Capitolo 15

Quindicesima lezione

15.1 Dimensione

Definizione 15.1. [GGA34] *Dato un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale* V *e uno suo sottospazio* W *generato da* $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$*, diciamo che un vettore generico di* W *è dato da* $a_1\underline{v}_1 + \cdots + a_n\underline{v}_n$ *con parametri* $a_1, \dots, a_n$*. Vedremo piú in dettaglio questo argomento quando avremo parlato di morfismi.*

Esempio 15.2. [GGG27]

$$\mathrm{Span}(x^2+1, x^2-x-2) = \{\alpha(x^2+1) + \beta(x^2-x-2) \ \mid \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha+\beta)x^2 - \beta x + \alpha - 2\beta \ \mid \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Un vettore generico di $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(x^2+1, x^2-x-2)$ *è* $(\alpha+\beta)x^2 - \beta x + \alpha - 2\beta$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

Osservazione 15.3. [GGA39] *Dato un* $\mathbb{K}$*-spazio* V *possiamo definire un suo sotto spazio* $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ *mediante un suo vettore generico. Questa descrizione si dice* descrizione parametrica di W

Teorema 15.4 (Completamento)**.** [GGG96] *Sia* V *un* K*-spazio e* $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p \in V$ *linearmente indipendenti. Sia* $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ *una base di* V *con* $n > p$*. Allora esistono* $n-p$ *vettori in* B*, siano* $\underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-p}}$ *tali che*

$$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-p}} \text{ siano una base di } V$$

(ho completato i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ *alla base* $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-p}}$ *di* V*)*

Corollario 15.5. [GGG98] *Siano* B_1, B_2 *basi di un* $\mathbb{K}$*-spazio* V*. Allora* $\#B_1 = \#B_2$*.*

Definizione 15.6. [GGG99] *Sia* V *un* $\mathbb{K}$*-spazio con base* $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$*. Diciamo che* V ha dimensione B *e scriviamo* $\dim B = n$*.*

Esempio 15.7. [GGB01]

- $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim \mathbb{K}[x]_d = d+1$.
- $\dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$.

Osservazione 15.8. [GGB30] *Se il* $\mathbb{K}$*-spazio* V *ammette un sistema finito di generatori, ammette una base e ha quindi dimensione finita.*

Osservazione 15.9. [GGB02] $\mathbb{K}[x]$ *non ha un sistema finito di generatori, e quindi non può avere base o dimensione.*

Osservazione 15.10. [GGG88] *Ogni V $\mathbb{K}$-spazio, ha almeno due sottospazi, detti* sottospazi banali $V \underset{SSP}{\subseteq} V$ *e* $\{\underline{0}\} \underset{SSP}{\subseteq} V$.

Le seguenti osservazioni ci aiuteranno negli esercizi.

Proposizione 15.11. [HHH15] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio di dimensione finita n e $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ non banale. Allora*

- *W ha dimensione finita* e $\dim W \leq \dim V$.
- $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

Dimostrazione.

- Dimostro che W ha dimensione finita e minore di n:

  dato che W è non banale, esiste $\underline{w}_1 \in W$ non nullo, linearmente indipendente da se stesso. Se $\underline{w}_1$ è base di W, mi fermo e $\dim W = 1$. Altrimenti, cerco un vettore $\underline{w}_2 \in W$ tale che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ siano linearmente indipendenti. Se non ne trovo, vuol dire che $\underline{w}_1$ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in W e quindi base, e $\dim W = 1$. Se lo trovo, continuo ad aggiungere $\underline{w}_j$ vettori di W tali che $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_j$ siano linearmente indipendenti. Non posso andare avanti all'infinito, perchè quando ho i vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{n+1}$ questi sarebbero un sistema di vettori linearmente indipendenti anche in V, e questo è assurdo perchè V ha dimensione n. Mi sono quindi dovuto fermare con $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p$, $p \leq n$, e questo è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in W, e quindi base di W e $\dim W = p \leq n$.

- $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$. Se $W = V$ ovviamente $\dim W = \dim V$. Dimostriamo il viceversa:

  Se $\dim W = n$ esiste una base di W di n elementi. Dato che questi sono $\dim V$ elementi linearmente indipendenti in W, lo sono anche in V, e sono quindi base di V.

$\square$

Corollario 15.12. [HHH65] *Siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio V di dimensione n. Allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono base di V, dato che sono un sistema massimale di vettori indipendenti.*

Corollario 15.13. [HHH66] *Sia V uno spazio di dimensione n e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n+p}$, vettori in V. Allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n+p}$ sono linearmente dipendenti, per la defínzione di dimensione.*

15.2 Alcuni esercizi

Problema 15.14. [GGA32] *Ci possiamo porre i seguenti problemi:*

1. *Dato $\underline{v} \in V$ e $W \underset{SSP}{\subseteq} V$, come possiamo decidere se $\underline{v} \in W$?*
2. *Dati $W, U \underset{SSP}{\subseteq} V$, come possiamo decidere se $W \subset U$?*
3. *Dati $W, U \underset{SSP}{\subseteq} V$, come possiamo decidere se $W = U$?*
4. *Dati $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in W \underset{SSP}{\subseteq} V$, questi generano W?*
5. *Dati $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in W \underset{SSP}{\subseteq} V$ che generano W, questi sono tutti necessari? Ovvero, esiste un sottoinsieme dei $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ che continua a generare W?*

6. *Dato uno spazio vettoriale V, c'e' un numero minimo o massimo di elementi per i suoi sistemi di generatori?*

Le risposte a questi problemi possono dipendere da come viene dato il sottospazio W.

