Capitolo 6

Sesta Lezione

6.1 Sistemi lineari su un campo

Esempio 6.1. [CCC00]

- *Risolvere* $3x-2=0$ *in* $\mathbb{R}$ *equivale a determinare*
$$\{x \in \mathbb{R} \;\mid\; 3x-2=0\} \subset \mathbb{R} \text{ ovvero } \{2/3\}$$
- *Risolvere* $(3i-1)x^2+(i+1)x-i=0$ *in* $\mathbb{C}$ *equivale a determinare*
$$\{x \in \mathbb{C} \;\mid\; (3i-1)x^2+(i+1)x-i=0\} \subset \mathbb{C} \text{ ovvero } \left\{\frac{-i-1+\sqrt{(i+1)^2+4i(3i-1)}_{\mathbb{C}}}{2(3i-1)}\right\} \subset \mathbb{C}$$

Esempio 6.2. [CCC01] *Risolvere il sistema*
$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \text{in } \mathbb{R}$$
equivale a determinare
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}\right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ ovvero } \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Esempio 6.3. [CCC09] *Risolvere il sistema*
$$\begin{cases} 2x-y-5z=3 \end{cases} \qquad \text{in } \mathbb{R}$$
equivale a determinare
$$S=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} 2x-y-5z=3 \end{cases}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$
che posso descrivere in svariati modi, esplicitando la x
$$S=\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} x=-\frac{y}{2}-\frac{5}{2}z+\frac{3}{2} \end{cases}\right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \left\{\left(-\frac{y}{2}-\frac{5}{2}z+\frac{3}{2},y,z\right)\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

oppure la y

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ \left\{ y = 2x - 5z - 3 \right.\right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \{(x, 2x - 5z - 3, z)\} \subset \mathbb{R}^3$$

oppure la z

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ \left\{ z = -\tfrac{2}{5}x - \tfrac{y}{5} - \tfrac{3}{5} \right.\right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \left\{\left(x, y, -\frac{2}{5}x - \frac{y}{5} - \frac{3}{5}\right)\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Chiaramente si tratta sempre dello stesso insieme S

Problema 6.4. [CCC10] *Come faccio a testare se due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ sono uguali?*

1. *Se i due insiemi sono finiti, controllo che abbiano stessa cardinalità e stessi elementi.*
2. *Se i due insiemi sono dati mediante equazioni (*descrizione cartesiana*, vedremo poi una definizione precisa), devo controllare se le due descrizioni equazionali si possono trasformare l'una nell'altra.*
3. *Se i due insiemi sono dati descrivendo un elemento generico (*descrizione parametrica*, vedremo poi una definizione precisa) possiamo controllare che ogni elemento del primo insieme appartenga al secondo e viceversa.*

Esempio 6.5. [CCC02] *Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^2$*

$$A_1 = \{(1 + 2t, 2 - 4t) \ \mid\ t \in \mathbb{Q}\} \qquad A_2 = \{(3 - t, -2 + 2t) \ \mid\ t \in \mathbb{Q}\}$$

Determinare se $A_1 = A_2$.

Soluzione. Innanzitutto, per evitare confusioni, cambiamo il nome della variabile legata di A_2 da t ad s. Ricordiamo che i nomi delle variabili "legate", che descrivono un insieme, hanno senso solo nella descrizione dell'insieme stesso.

$$A_2 = \{(3 - s, -2 + 2s)$$

Vogliamo quindi vedere se ogni elemento di A_1 sta in A_2 e viceversa. Ovvero, se per ogni $t \in \mathbb{Q}$ $\exists$ $s \in \mathbb{Q}$ tale che $(1+2t, 2-4t) = (3-s, -2+2s)$ (incognita s, legata all'$\exists$, parametro t legato al $\forall$) e viceversa (l'incognita sarà t ed il parametro, s). Abbiamo quindi il sistema a variabile s e parametro t

$$(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ 2 - 4t = -2 + 2s \end{cases}$$

Mettiamo il sistema nella solita forma

$$(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ 2 - 4t = -2 + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 - 2t \\ s = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ s = 2 - 2t \right.$$

Quindi per ogni valore del parametro t esiste una $s = 2 - 2t$ che soddisfa il sistema, ed abbiamo quindi dimostrato che $A_1 \supseteq A_2$.

Il viceversa è immediato dai conti già fatti, per ogni valore del parametro s esiste una $t = 1 - \frac{1}{2}s$ che soddisfa il sistema, e quindi $A_2 \supseteq A_1$.

