Capitolo 5

Quinta Lezione

5.1 Esercizi svolti

Esercizio 5.1. [BBB13] *Portiamo $2-3i \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica. Abbiamo $\rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ed abbiamo*

$$\begin{cases} a = \sqrt{13}\cos\theta \\ b = \sqrt{13}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{3}{2} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$$

E dato che θ è un angolo con coseno positivo e seno negativo, controllando sul piano di Argand-Gauss θ appartiene al quarto quadrante. La forma cartesiana di $2-3i$ è quindi

$$\sqrt{13}\left(\cos\operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right) + i\sin\left(-\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)$$
$$\sqrt{13}\left(\cos\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) - i\sin\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

Proposto: Fattorizzare il polinomio in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Esercizio 5.2. [BBB47] *Calcolare le radici seste di $i+1$. Mettiamo $1+i$ in forma esponenziale e usiamo la formula. Usiamo il piano di Argand-Gauss.*

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$
$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[6]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6}} \qquad k: 0\dots 5$$

e quindi

$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{24}} \qquad k=0$$
$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{6}} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{9\pi}{4}}{6}} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{24}} \qquad k=1$$
$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{6}} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{17\pi}{24}} \qquad k=2$$
$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{6}} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{25\pi}{24}} \qquad k=3$$
$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+8\pi}{6}} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{33\pi}{24}} \qquad k=4$$
$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+10\pi}{6}} = \sqrt[12]{2}\cdot e^{i\frac{41\pi}{24}} \qquad k=5$$

Notiamo che per $k = 6$ avremmo $\frac{49\pi}{24} = \frac{\pi}{24} + 2\pi$ e quindi per $k > n - 1$ ritroviamo le radici che avevamo già.

$$\sqrt[12]{2}e^{i\frac{49\pi}{24}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$$

Esercizio 5.3. `[EE01]` *Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z^4 + 1) = 0$*

Soluzione.

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$$

quindi cerchiamo le radici quarte di $-1 = 1e^{i\pi}$. Le radici si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_4 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

con $k = 0, 1, 2, 3$ e otteniamo le quattro radici complesse:

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} & k &= 0\\
z_1 &= e^{i\frac{3\pi}{4}} & k &= 1\\
z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} & k &= 2\\
z_3 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} & k &= 3
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.4. `[BBB56]` *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $4\,|z|^3 = z^5$*

Soluzione. Mettiamo z in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$; l'equazione diviene

$$\begin{aligned}
4\left|\rho e^{i\theta}\right|^3 &= (\rho e^{i\theta})^5\\
4\rho^3 = 4\rho^3 e^{i0} &= \rho^5 e^{i5\theta}
\end{aligned}$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza per i complessi in forma esponenziale abbiamo, ricordando che $\rho > 0$ dato che si tratta di un modulo, che:

$$\begin{cases} 4\rho^3 = \rho^5 \text{ con } \rho > 0\\ 0 = 5\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \rho^5 - 4\rho^3 = \rho^3(\rho^2 - 4) = 0 \text{ con } \rho > 0\\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \rho = 0, 2\\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dato che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ ho una soluzione, ho infinite soluzioni,

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
k = -2 & \theta = \frac{4}{5}\pi \\
k = -1 & \theta = \frac{2}{5}\pi \\
k = 0 & \theta = 0 \\
k = 1 & \theta = -\frac{2}{5}\pi \\
k = 2 & \theta = -\frac{4}{5}\pi \\
k = 3 & \theta = -\frac{6}{5}\pi \\
k = 4 & \theta = -\frac{8}{5}\pi \\
k = 5 & \theta = -\frac{10}{5}\pi \\
k = 6 & \theta = -\frac{12}{5}\pi \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Ma queste soluzioni non sono tutte distinte, infatti notiamo che

- per $k = 5$, $\theta = -\frac{10}{5} = 2\pi$ che ci dà gli stessi seno e coseno di $k = 0,\ \theta = 0$, e quindi lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = 1$ e $k = 6$ ci danno lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = -1,\ \theta = \frac{2}{5}$ ci dà lo stesso complesso di $k = 4,\ \theta = -\frac{8}{5} = \frac{2}{5} - 2\pi$.
- Eccetera...