Esempio 15.15. `[GGG52]`

1. *I vettori* $(1,2,3,2),(1,1,1,1)$ *formano una base di* $V = \mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1))$ *dato che ovviamente lo generano e sono linearmente indipendenti dato che non sono uno multiplo dell'altro.*

2. *I vettori* $(1,4,7,4),(1,6,11,6)$ *formano una base di* V*? Sono linearmente indipendenti, dobbiamo controllare che appartengano a* V *e generino tutto* V*. Per controllare che appartengano a* V *riduciamo la matrice*

```
M:=Mat[[1,2,3,2],
       [1,1,1,1],
       [1,4,7,4],
       [1,6,11,6]];
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2]
     2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1]
     3^a-1*1^a [0, 2, 4, 2]
     4^a-1*1^a [0, 4, 8, 4]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2]
-------------- [0, -1, -2, -1]
     3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0]
     4^a+4*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Dato che non abbiamo avuto scambi di righe, i vettori $(1,4,7,4),(1,6,11,6)$ *sono ciascuna linearmente dipendente con* $(1,2,3,2),(1,1,1,1)$ *e ne sono quindi combinazione lineare, che vuol dire che appartengono a* $\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1))$*.*

Per vedere che $(1,4,7,4),(1,6,11,6)$ *generano tutto* V *basta vedere che generano sia* $(1,2,3,2)$ *che* $(1,1,1,1)$*.*

```
M:=Mat[[1,4,7,4],
       [1,6,11,6],
       [1,2,3,2],
       [1,1,1,1]];
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 4, 7, 4]
     2^a-1*1^a [0, 2, 4, 2]
     3^a-1*1^a [0, -2, -4, -2]
     4^a-1*1^a [0, -3, -6, -3]
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 4, 7, 4]
-------------- [0, 2, 4, 2]
     3^a+1*2^a [0, 0, 0, 0]
   4^a+3/2*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Le ultime due righe della matrice sono ciascuna linearmente dipendente con le prime due e quindi sono ciascuna combinazione lineare delle prime due. Quindi i vettori $(1,2,3,2),(1,1,1,1) \in \mathrm{Span}((1,4,7,4),(1,6,11,6))$

N.B. In effetti abbiamo dimostrato che

$$\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1)) = \mathrm{Span}((1,4,7,4),(1,6,11,6))$$

dimostrando prima

$$\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1)) \supseteq \mathrm{Span}((1,4,7,4),(1,6,11,6))$$

e poi

$$\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1)) \subseteq \mathrm{Span}((1,4,7,4),(1,6,11,6))$$

Esempio 15.16. `[LL59]` *Determinare una base di*

$$V = \left\{ (x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ 2x-3y+2z+t+u=0 \\ x+y-z-2u=0 \end{cases} \right\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^5$$

Soluzione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio, quindi ha senso parlare di base. Risolviamo il sistema per trovare un vettore generico di V, e quindi poi la base richiesta.

```
A:=Mat[[1, 1, 1,2, 0],
       [2,-3, 2,1, 1],
       [1, 1,-1,0,-2]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 2, 0]
     2^a-2*1^a [0, -5, 0, -3, 1]
     3^a-1*1^a [0, 0, -2, -2, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 2, 0]
-------------- [0, -5, 0, -3, 1]
  0 sotto pivot[0, 0, -2, -2, -2]
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 1, 2, 0]
     2^a*-1/5  [0, 1, 0, 3/5, -1/5]
     3^a*-1/2  [0, 0, 1, 1, 1]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
   1^a*+1*3^a  [1, 1, 0, 1, -1]
-------------- [0, 1, 0, 3/5, -1/5]
```

```
-------------- [0, 0, 1, 1, 1]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
   1^a*+1*2^a  [1, 0, 0, 2/5, -4/5]
-------------- [0, 1, 0, 3/5, -1/5]
-------------- [0, 0, 1, 1, 1]
```

Il sistema diviene quindi quindi

$$\begin{cases} x = -2/5t + 4/5u \\ y = -3/5t + 1/5u \\ z = -t - u \end{cases}$$

un vettore generico è quindi

$$\left(-t-u, -\frac{3}{5}t + \frac{1}{5}u, -\frac{2}{5}t + \frac{4}{5}u, t, u\right) \text{ per } t, u \in \mathbb{R}$$

raccogliendo t, u abbiamo

$$t\left(-1, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0\right) + u\left(-1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$$

