda colonna

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t+2 & 5t \end{pmatrix} \quad III^a \to III^a - 2 \cdot II^a$$

Ed abbiamo messo il sistema in forma triangolare superiore.

Abbiamo gia' la condizione $t \neq 0$, e quindi il primo pivot. Abbiamo il secondo pivot se $t \neq 1$, il terzo se $t \neq 2$. Se $t \notin \{0, 1, 2\}$ il sistema ha un'unica soluzione. Verificheremo a parte i tre casi particolari. Calcoliamo ora le soluzioni con la sostituzione all'indietro. La terza riga ci dice che

$$(1 - \frac{1}{2}t)z = \frac{5}{2}t \implies z = \frac{5t}{2 - t}$$

Sostituendo nella seconda riga otteniamo

$$(t-1)y + t\frac{5t}{2-t} = 1 \implies y = \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}$$

e sappiamo che $t^2-3t+2 = (t-1)(t-2) \neq 0$ per le condizioni poste. Sostituendo nella prima riga otteniamo

$$\begin{aligned}
-tx + (t-1)\frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2} + \frac{5t}{2-t} &= 1 \\
-tx + \frac{5t^2+t-2}{t-2} - \frac{5t}{t-2} - 1 &= 0 \\
\frac{-xt^2+2xt+5t^2-5t}{(t-2)} &= 0 \\
-xt^2+2xt+5t^2-5t &= 0 \\
x &= \frac{5t-5}{t-2}
\end{aligned}$$

Quindi se $t \notin \{0,1,2\}$ ho la soluzione, unica al variare del parametro t (questo vuol dire che per ogni dato $t \in \mathbb{K}$ c'e' una ed una sola soluzione)

$$\left(\frac{5t-5}{t-2}, \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}, \frac{5t}{2-t}\right)$$

Analizziamo adesso i casi particolari.

$t=1$ Sostituiamo $t=1$ nella forma triangolare superiore

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t+2 & 5t \end{pmatrix}$$

(possiamo farlo perchè siamo arrivati a calcolare la forma triangolare superiore senza supporre che $t \neq 1$)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dalla seconda riga otteniamo l'equazione $z = 1$ e dalla terza l'equazione $z = 5$. Il sistema è pertanto impossibile.

$t=2$ Sostituiamo $t=2$ nella forma triangolare superiore (possiamo farlo perchè siamo arrivati a calcolare la forma triangolare superiore senza supporre che $t \neq 2$) ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga otteniamo l'equazione $0 \cdot z = 5$ che non ha soluzione. Quindi il sistema è impossibile.

$t=0$ Il sistema, sostituendo $t=0$ nella forma iniziale

$$\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

diviene

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ -y = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

che ha immediatamente soluzione unica $x = \frac{5}{2}, y = -1, z = 0$. Abbiamo dovuto sostituire nella forma iniziale del sistema *e non nella forma triangolare superiore* perchè quest'ultima è ststa calcolata supponendo $t \neq 0$.

Ricapitolando, il sistema

- Per $t = 1, 2$ è impossibile.
- Per $t = 0$ ha soluzione unica $\left(\frac{5}{2}, -1, 0\right)$
- Per $t \notin \{0, 1, 2\}$ (caso generico) ha soluzione unica $\left(\frac{5t-5}{t-2}, \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}, \frac{5t}{2-t}\right)$

Notiamo che sostituendo $t = 0$ nella formula della soluzione del caso generico otteniamo

$$\left(\frac{5t-5}{t-2}, \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}, \frac{5t}{2-t}\right)_{|t=0} = \left(\frac{5}{2}, -1, 0\right)$$

Quindi potremmo compattare la descrizione:

- Per $t = 1, 2$ è impossibile.
- Per $t \notin \{1, 2\}$ (caso generico) ha soluzione unica $\left(\frac{5t-5}{t-2}, \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}, \frac{5t}{2-t}\right)$

Questo accade perchè abbiamo trattato a parte il caso $t = 0$ soltanto perchè abbiamo scelto un particolare elemento come primo pivot. Altre scelte avrebbero potuto portare ad altri casi particolari, che ugualmente sarebbero confluiti nel caso generale. □

Esercizio 7.28. [KK06] *Risolvere su* $\mathbb{Q}$ *il sistema di* 4 *equazioni in* 4 *incognite con matrice completa*

