Capitolo 16

Sedicesima Lezione

Esempio 16.1. `[GGG10]` *Sia* $\mathcal{F} = \{F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}\}$

$$\begin{array}{rccc} \circ\colon & \mathcal{F}\times\mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (F,G) & \mapsto & F\circ G \end{array} \quad \textit{dove} \quad \begin{array}{rccc} F\circ G\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & F(G(a)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot\colon & \mathbb{K}\times\mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (\lambda,F) & \mapsto & \lambda F \end{array} \quad \textit{dove} \quad \begin{array}{rccc} \lambda F\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & \lambda F(a) \end{array}$$

Allora $(\mathcal{F}, \circ, \cdot)$ *non è un* $\mathbb{K}$*-spazio perchè non tutte le funzioni ammettono un inversa rispetto alla composizione, e quindi la composizione non è un operazione chiusa, e* $(\mathcal{F}, \circ)$ *non è un gruppo.*

Esempio 16.2. `[GGG29]` *Sia* $W = \{F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid F \textit{ invertibile } \}$

$$\begin{array}{rccc} \circ\colon & W\times W & \to & W \\ & (F,G) & \mapsto & F\circ G \end{array} \quad \textit{dove} \quad \begin{array}{rccc} F\circ G\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & F(G(a)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot\colon & \mathbb{K}\times W & \to & W \\ & (\lambda,F) & \mapsto & \lambda F \end{array} \quad \textit{dove} \quad \begin{array}{rccc} \lambda F\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & \lambda F(a) \end{array}$$

Allora $(W, \circ, \cdot)$ *non è un* $\mathbb{K}$*-spazio perchè sebbene* $(W, \circ)$ *sia un gruppo, non è commutativo (la composizione di funzioni non è commutativa per funzioni invertibili). Infatti date le funzioni*

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & 3x+1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} G\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

abbiamo

$$F\circ G \not\equiv G\circ F$$

dato che

$$F\circ G(2) = F(G(2)) = F(4) = 13 \neq G\circ F(2) = G(F(2)) = G(4) = 16$$

ricordiamo che

$$F\circ G \equiv G\circ F \Leftrightarrow \forall\ a\in\mathbb{K}\ F\circ G(a) = G\circ F(a) \Leftrightarrow \forall\ a\in\mathbb{K}\ F(G(a)) = G(F(a)).$$

Esercizio 16.3. `[GGG08]` *Sia* $\mathcal{F} = \{F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}\}$

$$\begin{array}{rccc} \oplus\colon & \mathcal{F}\times\mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (F,G) & \mapsto & F\oplus G \end{array} \quad \textit{dove} \quad \begin{array}{rccc} F\oplus G\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & F(a)+G(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot\colon & \mathbb{K}\times\mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (\lambda,F) & \mapsto & \lambda\odot F \end{array} \quad \textit{dove} \quad \begin{array}{rccc} \lambda\odot F\colon & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & \lambda F(a) \end{array}$$

$(\mathcal{F}, \oplus, \odot)$ *è un* $\mathbb{K}$*-spazio?*

Dimostrazione. Le verifiche sono semplici, per esempio è immediato che esista il neutro additivo

$$0\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

e che per ogni $F\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ esista opposto, $-F\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & -F(x) \end{array}$. □

In generale useremo la notazione $(\mathcal{F}, +, \cdot)$, lasciando spesso indicato il $\cdot$.

Esercizio 16.4. [LL58] *Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare una base di*

$$V = \mathrm{Span}((1,2,3,\alpha),(3,2,0,\alpha),(\alpha,1,2,0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$$

Soluzione. Usiamo il metodo della matrice. Potremmo vedere il rango di questa matrice in dipendenza da α direttamente. Qui facciamo invece i calcoli con Gauss.

Ci ricordiamo che i vettori sono scritti nella matrice per riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 3 & 2 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comodità spostiamo la prima colonna in terza posizione, operando lo scambio di colonne

$$1^a \to 3^a \quad 2^a \to 1^a \quad 3^a \to 2^a \quad 4^a \to 4^a$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo con Gauss

```
A:=Mat[[2,3,a,1],
       [2,0,a,3],
       [1,2,0,a]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, a, 1]
     2^a-1*1^a [0, -3, 0, 2]
   3^a-1/2*1^a [0, 1/2, -1/2a, a - 1/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2,  3,     a,      1]
-------------- [0, -3,     0,      2]
   3^a+1/6*2^a [0,  0, -1/2a, a - 1/6]
```

Per avere l'ultima riga nulla bisognerebbe che, contemporaneamente,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha = 0 \\ \alpha - \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

che è impossibile. La terza riga è quindi sempre non nulla e i tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e dato che per costruzione generano V, sono una base di V.