Quindi $A_1 = A_2$. □

Esercizio 6.6 (Proposto)**.** [CCC08] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x^3 + x^2 y = 0\} \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x^2 + xy = 0\} \quad A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x + y = 0\}$$

Esercizio 6.7 (Proposto)**.** `[CCC07]` *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$A_1 = \{(1+t, 1-t) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; t \in \mathbb{R}\} \quad A_2 = \{(1+t^2, 1-t^2) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; t \in \mathbb{R}\} \quad A_3 = \{(1+t^3, 1-t^3) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; t \in \mathbb{R}\}$$

Diamo una definizione formale di soluzioni:

Definizione 6.8. `[CCC03]` *Sia S un sistema di equazioni a soluzioni in $\mathbb{K}^n$,*

$$S : \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

dove $f_1, \ldots, f_n$ sono funzioni $: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Allora le soluzioni di S sono l'insieme

$$Sol(S) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Definizione 6.9. `[CCC04]` *Siano dati due sistemi di equazioni a soluzioni in $\mathbb{K}^n$,*

$$S_1 : \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Diciamo che S_1 è equivalente *ad S_2, ($S_1 \equiv S_2$) se, equivalentemente,*

1. *$Sol(S_1) = Sol(S_2)$*
2. *Posso trasformare le equazioni $f_1, \ldots, f_m$ nelle equazioni $g_1, \ldots, g_r$ attraverso operazioni equivalenti.*

   Per esercizio, provare che le due definizioni immediatamente precedenti sono equivalenti.

6.2 Metodo di Gauss

Esempio 6.10. `[CCC11]` *Risolviamo su $\mathbb{R}$ il sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

Vogliamo risolvere in modo sistematico, eliminando prima le x e poi le y, procedendo dalla prima equazione . Scambiamo la prima e seconda riga

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

sostituiamo alla seconda riga la differenza tra la seconda riga e la prima riga moltiplicata per 2, e alla terza riga la differenza tra la terza riga e la prima moltiplicata per 3.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z - 2(x - y + 2z) = 1 - 2(1) \\ 3x + y - 5z - 3(x - y + 2z) = 2 - 3(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad 5y - 3z = -1 \\ \quad 4y - 11z = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo alla terza riga la differenza tra la terza riga e la seconda moltiplicata per $\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad 5y - 3z = -1 \\ \quad 4y - 11z - 4/5(5y - 3z) = 1 - 4/5(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad 5y - 3z = -1 \\ \quad -\frac{43}{5}z = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad 5y - 3z = -1 \\ \quad 43z = 1 \end{cases}$$

Dato che opereremo una serie di sostituzioni, dividiamo le righe per avere polinomi monici

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - \frac{3}{5}z = -\frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases}$$

Sostituiamo la z e poi la y

$$\begin{cases} x - y + 2\left(\frac{1}{43}\right) = 1 \\ y - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{43}\right) = -\frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{41}{43} \\ y = -\frac{8}{43} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \left(-\frac{8}{43}\right) = \frac{41}{43} \\ y = -\frac{8}{43} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{43} \\ y = -\frac{8}{43} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases}$$

Notiamo che

- *operare la sostituzione $z = \frac{1}{43}$ nella seconda riga $y - \frac{3}{5}z = -\frac{1}{5}$ è equivalente a sostituire la seconda riga con la differenza tra la seconda riga e $\frac{3}{5}$ la terza*

$$y - \frac{3}{5}z + \frac{3}{5}z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{43}\right)$$

- *Sostituire alla seconda riga $2x + 3y + z = 1$ la differenza tra la seconda riga e la prima riga $x - y + 2z = 1$ moltiplicata per 2, che, come abbiamo visto, mi dà*

$$5y - 3z = -1$$

  equivale a operare la sostituzione $x = y - 2z + 1$ nella seconda riga

$$2(y - 2z + 1) + 3y + z = 1 \Rightarrow 5y - 3z = -1$$

Indichiamo questo procedimento sistematico di soluzione come *riduzione di Gauss* di un sistema. I singoli passi di soluzione saranno detti passi di tipo Gauss.

6.3 Sistemi e matrici

Vogliamo scrivere un sistema lineare in forma più compatta evitando la menzione esplicita delle variabili

Matrici e sistemi lineari

Definizione 6.11. `[CCC12]` *Sia $A \in \mathbb{K}^{nm}$. Se scriviamo A come*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diciamo che A è una matrice con m righe ed n colonne. *Gli elementi a_{ij} si dicono* entrate *della matrice. L'insieme delle matrici con n righe ed m colonne con entrate in $\mathbb{K}$ si indica come* $\mathrm{Mat}_{m\times n}\,\mathbb{K}$. *Indicheremo spesso la matrice A come (a_{ij}), con $i : 1, \dots, m$, $j : 1, \dots, n$. Le limitazioni su i, j saranno spesso sottintese. Se $m = n$ la matrice si dice* quadrata.