Se ci limitiamo ai valori di k per cui $-\frac{2}{5}k\pi \in (-2\pi, 0]$, dato che poi i complessi si ripetono abbiamo che i θ delle soluzioni sono

$$
\begin{array}{ll}
k = 0 & \theta = 0 \\
k = 1 & \theta = -\frac{2}{5}\pi \\
k = 2 & \theta = -\frac{4}{5}\pi \\
k = 3 & \theta = -\frac{6}{5}\pi \\
k = 4 & \theta = -\frac{8}{5}\pi
\end{array}
$$

Se preferiamo i nostri angoli in $[0, 2\pi)$, prenderemo altri valori di k, oppure più banalmente, aggiungiamo 2π a questi θ trovando

$$\theta = 0 \quad \theta = \frac{2}{5}\pi \quad \theta = \frac{4}{5}\pi \quad \theta = \frac{6}{5}\pi \quad \theta = \frac{8}{5}\pi$$

Le soluzioni dell'equazione $4\left|z\right|^3 = z^5$ sono quindi

$$z_0 = 2 \cdot e^{i0} = 2,\ z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{5}\pi},\ z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{4}{5}\pi},\ z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{6}{5}\pi},\ z_4 = 2 \cdot e^{i\frac{8}{5}\pi},\ z_5 = 0$$

□

Esercizio 5.5. [LL73] *Fattorizzare in irriducibili il polinomio $z^5 + 2 \in \mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{Q}[z]$, $\mathbb{R}[z]$, $\mathbb{C}[z]$.*

Soluzione. Il polinomio $z^5 + 2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[z]$ per Eisenstein, $p = 2$.

Troviamo prima la fattorizzazione su $\mathbb{C}$ che in $\mathbb{R}[z]$, perchè questa fattorizzazione è particolarmente semplice e vogliamo sfruttare la caratterizzazione dei fattori reali di un polinomio reale vista sopra nella Proposizione 4.38.

Le cinque radici complesse sono

$$\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{5}} \text{ con } k = 0, 1, \cdots, 4$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}} && k = 0\\
z_1 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}} && k = 1\\
z_2 &= -\sqrt[5]{2} && k = 2\\
z_3 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{5}} && k = 3\\
z_4 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}} && k = 4
\end{aligned}$$

e quindi, per Ruffini, abbiamo i cinque fattori lineari in $\mathbb{C}[x]$

$$z^5 + 2 = (z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{5\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}})$$

Cerchiamo ora la fattorizzazione in $\mathbb{R}[z]$. Il polinomio è riducibile, dato che ha grado > 2. Sappiamo che una delle cinque radici è forzatamente reale, e le altre si dividono in due coppie di complessi coniugati non reali (sono i vertici di un pentagono regolare con un vertice reale). La radice reale è ovviamente $z_2 = -\sqrt[5]{2}$ ed il fattore lineare associato $x + \sqrt[5]{2}$.

Notiamo che le coppie di complessi coniugati sono

$$z_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}, \qquad z_4 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{\pi}{5}}$$

che mi dà il fattore reale

$$\begin{aligned}
(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{\pi}{5}}) &= z^2 - 2\operatorname{Re}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}})z + \left|\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right|^2\\
&= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + \sqrt[5]{4}\\
&= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)z + \sqrt[5]{4}
\end{aligned}$$

e

$$z_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi}, \qquad z_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7}{5}\pi} = \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{3}{5}\pi}$$

che mi dà il fattore reale

$$\begin{aligned}
(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi})(z - \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{3}{5}\pi}) &= z^2 - 2\operatorname{Re}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi})z + \left|\sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi}\right|^2\\
&= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)z + \sqrt[5]{4}\\
&= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)z + \sqrt[5]{4}
\end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\left|\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = \left|\sqrt[5]{2}\right|\left|\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right| = \sqrt[5]{2}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}$$

o piu' semplicemente, dato che $\forall\ \theta \in \mathbb{R}\ \left|e^{i\theta}\right| = 1$ abbiamo $\left|\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = \left|\sqrt[5]{2}\right| \cdot \left|e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = \sqrt[5]{2}$. □