□

16.1 Rappresentazione unica e coordinate

Esempio 16.5. `[GGE46]` *Sia* $\underline{v}_1 = (1,2), \underline{v}_2 = (1,3), \underline{v}_3 = (1,4)$ *un sistema di generatori di* $\mathbb{R}^2$ *com* $\mathbb{R}$*-spazio. Allora*

$$(1,1) = 1\underline{v}_1 + 1\underline{v}_2 - \underline{v}_3 = (1,2) + (1,3) - (1,4)$$

e

$$(1,1) = 5\underline{v}_1 - 7\underline{v}_2 + 3\underline{v}_3 = 5(1,2) - 7(1,3) + 3(1,4) = (5,10) - (7,21) + (3,12)$$

Proposizione 16.6. `[GGG46]`

Sia dato un $\mathbb{K}$ *spazio* V *e* $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$*. Allora* B *è base di* V *se e solo se per ogni vettore* $\underline{v} \in V$ *esiste una unica* n*-pla di elementi di* $\mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tale che*

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{v} \tag{16.1}$$

Dimostrazione.

- Dimostriamo che se B è base per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esiste una unica n-pla di elementi di $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tale che

  $$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{v}$$

  Dato che i vettori $\underline{\underline{v}}$ generano V, per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esistono scalari $\underline{\lambda}$ tali che $\underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{v}$. Vogliamo dimostrare l'unicità.

  Supponiamo per assurdo che $\underline{\alpha} \neq \underline{\beta}$ e $\underline{\alpha} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{\beta} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{v}$. Allora avremmo

  $$(\underline{\alpha} - \underline{\beta}) \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{0}$$

  ma dato che i vettori $\underline{\underline{v}}$ sono linearmente indipendenti, questo implica

  $$\underline{\alpha} - \underline{\beta} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{\beta}$$

  assurdo.

- Dimostriamo che se per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esiste una unica n-pla di elementi di $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tale che

  $$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{v}$$

  allora B è base.

  Dato che la n-pla esiste, B è un sistema di generatori. Dato che la n-pla esiste sempre unica, per ogni $\underline{v}$, esiste unica anche per $\underline{0}$ e quindi

  $$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

  ha solo la soluzione $\underline{\lambda} = \underline{0}$, che vuol dire che i vettori di B sono linearmente indipendenti.

□

Definizione 16.7. `[GGG47]` *Sia dato un* $\mathbb{K}$ *spazio* V *be una sua base* $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$*. Allora per ogni vettore* $\underline{w} \in V$ *gli scalari* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *per cui* $\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\lambda} = \underline{w}$ *si dicono* coordinate di $\underline{w}$ secondo la base B *e possiamo scrivere* $\underline{w} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_B$*.*

Esempio 16.8. `[GGG48]` *Le coordinate sono uniche* fissata una base*. Rispetto a basi differenti un vettore può avere coordinate differenti*

In $\mathbb{R}^2$ *il vettore* $(1,2)$ *ha coordinate*

- $1,2$ *rispetto alla base* $E_2 = \underline{e}_1, \underline{e}_2$. *Notiamo che* $(1,2) = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$. *Scriviamo anche* $(1,2) = (1,2)_{E_2}$.
- $1,0$ *rispetto alla base* $B = (1,2),(1,3)$. *Notiamo che* $(1,2) = 1\cdot(1,2) + 0\cdot(1,3)$. *Scriviamo anche* $(1,2) = (1,0)_B$.
- $1,-1$ *rispetto alla base* $B_1 = (3,4),(2,2)$. *Notiamo che* $(1,2) = 1\cdot(3,4) - 1\cdot(2,2)$. *Scriviamo anche* $(1,2) = (1,-1)_{B_1}$.
- $1,1$ *rispetto alla base* $B_2 = (1,0),(0,2)$. *Notiamo che* $(1,2) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,2)$. *Scriviamo anche* $(1,2) = (1,1)_{B_2}$.