Definizione 6.12. `[CCC13]` *Le righe di A si indicano come $A_1, \dots, A_m$, le colonne come $A^1, \dots, A^n$.*

Esempio 6.13. `[CCC14]` *Abbiamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\mathbb{Q})$$

allora

$$A_1 = (1, 2, 3, 4) \text{ e } A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Definizione 6.14. `[CCC15]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Allora*

1. *La diagonale di A è data dagli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$.*
2. *Se tutti gli elementi di A fuori dalla diagonale sono nulli, la matrice A si dice diagonale.*
3. *Se tutti gli elementi di A sotto la diagonale sono nulli A si dice triangolare superiore.*
4. *Se tutti gli elementi di A sopra la diagonale sono nulli A si dice triangolare inferiore.*

Esempio 6.15. `[CCC16]` *Le matrici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore.

Esercizio 6.16. `[CCX17]` *Data l'operazione*

$$\begin{array}{cccc} +: & \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$

provare che $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo commutativo con elementro neutro $0 = (0_{ij})$.

Definizione 6.17. `[CCC17]` *Sia*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare con m equazioni ed n incognite. Diciamo che al sistema è associata la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

mentre la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice incompleta e la colonna

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è detta colonna dei termini noti. Il sistema S si scrive anche

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Osservazione 6.18. `[CCC19]` *Ricordiamo la definizione generale di equivalenza di sistemi: sia $\mathbb{K}$ campo e $A\underline{x} = \underline{b}$, $A'\underline{x} = \underline{b}'$ due sistemi di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$, $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono* equivalenti *se e solo se*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$$

6.4 Prodotto Scalare

Viene comodo per descrivere in modo compatto i sistemi lineari introdurre il *prodotto scalare*.

Osservazione 6.19. `[CCC21]` *Gli elementi $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ si dicono* vettori *e spesso indicheremo il vettore $(a_1, \dots, a_n)$ come $\underline{a}$. In questo contesto gli elementi di $\mathbb{K}$ si dicono scalari.*

Definizione 6.20. `[CCC22]` *Sia A un anello commutativo e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in A^n$. Allora l'operazione*

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & A^n \times A^n & \to & A \\ & ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) & \mapsto & (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n) = \sum_{i=1}^{n} v_iw_i \end{array}$$

è detta prodotto scalare. Nella maggior parte dei casi , A sarà un campo $\mathbb{K}$.

Esempio 6.21. [CCC23]

1. *Se* $\underline{v} = (1, 2, -4)$ *e* $\underline{u} = (1, 3, 2)$ *sono vettori di* $\mathbb{R}^3$,
$$\underline{v} \cdot \underline{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -1 \in \mathbb{R}$$
2. *Se* $\underline{v} = (1 + i, 1 - i)$ *e* $\underline{u} = (i, 1 + 2i)$ *sono vettori di* $\mathbb{C}^2$,
$$\underline{v} \cdot \underline{u} = (1 + i) \cdot i + (1 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 2i \in \mathbb{C}$$

Proposizione 6.22. [CCC24] *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$ *e* $\lambda \in A$. *Allora*

1. *Il prodotto scalare è commutativo, ovvero* $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$.
2. $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ *il prodotto scalare si distribuisce sulla somma di vettori.*
3. $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v}$ *il prodotto scalare è* omogeneo.

Dimostrazione.

1. Discende immediatamente dalla definizione.
2. Abbiamo che
$$\begin{aligned} (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i w_i + v_i w_i) \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w} &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i w_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i w_i + v_i w_i) \end{aligned}$$
E quindi la tesi.
3. Basta fare i conti analogamente al primo punto, raccogliendo λ.

□

Osservazione 6.23. [CCC25] *Sia* $\mathbb{K}$ *campo e* $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$. *Allora è sempre vero che*
$$\underline{0} \cdot \underline{v} = 0$$
ma $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ *non implica* $\underline{v} = \underline{0}$ *o* $\underline{w} = \underline{0}$. *Infatti*
$$(1, 1) \cdot (1, -1) = 0$$

Osservazione 6.24. `[CCQ25]` *Sia $\mathbb{K}$ campo e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Allora*

1. $\underline{v} \cdot_{\mathbb{R}} \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = 0$. *Infatti*

$$\begin{aligned}(v_1, \dots, v_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) &= 0 \\ \underline{v}_1^2 + \dots + \underline{v}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i^2 &= 0 \\ \forall\ i\ \underline{v}_i = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} &\end{aligned}$$

2. $\underline{v} \cdot_{\mathbb{C}} \underline{v} = 0 \not\Rightarrow \underline{v} = 0$. *Infatti* $(1, i) \cdot (1, i) = 1 + i^2 = 0$