Esempio 5.6. `[BBB45]` *Trovare le soluzioni in* $\mathbb{C}$ *dell'equazione*

$$z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i = 0$$

Soluzione. Per il Teorema fondamentale dell'algebra abbiamo 7 soluzioni in $\mathbb{C}$, contate con la loro molteplicità, dato che abbiamo un equazione polinomiale di grado 7. Troviamo le soluzioni. Raccogliamo a fattor comune come segue:

$$\begin{aligned} z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i &= 0 \\ z^5(z^2 + 2iz + i) + 2(z^2 + 2iz + i) &= 0 \\ (z^5 + 2)(z^2 + 2iz + i) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono date dell'unione delle soluzioni dei due fattori:

$$z^5 + 2 = 0 \text{ e } z^2 + 2iz + i = 0$$

Risolviamo separatamente le due equazioni.

Risolviamo prima l'equazione $z^5 + 2 = 0$ che equivale a calcolare le radici quinte complesse di -2. Innanzitutto scriviamo $-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$ e applichiamo la formula delle radici

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, \cdots, n-1$$

Pertanto visto che $\rho = 2, \theta = \pi$ e $n = 5$ abbiamo che le radici quinte di -2 sono:

$$\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{5}} \text{ con } k = 0, \cdots, 4$$

Da questa formula otteniamo le cinque radici complesse:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} && k = 0 \\ z_1 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{3}{5}\pi} && k = 1 \\ z_2 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{5}{5}\pi} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt[5]{2} && k = 2 \\ z_3 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{7}{5}\pi} && k = 3 \\ z_4 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{9}{5}\pi} && k = 4 \end{aligned}$$

L'equazione $z^2 + 2iz + i = 0$ è un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Adesso risolviamo la seconda equazione che osserviamo trattarsi di un equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Pertanto usiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ed otteniamo

$$\begin{aligned} z_{4,5} &= \frac{-2i + \sqrt{(2i)^2 - 4i}_{\mathbb{C}}}{2} \\ &= \frac{-2i + \sqrt{-4 - 4i}_{\mathbb{C}}}{2} \\ &= \frac{-2i + 2\sqrt{-1 - i}_{\mathbb{C}}}{2} \\ &= -i + \sqrt{-1 - i}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Adesso dobbiamo trovare le radici quadrate di $-1-i$. Innanzitutto calcoliamone il modulo e l'argomento. Poichè $a=-1$ e $b=-1$ si ha che $\rho=\sqrt{2}$ e $\theta=\frac{5}{4}\pi$. Per cui le radici quadrate di $-1-i$ si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_k = \sqrt[2]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{2}} \text{ k=0,1}$$

ed otteniamo le due radici complesse:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{8}} \qquad w_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{13\pi}{8}}$$

da cui si ottengono le soluzioni:

$$z_4 = -i + w_0 = -i + \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{8}} \qquad z_5 = -i + w_1 = -i + \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{13\pi}{8}}$$

$$z_5 = -i + w_0 = -i + \sqrt[4]{2}e^{i\frac{5\pi}{8}} \quad z_6 = -i + w_1 = -i + \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

Abbiamo così trovato le sette radici complesse cercate

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \\
z_1 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi} \\
z_2 &= -\sqrt[5]{2} \\
z_3 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7}{5}\pi} \\
z_4 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9}{5}\pi} \\
z_5 &= -i + \sqrt[4]{2}e^{i\frac{5}{8}\pi} \\
z_6 &= -i + \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13}{8}\pi}
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.7. [BBB93] *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$z\overline{z}^2 = z^3$$

e disegnarle sul piano di Argand-Gauss.

Soluzione. Abbiamo

$$z(\overline{z}^2 - z^2) = 0 \implies z = 0 \text{ oppure } \overline{z}^2 - z^2 = 0$$

Quindi abbiamo la soluzione banale $z=0$ ovvero $\rho=0$.

Adesso possiamo supporre $z \neq 0$ e dividere ambedue i menbri dell'equazione per z, ottenendo $\overline{z}^2 = z^2$.