Osservazione 16.9. `[GGA47]` *Quindi se un sistema di generatori non è una base si perde l'unicità della rappresentazione, garantita solo per le basi.*

Osservazione 16.10. `[GGG60]` *In un certo senso, quando dò una base sto considerando una spazio vettoriale come un* $\mathbb{K}^n$*, dato che stabilisco una corrispondenza biunivoca tra i vettori di* V *e le loro coordinate in un certo* $\mathbb{K}^n$.

Osservazione 16.11. `[GGQ60]` *Data una base* $B = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *di un* $\mathbb{K}$*-spazio* V *Notiamo l'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} F_B\colon & V & \to & \mathbb{K}^n \\ & \underline{v} & \mapsto & \textit{coordinate di } \underline{v} \textit{ rispetto a } B \end{array}$$

è invertibile (è una corrispondenza biunivoca) e la sua inversa è

$$\begin{array}{rccc} F_B^{-1}\colon & \mathbb{K}^n & \to & V \\ & (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_1 \underline{v}_i \end{array}$$

Valgono le proprietà

$$\forall\ \underline{v},\underline{w} \in V\ \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ F_B(\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) = F_B(\alpha\underline{v}) + F_B(\beta\underline{w})$$
$$\forall\ \underline{v},\underline{w} \in \mathbb{K}^n\ \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ F_B^{-1}(\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) = F_B^{-1}(\alpha\underline{v}) + F_B^{-1}(\beta\underline{w})$$

Parleremo di questo dopo aver discusso i morfismi di spazio vettoriale.

Proposizione 16.12. `[GGB24]` *Dati* $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n \in V$ $\mathbb{K}$*-spazio e* $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{K}$,

1. $V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\alpha\underline{v}_i + \beta\underline{v}_j,\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_n)$
2. $V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n,\alpha\underline{v}_i + \beta\underline{v}_j)$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che $V \subseteq W$ e $V \supseteq W$ da cui $V = W$.

$V \supseteq W$ I vettori $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_n$ appartengono anche a V. Il vettore $\alpha\underline{v}_i + \beta\underline{v}_j$ è la combinazione lineare di due vettori di V e quindi appartiene a V.

$V \subseteq W$ I vettori $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_n$ appartengono anche a W. Per il vettore $\underline{v}_j$, abbiamo che

$$\underline{v}_j = \frac{1}{\alpha}(\alpha\underline{v}_i + \beta\underline{v}_j - \beta\underline{v}_j)$$

e $\underline{v}_j \in V \Rightarrow -\beta\underline{v}_j \in W$, $(\alpha\underline{v}_i + \beta\underline{v}_j) \in W$ quindi la loro somma moltiplicata per uno scalare sta ancora in W, quindi $\underline{v}_j \in W$.

2. Lasciata per esercizio.

□

Corollario 16.13. `[GGB25]` *Data la matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ed una sua riduzione a scala* S*, abbiamo che* $\mathrm{Span}(A_1,\dots,A_m) = \mathrm{Span}(S_1,\dots,S_m)$.

Osservazione 16.14. `[GGB99]` *Data la matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ed una sua riduzione a scala* S*, abbiamo che in generale* $\mathrm{Span}(A^1,\dots,A^m) \neq \mathrm{Span}(S^1,\dots,S^m)$.

Dimostrazione. Basta trovare un esempio in cui l'uguaglianza non vale. Prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che i vettori appartenenti a $\mathrm{Span}((1,0),(2,0))$ hanno sempre la seconda componente nulla, $A^1 = (1,1) \notin \mathrm{Span}((1,0),$
e quindi $\mathrm{Span}((1,1),(2,2)) \neq \mathrm{Span}((1,0),(2,0))$. □

Proposizione 16.15. `[GGB55]` *I vettori* $B = \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n \in \mathbb{K}^n$ *sono base di* $\mathbb{K}^n$ *se e solo se la matrice quadrata per righe (o per colonne)* $[\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n]$ *è non singolare.*

Traccia della dimostrazione. B è base se e solo se ho la rappresentazione unica, ovvero per ogni $\underline{v} \in V$ il sistema

$$[\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n] \cdot \underline{x} = \underline{v}$$

ha unica soluzione. Questo è vero se e solo se la matrice incompleta, quadrata $[\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n]$ è non singolare. □

Esercizio 16.16. `[HHH16]` *Completare se possibile a base di* $\mathbb{R}^5$ *i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1,2,1,2,0), \underline{v}_2 = (1,2,1,4,1), \underline{v}_3 = (1,2,2,0,0), \underline{v}_4 = (1,2,-1,10,2) \in \mathbb{R}^5$$