Osservazione 6.25. `[CCC26]` *Sia $\mathbb{K}$ campo e $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con m equazioni ed n incognite. Possiamo indicare la prima equazione del sistema, $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ come*

$$\begin{aligned}(a_{11}, \dots, a_{1n}) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ A_1 \cdot \underline{x} &= b_1\end{aligned}$$

Analogamente per le altre equazioni, per esempio per $i \in \{1 \dots n\}$,

$$\begin{aligned}a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= b_i \\ A_i \cdot \underline{x} &= b_i\end{aligned}$$

Il sistema S si può quindi scrivere come

$$\begin{cases} A_1 \cdot \underline{x} = b_1 & \textit{prima riga} \\ A_2 \cdot \underline{x} = b_2 & \textit{seconda riga} \\ \qquad \vdots & \\ A_m \cdot \underline{x} = b_m & m - \textit{esima riga} \end{cases}$$

o in breve,

$$(A^1, \dots, A^n) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

o, dando un significato alla notazione cha avevamo usato in precedenza,

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Definizione 6.26. `[CCC27]` *L'operazione*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & (\lambda, \underline{v}) & \mapsto & \lambda(v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \end{array}$$

si dice prodotto esterno *di $\mathbb{K}^n$, e corrisponde, geometricamente, a moltiplicare per λ il modulo di $\underline{v}$ lasciando per il resto il vettore invariato.*

Proposizione 6.27. *Se $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$ si ha che*

1. $(\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$.

2. $\lambda(\underline{v}+\underline{w}) = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w}$.
3. $\lambda\mu\underline{v} = \lambda(\mu\underline{v})$.
4. $0\underline{v} = \underline{0}$, $\lambda\underline{0} = \underline{0}$, $1\underline{v} = \underline{v}$.

Dimostrazione. Immediata dalla definizione □

6.5 Operazioni sui sistemi

Vogliamo dimostrare che le operazioni sulle matrici (sui sistemi) di cui abbiamo parlato producono sistemi equivalenti.

Proposizione 6.28 (Scambio righe)**.** `[CCC30]` *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con m equazioni ed n incognite. Seguendo la notazione per le righe abbiamo che*

$$A = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_{i}, \dots, \underbrace{A_j}_{j}, \dots, A_m] \text{ con } i < j$$

Se

$$A' = [A_1, \dots, \underbrace{A_j}_{i}, \dots, \underbrace{A_i}_{j}, \dots, A_m]$$

$$\underline{b}' = (b_1, \dots, \underbrace{b_j}_{i}, \dots, \underbrace{b_i}_{j}, \dots, b_m)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni).

Dimostrazione. Ovvio, scambiare due equazioni non cambia le soluzioni del sistema. □

Definizione 6.29. `[CCC32]` *[Combinazioni lineari di due oggetti] Dati due oggetti f, g e due elementi α, β di un anello A per cui sia definito $\alpha f + \beta g$, l'oggetto $\alpha f + \beta g$ si dice* combinazione lineare *degli oggetti f, g a coefficienti α, β.*

Osservazione 6.30. `[CCX33]` *In genere gli oggetti sono polinomi di $\mathbb{K}[x]$, vettori di $\mathbb{K}^n$, funzioni, matrici.*

Esempio 6.31. `[CCX32]`

1. $5(1,2)+3(0,1) = (5,10)+(0,3) = (5,13)$ *è la combinazione lineare dei due vettori* $(1,2), (0,1)$ *a coefficienti* $5, 3$.
2. $-(x^2-1)+2(x+2) = -x^2+2x+5$ *è la combinazione lineare dei due polinomi* $x^2-1, x+2$ *a coefficienti* $-1, 2$.

La nozione di combinazione lineare si generalizza facilmente ad un numero qualunque di oggetti.

Definizione 6.32. `[CCX34]` *[Combinazioni lineari di più oggetti] Dati n oggetti $f_1, \dots, f_n$ e n elementi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di un anello A per cui sia definito*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot (f_1, \dots, f_n)$$

dove $\cdot$ è il prodotto scalare. L'oggetto $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ si dice combinazione lineare *degli oggetti $f_1, \dots, f_n$ a coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.*

Proposizione 6.33 (Combinazione lineare di righe)**.** `[CCC31]` *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con m equazioni ed n incognite. Sostituire l'equazione j-esima del sistema con la combinazione lineare di se stessa ed un altra equazione i-esima non cambia le soluzioni del sistema, se il coefficiente della prima equazione nella combinazione lineare è non nullo.*

Più formalmente, seguendo la notazione per le righe, abbiamo che

$$A = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_{i}, \dots, \underbrace{A_j}_{j}, \dots, A_m] \text{ con } i < j$$

$$\underline{b} = (b_1, \dots, \underbrace{b_i}_{i}, \dots, \underbrace{b_j}_{j}, \dots, b_m)$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, con $\beta \neq 0$

$$A' = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_{i}, \dots, \underbrace{\alpha A_i + \beta A_j}_{j}, \dots, A_m]$$

$$\underline{b}' = (b_1, \dots, \underbrace{b_i}_{i}, \dots, \underbrace{\alpha b_i + \beta b_j}_{j}, \dots, b_m)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono equivalenti.