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

Soluzione. Riduciamo la matrice $[A|\underline{b}]$ con Gauss

```
Ab:=Mat[[5, 2,  1, -1,  0],
        [7, 1,  3,  2, -1],
        [3, 3, -1, -4,  1],
        [1, 4, -3, -7,  2]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=5
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [5, 2, 1, -1, 0]
   2^a-7/5*1^a [0, -9/5, 8/5, 17/5, -1]
   3^a-3/5*1^a [0, 9/5, -8/5, -17/5, 1]
   4^a-1/5*1^a [0, 18/5, -16/5, -34/5, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-9/5
```

```
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [5, 2, 1, -1, 0]
-------------- [0, -9/5, 8/5, 17/5, -1]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
```

Ci sono elementi nulli sulla diagonale dell'incompleta. Abbiamo quindi infinite o nessuna soluzione.

Il sistema dato è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y + z \quad - t & = \ \ 0 \\ \quad - \frac{9}{5}y + \frac{8}{5}z + \frac{17}{5}t & = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = & \ \ 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = & \ \ 0 \\ \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 2y + z \quad - t & = \ \ 0 \\ \quad - 9y + 8z + 17t & = -5 \\ \end{cases}$$

Dato che ogni riga nulla della matrice incompleta corrisponde ad un termine noto nullo (le righe sono nulle anche nella matrice completa), ci sono infinite soluzioni che possiamo riscrivere, esplicitando x, y, come

$$\begin{cases} x & = -\frac{5}{9}z - \frac{5}{9}t - \frac{2}{9} \\ \quad y & = \ \frac{8}{9}z + \frac{17}{9}t + \frac{5}{9} \\ \end{cases}$$

La procedura standard è di esplicitare le variabili associate ai pivot non nulli e di trattare le altre variabili come parametri. Pertanto chiamiamo $t = \alpha$ e $z = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

$$Sol(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-\frac{5}{9}\beta - \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{9},\ \frac{8}{9}\beta + \frac{17}{9}\alpha + \frac{5}{9},\ \alpha, \beta \right) \ \mid \ \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

□

Esercizio 7.29. [LL81] *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ risolvere il sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k^2+3k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$[A \mid \underline{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k^2+3k \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Scambiamo la seconda e quarta riga, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k^2+3k \end{array}\right)$$

Riduciamo con Gauss

```
Use R::=Q[x,y,z,t,k];
M:=Mat([[1,  2,0,  1,     0],
        [2,  3,1,  2,     0],
        [0,  0,6,k+5,     0],
        [0,k-1,1, -1,k^2+3k]]);
-------------------------------
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, 1, 0]
     2^a-2*1^a [0, -1, 1, 0, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 6, k + 5, 0]
  0 sotto pivot[0, k - 1, 1, -1, k^2 + 3k]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, 1, 0]
-------------- [0, -1, 1, 0, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 6, k + 5, 0]
 4^a+k - 1*2^a [0, 0, k, -1, k^2 + 3k]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=6
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  2, 0,                 1,        0]
-------------- [0, -1, 1,                 0,        0]
-------------- [0,  0, 6,             k + 5,        0]
  4^a-1/6k*3^a [0,  0, 0, -1/6k^2 - 5/6k - 1, k^2 + 3k]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
```

Esaminiamo l'ultima riga: osserviamo che $k^2 + 5k + 6 = (k + 2)(k + 3)$, moltiplichiamo per -6 e l'ultima riga della matrice si riduce alla seguente:

$$(0, 0, 0, (k + 2)(k + 3), -6k(k + 3))$$

1. Se $k = -2$ l'ultima riga ci dice che il sistema è impossibile, dato che l'equazione corrispondente è
$$0 \cdot t = -6(-2)(1) \Rightarrow 0 = 12$$

2. Se $k = -3$ la matrice diviene
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
ed il sistema associato è
$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ -y + z = 0 \\ 3z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3z \\ y = z \\ t = -3z \end{cases}$$
Abbiamo scelto arbitrariamente di esplicitare x, y, t in funzione di z per semplicità. Pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni ed esse sono
$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{(-3\lambda, \lambda, -3\lambda, \lambda) \ \mid \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. Se $k \neq -2, -3$ il sistema ha quattro pivot, quindi un unica soluzione, che troviamo facendo i conti, per esempio mettendo la matrice in forma normale,

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
--------------         [1, 2, 0, 1, 0]
       2^a*-1          [0, 1, -1, 0, 0]
     3^a*+1/6          [0, 0, 1, 1/6k + 5/6, 0]
4^a*-6/(k^2 + 5k + 6)  [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