Soluzione. Costruiamo la matrice che ha i vettori come righe e riduciamola a scala

```
M:=Mat([[1,2, 1, 2, 0],
        [1,2, 1, 4, 1],
        [1,2, 2, 0, 0],
        [1,2,-1,10, 2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 2, 0]
-------------- [0, 0, 1, -2, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 2, 1]
     4^a+2*2^a [0, 0, 0, 4, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=2
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 2, 0]
-------------- [0, 0, 1,-2, 0]
-------------- [0, 0, 0, 2, 1]
     4^a-2*3^a [0, 0, 0, 0, 0]
```

Non sono avvenuti scambi di riga. Questo ci dice che le prime tre righe della matrice (e quindi i vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti e che il vettore $\underline{v}_4$ è combinazione lineare dei primi tre. I vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4$ non possono essere quindi completati a base, ma i vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ si.

I pivot sono nella prima, terza e quarta colonna. Affermiamo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_5$ è una base di $\mathbb{R}^5$. Basta dimostrare che i cinque vettori sono linearmente indipendenti, ovvero che il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basta sviluppare per la quarta e quinta riga per avere che il determinante di A è nullo se e solo se è non nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è non nullo in quantro triangolare superiore con tre pivot. Quindi $rk\, A = 5$ e $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_5$ è base di $\mathbb{R}^5$, completamente dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ $\square$

Dimostriamo ora il

Teorema 16.17 (Del completamento)**.** `[GGG96a]` *Sia V un K-spazio e $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p \in V$ linearmente indipendenti. Sia $B = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ una base di V con $n > p$. Allora esistono $n - p$ vettori in B, siano $\underline{v}_{i_1}, \ldots, \underline{v}_{i_{n-p}}$ tali che*

$$\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p, \underline{v}_{i_1}, \ldots, \underline{v}_{i_{n-p}} \textit{ siano una base di } V$$

(ho completato i vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p$ alla base $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p, \underline{v}_{i_1}, \ldots, \underline{v}_{i_{n-p}}$ di V)

Dimostrazione. Scriviamo i vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ nelle coordinate della base B ottenendo dei vettori di $\mathbb{K}^n$. Stiamo identificando i vettori di V con il vettore delle loro coordinate in base B. Stiamo quindi trasformando il nostro problema su V ad un problema su $\mathbb{K}^n$, dove possiamo usare la teoria delle matrici. Ricordiamo altresì che *in coordinate B* i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ si scrivono, rispettivamente, come

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= 1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \underline{v}_n = (1, 0, \ldots, 0)_B \\ &\vdots \\ \underline{v}_n &= 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \cdots + 1 \cdot \underline{v}_n = (0, \ldots, 0, 1)_B \end{aligned}$$

Costruiamo la matrice per riga $A = [\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p]$ e riduciamola con Gauss alla matrice a scala S. Essendo le righe di A linearmente indipendenti per ipotesi nessuna si riduce a zero e la matrice S ha p pivot. Siano $j_1, \ldots, j_{n-p}$ gli indici delle colonne senza pivot.

Dimostriamo che $S_1, \ldots, S_p, \underline{v}_{j_1}, \ldots, \underline{v}_{j_{n-p}}$ sono base di V.

Costruiamo la matrice quadrata $C = [S_1, \ldots, S_p, \underline{v}_{j_1}, \ldots, \underline{v}_{j_{n-p}}]$. Se calcoliamo il determinante con Laplace, sviluppando secondo le righe $p+1, \ldots, n$ (quelle associate ai vettori della base B che abbiamo aggiunto) ci riduciamo al calcolo del determinante di una matrice quadrata $p \times p$ a scala con p pivot, che è non nullo.

La matrice C si ottiene riducendo a scala soltanto le prime p righe della matrice $[\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p, \underline{v}_{j_1}, \ldots, \underline{v}_{j_{n-p}}]$, che quindi è anche'essa non sigolare. I vettori

$$\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p, \underline{v}_{j_1}, \ldots, \underline{v}_{j_{n-p}}$$

sono quindi linearmente indipendenti. È facile verificare che generano V e che quindi formano quindi una base di V $\square$

Corollario 16.18. [GGG98a] *Siano B_1, B_2 basi di un $\mathbb{K}$-spazio V. Allora $\#B_1 = \#B_2$.*