Dimostrazione. Proviamo prima che ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ è anche soluzione di $A'\underline{x} = \underline{b}'$, e poi il viceversa.

- Sia $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora $\forall\ i : 1 \dots m$ abbiamo $A_i \cdot \underline{v} = b_i$; dobbiamo dimostrare che
  1. $\underline{v} \in \mathrm{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$, ovvero che $\forall\ i : 1 \dots m, i \neq j \quad A_i \cdot \underline{v} = b_i$ che è immediato dall'ipotesi dato che si tratta di righe diverse dalla j-esima,

     e che
  2. per la riga j-esima $(\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$ per le proprietà del prodotto scalare.

  $$(\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha A_i \cdot \underline{v} + \beta A_j \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$$

- Sia $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$. Allora

  $$\forall\ i : 1 \dots m, i \neq j \quad A_i \cdot \underline{v} = b_i \text{ e } (\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$$

  e vogliamo dimostrare che $\underline{v} \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ ovvero che

  $$\forall\ i : 1 \dots n \text{ abbiamo } A_i \cdot \underline{v} = b_i$$

  Dato che questo è evidente per ogni $i \neq j$ perchè $\underline{v}$ sia soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ rimane solo da dimostrare che

  $$A_j \cdot \underline{v} = b_j$$

  Ma

  $$\begin{aligned} (\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} &= \alpha b_i + \beta b_j \\ \alpha A_i \cdot \underline{v} + \beta A_j \cdot \underline{v} &= \alpha b_i + \beta b_j \end{aligned}$$

  Dato che $A_i \cdot \underline{v} = b_i \Rightarrow \alpha A_i \cdot \underline{v} = \alpha b_i$

  $$\begin{aligned} \beta A_j \cdot \underline{v} &= \beta b_j \\ \beta(A_j \cdot \underline{v} - b_j) &= 0 \end{aligned}$$

  Dato che $\beta \neq 0$ ne consegue che $A_j \cdot \underline{v} = b_j$ e quindi abbiamo la tesi.

□

Osservazione 6.34 (Moltiplicazione di una riga per scalare)**.** [CCW33] *Nelle ipotesi della proposizione immediatamente precedente, sostituire l'equazione j-esima del sistema un suo multiplo per uno scalare non nullo non cambia le soluzioni del sistema.*

Proposizione 6.35 (Scambio colonne)**.** [CCC33] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$. Ricordando che le colonne di A sono indicate come $A^1, \ldots, A^n$ abbiamo che*

$$A = [A^1, \ldots, \underbrace{A^i}_{i}, \ldots, \underbrace{A^j}_{j}, \ldots, A^n]$$

con $i < j$. Se

$$A' = [A^1, \ldots, \underbrace{A^j}_{i}, \ldots, \underbrace{A^i}_{j}, \ldots, A^n],\ x' = (x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j}, \ldots, x_n)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x}' = \underline{b}$ sono equivalenti.

Dimostrazione. Ovvio, cambiare di posto le variabili non cambia le soluzioni del sistema □

Definizione 6.36. [CCR31] *Una matrice A si dice* in forma a scala *se il primo elemento non nullo di ogni riga è a destra del primo elemento non nullo di tutte le righe superiori. Questi elementi non nulli si dicono* pivot.

Esempio 6.37. [CCC96] *Data la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & 11 \end{array}\right)$$

i pivot sono quelli indicati, ovvero 1 *in posizione* $1,1$, 5 *in posizione* $2,4$ *e* 14 *in posizione* $3,5$. *Le colonne dei pivot sono la prima, quarta e quinta.*

Esempio 6.38. [CCC95] *Data la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{14} \end{array}\right)$$

i pivot sono quelli indicati, ovvero 1 *in posizione* $(1,1)$, 1 *in posizione* $(2,4)$ *e* 1 *in posizione* $(3,5)$. *Le colonne dei pivot sono la prima, quarta e quinta.*

Tra tutte le possibili operazioni sulle righe di una matrice, alcune sono classificate come operazioni di Gauss.

Definizione 6.39. [CCY31] *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ Le operazioni di Gauss per una matrice sono*

1. *lo scambio di righe $A_i \leftrightarrow A_j$.*
2. *La sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i < j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j. Più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sotto il pivot di A_i nullo.*
3. *La sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i > j$ e con un opportuno λ tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sopra il pivot di A_i.*

Lo scambio di colonne non è considerata un operazione di Gauss, dato che non lascia invariate le soluzioni.