Mettiamo il complesso in forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$, e dato che $z \neq 0$ possiamo supporre $\rho > 0$. L'equazione diviene:

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 &= z^2 \\
(\rho e^{-i\theta})^2 &= (\rho e^{i\theta})^2 \\
\rho^2 e^{-2i\theta} &= \rho^2 e^{2i\theta}
\end{aligned}$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza per i complessi in forma esponenziale

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^2 & \text{vera } \forall\, \rho \in \mathbb{R} \\ -2\theta = 2\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo che

$$\theta = -\frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Da cui si deducono gli angoli

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = -\pi \quad \theta_3 = -\frac{3}{2}\pi$$

o volendo gli angoli in $[0, 2\pi)$ (mantenendo gli stessi seni e coseni)

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Quindi le soluzioni sono

$$z_0 = \rho e^{i0} \quad z_1 = \rho e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = \rho e^{\pi} \quad z_3 = \rho e^{\frac{3\pi}{2}} \quad z_4 = 0 \text{ che avevamo trovato all'inizio}$$

con ρ qualunque, visto che non abbiamo condizioni su ρ.

Nel piano di Argand-Gauss le soluzioni di questa equazione sono quattro semi rette dall'origine con angoli rispettivamente $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$, origine compresa.

[Qui il disegno, a breve]

□

Esempio 5.8. `[BBB51]` *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$(\overline{z} - 1)^3 = 2z - 2$$

Soluzione. Sostituiamo $\omega = \overline{z} - 1$ da cui si ricava che

$$\overline{z} = \omega + 1 \Rightarrow z = \overline{\omega} + 1$$

L'equazione diventa quindi

$$\omega^3 = 2(\overline{\omega} + 1) - 2 = 2\overline{\omega}.$$

Adesso scriviamo ω in forma esponenziale $\omega = \rho e^{i\theta}$ ed otteniamo

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 2\rho e^{-i\theta}$$

che per il principio di identità dei complessi in forma esponenziale diviene

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 2) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \sqrt{2} \\ \theta = \frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni distinte di questa equazione sono:

$$\begin{aligned}
&\omega_0 = \sqrt{2}e^{i0} = \sqrt{2} && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 0 \\
&\omega_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 1 \\
&\omega_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{2}} = -\sqrt{2} && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 2 \\
&\omega_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{2}i && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 3 \\
&\omega_4 = 0 && \text{da } \rho = 0
\end{aligned}$$

Ricordandoci che $z = \overline{\omega} + 1$ ricaviamo le soluzioni dell'equazione originaria $(\overline{z} - 1)^3 = 2z - 2$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \overline{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \sqrt{2} \\
z_1 &= \overline{\sqrt{2}i} + 1 = 1 - \sqrt{2}i \\
z_2 &= \overline{-\sqrt{2}} + 1 = 1 - \sqrt{2} \\
z_3 &= \overline{-\sqrt{2}i} + 1 = 1 + \sqrt{2}i \\
z_4 &= \overline{0} + 1 = 1
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.9. `[BBB57]` *Trovare il numero di soluzioni in* $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ *del sistema*

$$\begin{cases} z^{100} - 1 = 0 \\ \mathrm{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

L'equazione ci dice che le soluzioni devono essere le radici di 1. *Ce ne sono due reali, con parte immaginaria nulla,* ± 1. *Le altre corrispondono a* 98 *punti simmetricamente disposti sulla circonferenza unitaria. La disuguaglianza ci dice che le soluzioni devono avere parte immaginaria positiva, ovvero giacere nel primo e terzo quadrante. Per simmetria, metà delle* 98 *soluzioni non reali rimaste avrà parte immaginaria positiva e metà parte immaginaria negativa. Quindi il sistema ha* 49 *soluzioni.*

Esercizio 5.10. `[BBB97]` *Fattorizzare in* $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ *il polinomio*

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12$$

Soluzione. Ricordando l'esercizio 3.8 ed il Criterio di Eisenstein, vediamo che una fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ è

$$(x-1)(x-2)^2(x^3+3)$$

Vediamo le fattorizzazioni in $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ Il polinomio $x^3 + 3$ si scompone calcolando le radici cubiche complesse di -3 usando la formula delle radici n-esime di $w = \rho e^{i\theta}$:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \text{con } k = 0, 1 \ldots, n-1$$