Dimostrazione. Sia $B_1 = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ e $B_2 = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$. Se $n = p$ non cè nulla da dimostrare. Supponiamo per assurdo che $p < n$. Possiamo allora completare $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ a base di V con $n-p$ vettori di B_2. Ma questo è impossibile, dato che B_1 è già base e quindi sistema massimale di generatori. Abbiamo una contraddizione e quindi è assurdo supporre $p < n$. Procediamo analogamente per $p > n$. Abbiamo quindi dimostrato $p = n$. □

16.2 Operazioni sui sottospazi

Ho le seguenti operazioni sui sottospazi:

Dato un $\mathbb{K}$-spazio V di dimensione n con base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

1. Dato $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ e $\underline{v} \in V$ decidere se $\underline{v} \in W$. Se U ha base $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ si risolve decidendo se il sistema lineare
$$x_1\underline{w}_1 + \cdots + x_p\underline{w}_p = \underline{v}$$
ha soluzioni.

   Questo si può fare, se stiamo lavorando in $\mathbb{K}^n$ ne seguente modo: Abbiamo il sistema di generatori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t$ per W. Costruiamola matrice per righe $[\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t, \underline{v}]$ e riduciamola a scala. Se la righe $\underline{v}$ si riduce a zero, $\underline{v} \in W$.

2. Dati $U, W \underset{SSP}{\subseteq} V$, decidere se $U \underset{SSP}{\subseteq} W$. Date basi B_U, B_W di U, W si risolve vedendo se ogni elemento di B_U sta in W.

   Questo si può fare, se stiamo lavorando in $\mathbb{K}^n$ ne seguente modo: Abbiamo sistemi di generatori $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t$ per U e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s$ per W. Costruiamola matrice per righe $[\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_t, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s]$ e riduciamola a scala. Se tutte le righe $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s$ si riducono a zero, ogni vettore di un sistema di generatori di W, e quindi ogni vettore di W, appartengono a U.

3. Dati $U, W \underset{SSP}{\subseteq} V$, decidere se $U = W$. Si risolve verificando se $U \underset{SSP}{\subseteq} W$ e $W \underset{SSP}{\subseteq} U$.

Somma ed intersezione di sottospazi

Definizione-Proposizione 16.19. [HHH23] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio $W_1,\ W_2 \underset{SSP}{\subseteq} V$. Allora*

1. *L'insieme*
$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \ \mid\ \underline{w}_1 \in W_1 \ e\ \underline{w}_2 \in W_2\} \\ &= \{\lambda\underline{w}_1 + \mu\underline{w}_2 \ \mid\ \underline{w}_1 \in W_1, \underline{w}_2 \in W_2 \ e\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$
si dice lo spazio somma di $W_1,\ W_2$ *e* $W_1 + W_2 \underset{SSP}{\subseteq} V$.

2. *L'insieme*
$$W_1 \cap W_2 = \{\underline{w} \in V \ \mid\ \underline{w} \in W_1 \ e\ \underline{w} \in W_2\} \underset{SSP}{\subseteq} V$$
si dice lo spazio intersezione di $W_1,\ W_2$.

3. *L'insieme*
$$W_1 \cup W_2 = \{\underline{w} \in V \ \mid\ \underline{w} \in W_1 \ o\ \underline{w} \in W_2\}$$
l'unione di $W_1,\ W_2$, è sottospazio se e solo se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

Dimostrazione.

1. Immediata dalla definizione di spazio vettoriale.
2. Dimostriamo che $W_1 \cap W_2$ è chiuso sulla combinazione lineare: siano $\underline{w}_1 \in W_1 \cap W_2$, $\underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Allora dobbiamo dimostrare che
$$\lambda\underline{w}_1 + \mu\underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2$$
ma
$$\underline{w}_1 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{w}_1 \in W_1 \text{ e } \underline{w}_1 \in W_2 \underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \qquad \underline{w}_2 \in W_1 \text{ e } \underline{w}_2 \in W_2$$
e dato che $W_1, W_2 \underset{SSP}{\subseteq} V$ abbiamo che
$$\lambda\underline{w}_1 + \mu\underline{w}_2 \in W_1 \quad \text{ e } \quad \lambda\underline{w}_1 + \mu\underline{w}_2 \in W_2$$
quindi
$$\lambda\underline{w}_1 + \mu\underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2$$
come richiesto.
3. Lasciato per esercizio

□

Vedremo meglio queste applicazioni quando parleremo di morfismi di spazi vettoriali.