Definizione 6.40. `[CCD38]` *Dati due sistemi lineari* $A\underline{x} = \underline{b}$*,* $C\underline{x} = \underline{d}$ *diremo che le matrici* $[A|\underline{b}]$ *e* $[C|\underline{d}]$ *sono* equivalenti *se i sistemi lineari associati sono equivalenti, ovvero se hanno lestesse soluzioni.*

Definizione 6.41. `[CCD39]` *Una matrice quadrata di ordine* n *in cui i soli elementi non nulli sono sulla diagonale (gli elementi* $a_{11}, \ldots, a_{nn}$*) si dice* matrice diagonale*. Se gli elementi sulla diagonale di una matrice diagonale sono tutti uguali ad* 1 *questa matrice si denota come* matrice identità di ordine n *o* matrice identica di ordine n *o spesso come* I_n*. Le matrice diagonali sono un particolare tipo di matrici a scala.*

Proposizione 6.42. `[CCC39]` *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $A\underline{x} = \underline{b}$ *un sistema di* n *equazioni lineari ad* n *incognite (quadrato) su* $\mathbb{K}$*. Il sistema ammette un unica soluzione se e solo se posso trasformare* $[A|\underline{b}]$ *nel sistema equivalente* $[I_n|\underline{c}]$ *mediante operazioni di Gauss, dove* I_n *è la matrice identica di rango* n*.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero n di equazioni (ovvero sull'ordine n della matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$).

- Base, $n = 1$. Il sistema è

  $$\{a_{11}x = b_1$$

  Notiamo che

  - Se $a_{11} = 0$ e $b_1 \neq 0$ il sistema è impossibile.
  - Se $a_{11} = 0$ e $b_1 = 0$ tutte le $x \in \mathbb{K}$ sono soluzioni. Esitono quindi ∞ soluzioni.

  Il sistema ammette un unica soluzione se e solo se $a_{11} \neq 0$, ed in questo caso il sistema è equivalente al sistema

  $$\{x = b_1/a_{11}$$

  con matrice associata $[I_1|b_1/a_{11}]$

- Passo induttivo. Supponiamo la tesi vera per $n - 1$, vediamo che è vera per n.

  Vogliamo quindi dimostrare che:

  il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ammette un unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A|\underline{b}]$ nel sistema equivalente $[I_n|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss.

  sapendo che: (Ipotesi induttiva)

  ogni sistema $A''\underline{x} = \underline{b}''$, con $A'' \in \mathrm{Mat}_{n-1\times n-1}(\mathbb{K})$ ammette un unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A''|\underline{b}'']$ nel sistema equivalente $[I_{n-1}|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss

  $\Leftarrow$ Se posso trasformare il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ nel sistema equivalente $I_n\underline{x} = \underline{c}$ mediante operazioni di Gauss, il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema

  $$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

  ed è immediato che ha una ed una sola soluzione, $\underline{x} = \underline{c}$. Quindi ammette un unica soluzione. Notiamo che non è stato necessario usare l'ipotesi induttiva.

$\Rightarrow$ Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un unica soluzione. Voglio dimostrare che posso ridurre $[A|\underline{b}]$ alla matrice equivalente $[I_n|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss.

Opero sulla matrice completa $[A|\underline{b}]$. Per la prima riga, considero il primo elemento a_{11}. Se è nullo, scambio la prima riga con una riga sotto di lei che abbia il primo elemento non nullo. Se non ne trovo nessuna, vuol dire che tutta la prima colonna è nulla, e dato che questo implica che non ho condizioni su x_1, ed ho quindi ∞ soluzioni, mentre la soluzione esiste unica per ipotesi, questo e' impossibile.

Posso quindi supporre che $a_{11} \neq 0$ e trasformare la matrice con operazioni di Gauss nella matrice

$$[A'|\underline{b}'] = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right) \quad (i\text{-esima})^a \to (i\text{-esima})^a - \tfrac{a_{i1}}{a_{11}} I^a$$

$[A'|\underline{b}']$ è equivalente a $[A|\underline{b}]$. Posso scrivere $[A'|\underline{b}']$ come

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \mathbf{a'_{22}} & \mathbf{a'_{23}} & \cdots & \mathbf{a'_{2n}} & \mathbf{b'_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{a'_{n2}} & \mathbf{a'_{n3}} & \cdots & \mathbf{a'_{nn}} & \mathbf{b'_n} \end{array}\right)$$

la sottomatrice in neretto, che possiamo indicare come $[A''|\underline{b}'']$ ha ordine $n-1$ e soddisfa la tesi, quindi per l'ipotesi induttiva posso ridurla con Gauss alla matrice equivalente $I_{n-1}\underline{x} = \underline{c}''$. Indichiamo gli elementi di $[I_{n-1}|\underline{c}'']$ partendo per le righe dall'indice 2 per comodità.