Si scrive

$$-3 = 3e^{i\pi} \Rightarrow w_k = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}} \qquad k = 0, 1, 2.$$

Quindi si ottengono le tre radici

$$z_0 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}}, k = 0 \quad z_1 = \sqrt[3]{3} e^{i\pi} = -\sqrt[3]{3}, k = 1 \quad z_2 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{5}{3}\pi}, k = 2$$

Notiamo che $z_2 = \overline{z_0}$ e quindi

$$\begin{aligned}
(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}})(x - \sqrt[3]{3} e^{i\frac{5\pi}{3}}) &= (x - \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}})(x - \sqrt[3]{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}) \\
&= x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}}) + \left|\sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}})\right|^2 \\
&= x^2 - 2\left(\sqrt[3]{3} \cos\frac{\pi}{3}\right) x + \sqrt[3]{9} \\
&= x^2 - 2\left(\sqrt[3]{3}\frac{1}{2}\right) x + \sqrt[3]{9} \\
&= x^2 - \sqrt[3]{3} x + \sqrt[3]{9}
\end{aligned}$$

A questo punto abbiamo che la fattorizzazione in irriducibili del polinomio

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12$$

- su $\mathbb{Q}$ è, come visto, $(x-1)(x-2)^2(x^3+3)$
- su $\mathbb{R}$ è $(x-1)(x-2)^2(x+\sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$
- su $\mathbb{C}$ è $(x-1)(x-2)^2(x+\sqrt[3]{3})(x - \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{3}})(x - \sqrt[3]{3}e^{i\frac{5\pi}{3}})$.

Osserviamo che se non fosse stata richiesta la fattorizzazione in $\mathbb{C}$ ma solo in $\mathbb{R}$ avremmo potuto procedere fattorizzando il polinomio x^3+3 usando Ruffini: una radice di x^3+3 è $-\sqrt[3]{3}$, quindi dividendo x^3+3 per $x+\sqrt[3]{3}$ otteniamo il polinomio $x^2 - 2x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ irriducibile su $\mathbb{R}$ in quanto ha discriminante negativo. □

Esercizio 5.11. `[BBB17]` *Fattorizzare in* $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ *il polinomio*

$$x^{12} - 1$$

Soluzione. Si puó applicare (ripetutamente) le formule della somma e differenza dei cubi e dei quadrati:

$$\begin{aligned} x^{12} - 1 &= (x^6+1)(x^6-1) \\ &= (x^6+1)(x^3+1)(x^3-1) \\ &= (x^2+1)(x^4-x^2+1)(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

Si osserva che:

- i polinomi $x+1, x-1$ sono lineari e quindi irriducibili sia su $\mathbb{Q}$ che su $\mathbb{R}$;
- i polinomi x^2+x+1, x^2-x+1 hanno discriminante negativo quindi sono irriducibili su $\mathbb{R}$ perció sono irriducibili anche su $\mathbb{Q}$;
- per quanto riguarda il polinomio $x^4 - x^2 + 1$ si devono fare alcune considerazioni: il polinomio ha grado 4 pertanto su $\mathbb{R}$ si fattorizza. Si cerca la fattorizzazione in $\mathbb{C}$ e si risale alla fattorizzazione in $\mathbb{R}$. Quindi si sostituisce $x^2 = t$ e si trovano le radici complesse del polinomio

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 1 = t^2 - t + 1 & \\ &= \left(t - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Per scomporre ulteriormente

$$x^2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{e} \qquad x^2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

si devono calcolare

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}_{\mathbb{C}} \qquad \text{e} \qquad x_{3,4} = \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}_{\mathbb{C}}$$

quindi si scrivono tali numeri complessi in forma esponenziale:

$$x_{1,2} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}}_{\mathbb{C}} \qquad \text{e} \qquad x_{3,4} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{\mathbb{C}} = \sqrt{e^{i\frac{5}{3}\pi}}_{\mathbb{C}}$$

Da cui si ottiene, uasndo la formula delle radici di un complesso, che:

$$x_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad x_2 = e^{i\frac{7}{6}\pi} \qquad x_3 = e^{i\frac{11}{6}\pi} \qquad x_4 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