Proposizione 16.20. `[GGA61]` *Dati* $V, W \underset{SSP}{\subseteq} V$ $\mathbb{K} -$ *spazio, con sistemi di generatori rispettivamente* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *un sistema di generatori di* $V + W$ *è dato da* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Sia
$$\mathcal{A} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \text{e} \mathcal{B} = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_q$$
Per definizione
$$V + W = \{\underline{v} + \underline{w} \;\mid\; \underline{v} \in V \;\underline{w} \in W\}$$
Per ipotesi
$$\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_p\underline{v}_p \text{ e } \underline{w} = \beta_1\underline{w}_1 + \cdots + \beta_q\underline{w}_q$$
per ogni $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in W$ ed opportuni $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$. Quindi
$$\underline{v} + \underline{w} = \alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_p\underline{v}_p + \beta_1\underline{w}_1 + \cdots + \beta_q\underline{w}_q$$
e
$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_q = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$
è un sistema di generatori per $V + W$. □

Osservazione 16.21. `[GGA73]` *Anche se* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *sono basi di* V, W *non necessariamente* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *è base di* $V + W$.

Esempio 16.22. `[GGA74]` *Siano*
$$V = \text{Span}((1,2,3),(1,1,1)) \text{ e } W = \text{Span}((1,1,0),(1,0,0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$
Per la proposizione precedente
$$V + W = \text{Span}((1,2,3),(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$
ma questi quatto vettori non sono una base di $V + W$, *che al massimo ha dimensione* 3, *dato che* $V + W \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

Osservazione 16.23. `[GGA63]` *Per comodità indicheremo spesso come* $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ *un vettore riga* $\underline{v} = (1, 2, 3)$ *e come* $\underline{v}^T$ *un vettore colonna.*

$$\underline{v}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

.

Osservazione 16.24. `[GGA62]` *Dati* $V, W \underset{SSP}{\subseteq} V$ $\mathbb{K}-$ *spazio di dimensione finita, con sistemi di generatori rispettivamente* $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ *e* $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ *costruisco*

- *la matrice per righe*
  $$A = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n]$$
  e la riduco alla matrice a scala S*. Le righe di* S *che non si riducono a zero (o le corrispondenti righe di* A *- attenzione agli scambi) mi danno una base di* $V + W$*.*
- *la matrice per colonne*
  $$A = [\underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_n^T, \underline{w}_1^T, \dots, \underline{w}_n^T]$$
  e la riduco alla matrice a scala S*. Le posizioni dei pivot di* S *dei pivot di* S *mi danno le posizioni delle colonne di* A *che formano una base di* $V + W$

Esempio 16.25. `[GGA99]` *Dati*

$$V = \mathrm{Span}((1, 2, 3), (1, 1, 1)) \text{ e } W = \mathrm{Span}((1, 1, 0), (1, 0, 0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

Determinare una base di $V + W$*.*

Soluzione. Svolgiamo, per esercizio, i conti sia per righe che per colonne.

Per righe

-
```
VW:=Mat([[1,2,3],
         [1,1,1],
 [1,1,0],
 [1,0,0]]);
RiduciScalaVerbose(VW);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3]
     2^a-1*1^a [0, -1, -2]
     3^a-1*1^a [0, -1, -3]
     4^a-1*1^a [0, -2, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3]
-------------- [0, -1, -2]
     3^a-1*2^a [0, 0, -1]
     4^a-2*2^a [0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  2,  3]
-------------- [0, -1, -2]
-------------- [0,  0, -1]
     4^a+1*3^a [0,  0,  0]
```

Una base di $V + W$ è data da $(1, 2, 3), (0, -1, -2), (0, 0, -1)$, le righe coi pivot della matrice ridotta. Un altra da $(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 0)$, le corrispondenti righe di della matrice VW.

- Per colonne

```
VW:=Mat([ [1, 1, 1, 1],
          [2, 1, 1, 0],
          [3, 1, 0, 0]]);
RiduciScalaVerbose(VW);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1]
     2^a-2*1^a [0, -1, -1, -2]
     3^a-3*1^a [0, -2, -3, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,  1,  1]
-------------- [0, -1, -1, -2]
     3^a-2*2^a [0,  0, -1,  1]
```

Una base di $V + W$ è data da $(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 0)$, le colonne della matrice VW corrispondenti alle colonne coi pivot della matrice ridotta, la 1^a, 2^a e 3^a.

□