Quindi il sistema associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array}\right)$$

Dividiamo la prima riga per a_{11}

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array}\right)$$

Adesso, posso ridurre la matrice incompleta a diagonale sostituendo $n-1$ volte la prima riga con la differenza della prima riga con la riga $i - esima$ moltiplicata per a_{1i}

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array}\right) \quad I^a \to I^a - a_{1i}(i\text{-esima riga})$$

con $i : 2 \dots n$. Sto operando una sostituzione all'indietro. O, se si preferisce dirlo in atro modo, sto mettendo la matrice in forma normale. Indichiamo la forma finale del termine noto della prima riga (cambia ad ogni operazione) con c_1.

□

Corollario 6.43. [CCC35] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con tante incognite quante equazioni (la matrice incompleta è quadrata). Se il sistema ammette un unica soluzione, possiamo sempre trovare un sistema equivalente $A'\underline{x} = \underline{b}'$ con A' matrice triangolare superiore con elementi sulla diagonale non nulli.*

Osservazione-Definizione 6.44. [CCQ35] *In sistema $[D|\underline{b}]$, con $D = (d_{ij})$ diagonale*

- *Se uno dei coefficienti d_{ii} è nullo, ed il corrispondente b_i non lo è, il sistema è impossibile.*
- *Se per ogni coefficiente d_{ii} nullo il corrispondente b_i è nullo, il sistema ha ∞ soluzioni, ed in particolare ogni variabile x_i può variare liberamente su $\mathbb{K}$. Sia k il numero dei coefficenti nulli, si dice che* il sistema ha ∞^k soluzioni.

Non sempre i gradini della scala hanno la stessa lunghezza

Esempio 6.45. [CCC93] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z + 3t + s &= 0 \\ x + y + z - 2t - s &= 2 \\ x + y + z + t \ \ + 3s &= 3 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Operiamo una riduzione di Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1,3,1,0],
        [1,1,1,-2,-1,2],
        [1,1,1,1,3,3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
     2^a-1*1^a [0, 0, 0, -5, -2, 2]
     3^a-1*1^a [0, 0, 0, -2, 2, 3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 4]=-5
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1,  3,    1,    0]
-------------- [0, 0, 0, -5,   -2,    2]
   3^a-2/5*2^a [0, 0, 0,  0, 14/5, 11/5]

-------------- [1, 1, 1,  3,  1, 0]
        1*2^a* [0, 0, 0,  5,  2, -2]
         5*3^a [0, 0, 0,  0, 14, 11]
```

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x+y+z+3t+s &= 0 \\ 5t+2s &= -2 \\ 14s &= 11 \end{cases}$$

Sostituiamo $s=\frac{11}{14}$ *e poi* $t=-\frac{5}{7}$ *nelle righe precedenti*

$$\begin{cases} x+y+z+3t+\frac{11}{14} = 0 \\ 5t+2\frac{11}{14} = -2 \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+3t = -\frac{11}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-3\frac{5}{7} = -\frac{11}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = \frac{19}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y-z+\frac{19}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases}$$

se scegliamo di esplicitare la x*. Le soluzioni del sistema sono quindi*

$$\left\{\left(-y-z+\frac{19}{14}, y, z, -\frac{5}{7}, \frac{11}{14}\right)\right\} \subset \mathbb{R}^5$$

Notiamo che nella forma finale del sistema la matrice associata è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{14} \end{array}\right)$$

Notiamo che invece di operare le sostituzioni, avremmo potuto, come al solito, fare delle opportune operazioni di Gauss sulla matrice.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
     2^a*-1/5  [0, 0, 0, 1, 2/5, -2/5]
    3^a*+5/14  [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]

Cancello la colonna sopra il 5  pivot

   1^a*+1*3^a  [1, 1, 1, 3, 0, -11/14]
 2^a*+2/5*3^a  [0, 0, 0, 1, 0, -5/7]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]

Cancello la colonna sopra il 4  pivot

   1^a*+3*2^a  [1, 1, 1, 0, 0, 19/14]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, -5/7]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]
```

6.5.1 Forma standard e normale

Osservazione 6.46. [CCC97] *Risulta evidente che in una matrice a scala è possibile cancellare tutti gli elementi sopra il pivot di una colonna di pivot con operazioni di Gauss* lasciando immutati gli elementi a sinistra della colonna.