A questo punto si osserva che le radici sono a due a due coniugate, in particolare

$$x_1 = \overline{x_3} \qquad x_2 = \overline{x_4}.$$

Adesso

$$\begin{aligned}
x^4 - x^2 + 1 &= (x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{i\frac{7}{6}\pi}) \cdot (x - e^{i\frac{11}{6}\pi})(x - e^{i\frac{5}{6}\pi}) \\
&= (x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{i\frac{11}{6}\pi}) \cdot (x - e^{i\frac{5}{6}\pi})(x - e^{i\frac{7}{6}\pi}) \\
&= (x^2 - (e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{11}{6}\pi})x + e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi})(x^2 - (e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{7}{6}}\pi)x + e^{i\frac{5}{6}\pi} \cdot e^{i\frac{7}{6}\pi}) \\
&= (x^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)x + e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{11}{6}\pi})(x^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{5}{6}\pi}\right)x + e^{i\frac{5}{6}\pi}e^{i\frac{7}{6}\pi}) \\
&= (x^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1)(x^2 - 2\frac{-\sqrt{3}}{2}x + 1) \\
&= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).
\end{aligned}$$

I fattori $x^2 - \sqrt{3}x + 1$ e $x^2 + \sqrt{3}x + 1$ sono irriducibili su $\mathbb{R}$ in quanto hanno il discriminante negativo; la fattorizzazione su $\mathbb{R}$ del polinomio assegnato è quindi:

$$x^4 - x^2 - 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione su $\mathbb{Q}$ si devono fare ulteriori osservazioni. Innanzitutto i due polinomi $x^2 - \sqrt{3}x + 1$ e $x^2 + \sqrt{3}x + 1$ non appartengono a $\mathbb{Q}[x]$ perchè hanno coefficienti irrazionali.

Quindi se il polinomio $x^4 - x^2 + 1$ si potesse fattorizzare su $\mathbb{Q}$ avrebbe due diverse fattorizzazioni su $\mathbb{R}$ che non è possibile per l'unicità della fattorizzazione.

Pertanto il polinomio $x^4 - x^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Riassumendo abbiamo che una fattorizzazione in irriducibili del polinomio $x^{12} - 1$ è:

- $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ su $\mathbb{Q}$.
- $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$ su $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$, il polinomio $x^{12} - 1$ fattorizza in dodici fattori lineari distinti, ciascuno associato mediante il teorema di Ruffini ad una radice dodicesima distinta di 1.

Le radici sono ottenute dalla formula delle radici

$$e^{i\frac{0+2k\pi}{12}} = e^{ik\frac{\pi}{6}} \qquad k \in 0 \ldots 11.$$

Quindi una fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{C}$ è data da

$$x^{12} - 1 = (x - e^{i0})(x - e^{i\frac{\pi}{6}}) \cdots (x - e^{i\frac{11}{6}\pi}) = \prod_{k=0}^{11} \left(e^{ik\frac{\pi}{6}}\right)$$

Volendo partire dalla fattorizzazione in $\mathbb{C}[x]$ per ricavare quelle in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ dovremmo procedere come segue: osserviamo che le due radici $e^{0i\pi} = 1$ e $e^{i\pi} = -1$ sono le uniche due radici razionali che fattorizzano $x^2 - 1$.

Le due radici $e^{i\frac{3}{2}\pi} = i$ e $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$ sono le uniche due radici immaginarie pure, che fattorizzano $x^2 + 1$.
Le due radici $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono le radici complesse coniugate del polinomio $x^2 - x + 1$.
Le due radici $e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $e^{i\frac{5}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono le radici complesse coniugate del polinomio x^2+x+1
Le 4 radici complesse

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \qquad & e^{i\frac{5}{6}\pi} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ e^{i\frac{7}{6}\pi} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \qquad & e^{i\frac{11}{6}\pi} &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

sono quattro radici complesse a due a due coniugate che fattorizzano il polinomio

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 1 &= (x - e^{\frac{\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{\pi}{6}})(x - e^{i\frac{5}{6}\pi})(x - e^{-i\frac{5}{6}\pi}) \\ &= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.12. `[M106]` *Risolvere per* $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} e^z = e \\ |z| < 10 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione, usando la forma cartesiana di $z = a + ib$.