Cancello la colonna sopra il 4  pivot

   1^a*+1*4^a        [1, 2, 0, 0, 6k/(k + 2)]
--------------       [0, 1, -1, 0, 0]
3^a*+1/6k + 5/6*4^a  [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
--------------       [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

Cancello la colonna sopra il 3  pivot

-------------- [1, 2, 0, 0, 6k/(k + 2)]
   2^a*-1*3^a  [0, 1, 0, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
-------------- [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
-------------- [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

Cancello la colonna sopra il 2  pivot

   1^a*+2*2^a  [1, 0, 0, 0, -2k]
-------------- [0, 1, 0, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
-------------- [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
-------------- [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]
```

La soluzione è unica al variare di $k \in \mathbb{R}$ e

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-2k, \frac{k^2+5k}{k+2}, \frac{k^2+5k}{k+2}, \frac{-6k}{k+2} \right) \right\}$$

□

7.4 Esercizi proposti

Osservazione 7.30. *Quando diciamo che un sistema ha ∞^s soluzioni, intendiamo che l'insieme delle soluzioni ha bisogno di almeno s parametri per essere descritto. Questa nozione sarà dettagliata in seguito.*

Esercizio 7.31. [GG01] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un' unica soluzione: $(x, y, z, t) = (0, 2, -1, 1)$. □

Esercizio 7.32. [GG02] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ 3x + y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + 2z + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = \left(\frac{4}{11}, 0, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$. □

Esercizio 7.33. [GG03] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni $(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}, y, z, -\frac{1}{4}\right)$. □

Esercizio 7.34. [GG04] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Il sistema è impossibile. □

Esercizio 7.35. [GG05] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ x + y + z + t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un' unica soluzione $(x, y, z, t) = \left(2, \frac{3}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ □

Le soluzioni verranno fornite in seguito

Esercizio 7.36. [CCA15] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.37. [CCA14] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.38. [CCA13] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.39. [CCA12] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & -6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.40. `[CCA11]` *Determinare se i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1,2,1), \quad \underline{v}_2 = (1,4,0), \quad \underline{v}_3 = (1,-1,1), \quad \underline{v}_4 = (2,2,5)$$

sono linearmente indipendenti. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 7.41. `[CCA00]` *Determinare se i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1,2,1,1), \quad \underline{v}_2 = (1,3,4,0), \quad \underline{v}_3 = (0,1,-1,1), \quad \underline{v}_4 = (1,2,2,5), \underline{v}_5 = (1,0,4,0)$$

sono linearmente indipendenti. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 7.42. `[CCD00]` *Quale è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in* $\mathbb{K}^n$*?*

Esercizio 7.43. `[CCA02]` *Determinare se i polinomi*

$$x^2 + 2x + 1, \quad x^2 - 2x + 1 \quad x^2 + x + 1$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$*. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.*

Esercizio 7.44. `[CCA03]` *Determinare se i polinomi*

$$3x^2 + 2x - 5, \quad x^2 - 3x + 2, \quad 4x^2 + 10x - 14$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$*. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.*

Esercizio 7.45. `[CCA04]` *Determinare se le funzioni*

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2(x) \end{array}, \qquad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x) \end{array}, \qquad h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5 \end{array},$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$*. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.*

Esercizio 7.46. `[CCB01]` *I polinomi in* $\mathbb{K}[x]$

$$x^4, x^3, x^2, x, 1$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$*?*

Esercizio 7.47. `[CCD01]` *Quale è il massimo numero di polinomi linearmente indipendenti in* $\mathbb{K}[x]$*?*

Esercizio 7.48. `[CCB29]` *I polinomi* $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{K}[x]$*, tutti di grado diverso tra loro, sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{K}$*?*

Esercizio 7.49. `[CCB47]` *I numeri reali* $1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{R}$*? Su* $\mathbb{Q}$*?*

Esercizio 7.50. `[CCB04]` *Determinare se le funzioni*

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2 x \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(2x) \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(2x) \end{array} \qquad T\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{11} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$*.*

Esercizio 7.51. `[CCB10]` *Determinare se le funzioni*

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin x \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos x \end{array} \qquad T\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+\sqrt{2} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$*.*

Esercizio 7.52. [CCB48] *Determinare se le funzioni*

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad T\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.53. [CCB02] *Sia* $F = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. *Quale è il massimo numero di funzioni linearmente indipendenti in* F*?*