Esempio 6.47. [CCC99] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x+2y+3z+t-w=2 \\ \qquad\qquad z\ \ -t+w=1 \\ \qquad\qquad\qquad t+w=0 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice è già in forma a scala. Per risolvere il sistema associato, mettiamola in forma standard con operazioni di Gauss. Iniziamo usando il pivot della terza riga per cancellare gli elementi sopra di lui nella seconda e prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} I^a \to I^a - III^a \\ II^a \to II^a + III^a \end{array}$$

Usiamo il pivot della seconda riga per cancellare l'elemento sopra di lui nella prima riga

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right) \quad I^a \to I^a - 3 * II^a$$

Il sistema associato alla matrice è

$$\begin{array}{cccccl} x & +2y & & & -8w & = -1 \\ & & z & & +2w & = 1 \\ & & & t & +w & = 0 \end{array}$$

Da cui abbiamo, esplicitando le variabili legate ai pivot e portando a destra le variabili non legate ai pivot,

$$\begin{cases} x = -1 - 2y + 8w \\ z = 1 - 2w \\ t = -w \end{cases}$$

Esempio 6.48. [CCC98] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x+y\ \ +z\ \ +t\ \ +w=1 \\ \qquad 2y-3z+5t-w=2 \\ \qquad\qquad z\ \ -t\ \ +w=0 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice è già in forma a scala. Per risolvere il sistema associato, mettiamola in forma standard con operazioni di Gauss. Iniziamo usando il pivot della terza riga per cancellare gli elementi sopra di lui nella seconda e prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} I^a \to I^a - III^a \\ II^a \to II^a + 3 * III^a \end{array}$$

Per comodità, dopo dividiamo la seconda riga per 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad II^a \to 1/2 * II^a$$

Usiamo il pivot della seconda riga per cancellare l' elemento sopra di lui nella prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad I^a \to I^a - II^a$$

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x \qquad\quad + t - w = 0 \\ \qquad y \quad + t + w = 1 \\ \qquad\quad z - t + w = 0 \end{cases}$$

da cui abbiamo, esplicitando le variabili legate ai pivot e portando a destra le variabili non legate ai pivot,

$$\begin{cases} x = -t + w \\ y = 1 - t - w \\ z = t - w \end{cases}$$

Osservazione 6.49. [CCA69] *Una matrice a scala con tutti gli elementi sopra i pivot nulli, è detta in* forma standard. *La matrice dell'esercizio 6.47 precedente , è in forma standard.*

Definizione 6.50. [CCC65] *Una matrice in forma standard in cui le colonne dei pivot siano raggruppate a sinistra formando una matrice diagonale, con gli elementi su questa diagonale* 1*, sopra possibilmente una matrice nulla è in* forma normale.

La matrice dell'esercizio 6.48 precedente è in forma normale.

Corollario 6.51. [CCC36] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre, ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ a $[S|\underline{b}']$ (S è a scala) con operazioni di Gauss del tipo $i < j$. Ho che*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(S\underline{x} = \underline{b}')$$

Corollario 6.52. [CCC37] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ ad una matrice equivalente $[S|\underline{b}']$ (S è una matrice in forma standard) con operazioni di Gauss. Ho che*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(S\underline{x} = \underline{b}')$$

Corollario 6.53. [CCC66] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre, usando operazioni di Gauss ed opportuni scambi di colonne, ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ a $[N|\underline{b}']$ (N è in forma normale). Ho che*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(N\underline{x} = \underline{b}')$$

Osservazione 6.54. [CCW66] *Ricordiamo che le operazioni di Gauss su una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$*

1. *lo scambio di righe $A_i \leftrightarrow A_j$.*
2. *la sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i < j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j (Più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sotto il pivot di A_i nullo).*

3. *la sostituzione di righe* $A_j \to A_j - \lambda A_i$ *per* $i > j$ *e con un opportuno* λ *che cancelli la prima entrata non nulla di* A_j *(Più precisamente,* λ *deve essere tale che la combinazione lineare* $A_j - \lambda A_i$ *abbia l'elemento sotto il pivot di* A_i *nullo)*

Osservazione 6.55. [CCZ31] *Quindi,*

Con le prime due operazioni di Gauss posso portare qualunque matrice in forma a scala.

Se uso anche la terza posso portare qualunque matrice in forma standard.

Se ammettiamo anche scambi di colonna (non sono operazioni di Gauss), posso portare qualunque matrice in forma normale. Ricordiamo che se la matrice rappresenta un sistema e se vogliamo le soluzioni del sistema originario, dobbiamo scambiare tra loro le posizoni del vettore delle soluzioni coerentemente con gli scambi di colonne.

Osservazione 6.56. [CCC79] *Il metodo usuale è di esplicitare le variabili associate ai pivot, e portare le variabili non associate ai pivot a destra dell'uguaglianza.*