N.B. e^z è l'esponenziale di esponente z, non un complesso in forma esponenziale. Quindi $y \in \mathbb{R}$ NON $y \in [0, 2\pi)$

$$e^z = e \Leftrightarrow e^{x+iy} = e \Leftrightarrow e^x e^{iy} = e \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = e \\ y = 0 + 2k\pi \ \ con \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2k\pi \ \ con \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi gli infiniti complessi $z = 1 + 2k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$ *ed in particolare*

$$\begin{array}{llcc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ k=-2 & 1-i4\pi & & \sqrt{1+16\pi^2} \\ k=-1 & 1-i2\pi & & \sqrt{1+4\pi^2} \\ k=0 & \quad 1 & \textit{di modulo} & 1 \\ k=1 & 1+i2\pi & & \sqrt{1+4\pi^2} \\ k=2 & 1+i4\pi & & \sqrt{1+16\pi^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}$$

e dato che dobbiamo avere $|z| < 10$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+4\pi^2} & < & 1 + \sqrt{4\pi^2} = 1 + 2\pi \simeq 7.28 \ \textbf{Soluzione} \\ \sqrt{1+16\pi^2} & > & 1 + \sqrt{16\pi^2} = 1 + 4\pi \simeq 1 + 12.56 = 13.57 > 10 \ \textbf{Non soluzione} \end{array}$$

e per $k > 2$ *il modulo è maggiore che per* $k = 2$, *e che la situazione per* $k < 0$ *è speculare a quella per* $k > 0$ *Le soluzioni sono solo tre, per* $k = 0, \pm 1$, *rispettivamente* $z = 1, 1 \pm i2\pi$

5.2 Esercizi Proposti

Esercizio 5.13. [BBB77] *Calcolare* $(-1-i)^9$, $i^{2135789}$, $(1-5i)^5$

Esercizio 5.14. [BBB83] *Calcolare* $\sqrt[4]{1-i}$, $\sqrt[17]{-i}$, $\sqrt[17]{2-5i}$ *e disegnarle sul piano di Argand-Gauss*

Esercizio 5.15. [BBB62] *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le seguenti equazioni:*

1. $z^{12}-1=0$.
2. $\frac{z^{12}-1}{z^4-1}=0$.
3. $2ix^2-3x-i+1=0$.

Esercizio 5.16. [BBR83] *Risolvere le seguenti equazioni e disegnare le soluzioni sul piano di Argand-Gauss*

1. $e^z=e^{3z-\overline{z}}$
2. $e^{2z-1}=e^{z-\overline{z}}$
3. $e^{z\overline{z}}=3$

Esercizio 5.17. [BBW83] *Risolvere le seguenti equazioni e disegnare le soluzioni sul piano di Argand-Gauss*

1. $z^3\overline{z}=i$
2. $z^2\overline{z}^4=z^6$
3. $z^2\overline{z}^4=z^4$

Esercizio 5.18. [BBB48] $(\sqrt[7]{1}_{\mathbb{C}},\cdot)$ *è un gruppo moltiplicativo con la moltiplicazione di* $(\mathbb{C},\cdot)$*?*

Esercizio 5.19. [BBX48] *Dato* $n>1$, $(\sqrt[n]{1}_{\mathbb{C}},\cdot)$ *è un gruppo moltiplicativo con la moltiplicazione di* $(\mathbb{C},\cdot)$*?*

Esercizio 5.20. [EX79] *Fattorizzare* $f(x)=x^7-2x^6+x^5-3x^2+6x-3$ *su* $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.

Soluzione.

$$\begin{aligned}
&\text{In } \mathbb{Q}[x]: f(x)=(x^5-3)(x-1)^2\\
&\text{In } \mathbb{R}[x]: f(x)=(x-\sqrt[5]{3})\left(x^2-2\sqrt[5]{3}\cos\frac{2}{5}\pi x+\sqrt[5]{9}\right)\\
&\qquad\left(x^2-2\sqrt[5]{3}\cos\frac{4}{5}\pi x+\sqrt[5]{9}\right)(x-1)^2\\
&\text{In } \mathbb{C}[x]: f(x)=(x-\sqrt[5]{3})\left(x-\sqrt[5]{3}e^{\frac{2}{5}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[5]{3}e^{\frac{4}{5}i\pi}\right)\\
&\qquad\left(x-\sqrt[5]{3}e^{\frac{6}{5}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[5]{3}e^{\frac{8}{5}i\pi}\right)(x-1)^2
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.21. [EX43] *Fattorizzare su* $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ *il polinomio* $f(x)=x^8-x^4-6$.

Soluzione.

$$\begin{aligned}
&\text{In } \mathbb{Q}[x]: f(x) = (x^4-3)(x^4+2)\\
&\text{In } \mathbb{R}[x]: f(x) = (x+\sqrt[4]{3})\left(x-\sqrt[4]{3}\right)\left(x^2-2\sqrt[4]{3}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)x+\sqrt[4]{9}\right)\cdot\\
&\quad\left(x^2-2\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)x+\sqrt[4]{4}\right)\left(x^2-2\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)x+\sqrt[4]{4}\right)\\
&\text{In } \mathbb{C}[x]: f(x) = \left(x+\sqrt[4]{3}\right)\left(x-\sqrt[4]{3}\right)\left(x-\sqrt[4]{3}e^{\frac{1}{2}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[4]{3}e^{\frac{3}{2}i\pi}\right)\cdot\\
&\quad\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{1}{4}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{5}{4}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{7}{4}i\pi}\right)
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.22. `[EX55]` *Fattorizzare su* $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ *il polinomio* $f(x) = x^4+2$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
&\text{In } \mathbb{Q}[x]: f(x) = x^4+2\\
&\text{In } \mathbb{R}[x]: f(x) = \left(x^2-2\sqrt[4]{2}\cos\frac{1}{4}\pi x+\sqrt[4]{4}\right)\left(x^2-2\sqrt[4]{2}\cos\frac{3}{4}\pi x+\sqrt[4]{4}\right)\\
&\text{In } \mathbb{C}[x]: f(x) = (x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{1}{4}i\pi})\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{5}{4}i\pi}\right)\left(x-\sqrt[4]{2}e^{\frac{7}{4}i\pi}\right)
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.23. `[EX99]` *Fattorizzare* $f(x) = 6x^7-7x^6+2x^5+12x^2-14x+4$ *su* $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
&\text{In } \mathbb{Q}[x]: f(x) = (2x-1)(3x-2)(x^5+2)\\
&\text{In } \mathbb{R}[x]: f(x) = (2x-1)(3x-2)(x+\sqrt[5]{2})(x^2-2\sqrt[5]{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)x+\sqrt[5]{4})\\
&\quad(x^2-2\sqrt[5]{2}\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)x+\sqrt[5]{4})\\
&\text{In } \mathbb{C}[x]: f(x) = (2x-1)(3x-2)(x+\sqrt[5]{2})(x-\sqrt[5]{2}e^{\frac{1}{5}i\pi})(x-\sqrt[5]{2}e^{\frac{3}{5}i\pi})\cdot\\
&\quad(x-\sqrt[5]{2}e^{\frac{7}{5}i\pi})(x-\sqrt[5]{2}e^{\frac{9}{5}i\pi})
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.24. `[EX11]` *Fattorizzare* $f(x) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ *su* $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

Soluzione. Notiamo che

$$(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^7-1$$

$$\begin{aligned}
&\text{In } \mathbb{Q}[x]: f(x) \text{ è irriducibile}\\
&\text{In } \mathbb{R}[x]: f(x) = \left(x^2-2\cos\left(\frac{2}{7}\pi\right)x+1\right)\left(x^2-2\cos\left(\frac{4}{7}\pi\right)x+1\right)\\
&\quad\left(x^2-2\cos\frac{6}{7}\pi x+1\right)\\
&\text{In } \mathbb{C}[x]\ \left(x-e^{\frac{2}{7}i\pi}\right)\left(x-e^{\frac{4}{7}i\pi}\right)\left(x-e^{\frac{6}{7}i\pi}\right)\left(x-e^{\frac{8}{7}i\pi}\right)\left(x-e^{\frac{10}{7}i\pi}\right)\left(x-e^{\frac{12}{7}i\pi}\right)
\end{aligned}$$

□