I due vettori esplicitati sopra generano V per costruzione ed è immediato verificare che siano linearmente indipendenti. Sono quindi una base di V. Possiamo moltiplicarli rispettivamente per -5 e 5 ed otteniamo un altra base di V, più piacevole:

$$(5, 3, 2, -5, 0), (-5, 1, 4, 0, 5)$$

□

Esempio 15.17. [LLX17] *Determinare una base di* $\mathrm{Span}((1, 2, 0, 3, 2, 1), (-7, 1, 0, -3, -2, 2), (3, 1, 0, 3, 2, 0))$

Soluzione. Mettiamo i tre vettori come colonne di una matrice che riduciamo con Gauss.

```
M:=Mat([[1, -7, 3],
        [2, 1, 1],
        [0, 0, 0],
        [3, -3, 3],
        [2, -2, 2],
        [1, 2, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -7, 3]
     2^a-2*1^a [0, 15, -5]
  0 sotto pivot[0, 0, 0]
     4^a-3*1^a [0, 18, -6]
     5^a-2*1^a [0, 12, -4]
     6^a-1*1^a [0, 9, -3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=15
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -7, 3]
-------------- [0, 15, -5]
  0 sotto pivot[0, 0, 0]
   4^a-6/5*2^a [0, 0, 0]
```

```
   5^a-4/5*2^a [0, 0, 0]
   6^a-3/5*2^a [0, 0, 0]
```

La prime e seconda colonna hanno pivot, la terza no. Quindi la prima e la seconda colonna di M sono linermente indipendenti, mentre la terza non lo è. Una base di W é quindi data da $(1,2,0,3,2,1),(-7,1,0,-3,-2,2)$ □

Esempio 15.18. [LL17] *Determinare una base di*

$$\{(x+3y-3z, 2x+y+4z, y-2z, x+4y-5z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$$

Soluzione. Un vettore generico di V è $(x+3y-3z, 2x+y+4z, y-2z, x+4y-5z)$.

Raccogliamo x, y e z, mettendo un vettore generico nella forma

$$x(1,2,0,1) + y(3,1,1,4) + z(-3,4,-2,-5) = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$$

dando un nome ai tre vettori.

Sicuramente i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a e generano V, per costruzione. Vediamo se sono linearmente indipendenti, e, se non lo fossero, troviamo anche una relazione di dipendenza lineare tra loro. Costruiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & 0 & 1 & \underline{v}_1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & \underline{v}_2 \\ -3 & 4 & -2 & -5 & \underline{v}_3 \end{array}\right)$$

mettendo i vettori per riga ed aggiungendo una colonna con i tag, per determinare una eventuale relazione lineare tra i vettori, per esercizio. Riduciamo con Gauss

```
Use R::=Q[v[1..3]],Lex;
A:=Mat[
  [1,2,0,1,   v[1]],
  [3,1,1,4,   v[2]],
  [-3,4,-2,-5,v[3]]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, 1,            v[1]]
     2^a-3*1^a [0, -5, 1, 1,  -3v[1] + v[2]]
     3^a+3*1^a [0, 10, -2, -2, 3v[1] + v[3]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 0, 1,                 v[1]]
-------------- [0, -5, 1, 1,       -3v[1] + v[2]]
     3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, -3v[1] + 2v[2] + v[3]]
```

La terza riga, con le prime tre componenti nulle, ci dice che il terzo vettore è combinazione lineare degli altri due, che sono linearmente indipendenti perchè nelle prime due righe abbiamo dei pivot. Dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano V e che $\underline{v}_3$ è generato da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ generano V. Sono quindi base.

La terza riga ci dà una relazione lineare tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$, dato che si legge come

$$\underline{0} = -3\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3$$

□

Esercizio 15.19. `[HHH63]` *Dire se*

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ \mathrm{Re}(z_1) = 0 \ e \ \mathrm{Im}(z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

è un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ spazio e darne la dimensione se possibile.

Dimostrazione.

- Come $\mathbb{C}$-spazio: vediamo che W non è un $\mathbb{C}$-sottospazio di $\mathbb{C}^3$, dato che

$$(i, 0, 0) \in W \text{ ma } i \cdot (i, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin W$$

- Come $\mathbb{R}$-spazio: imponendo ad un vettore

$$(a + bi, c + id, e + if)$$

le condizioni $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ e $\mathrm{Im}(z_2) = 0$ di appartenenza a W otteniamo un vettore generico di W

$$(bi, c, e + if)$$

Vediamo che la combinzione lineare di vettori di questo tipo è ancora di questo tipo (ovvero, che la combinazione lineare su $\mathbb{R}$ di due vettori di W appartiene a W). Infatti, con $x, y \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$x(bi, c, e + if) + y(b_1 i, c_1, e_1 + if_1) = (xbi + yb_1 i, xc + yc_1, xe + ye_1 + xfi + yf_1 i) = (Bi, C, E + IF)$$

con

$$B = xb + yb_1 \in \mathbb{R}, \quad C = xc + yc_1 \in \mathbb{R}, \quad E = xe + ye_1 \in \mathbb{R}, \quad F = xf + yf_1 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo adesso una base di W. Una naturale candididata è $(i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, i), (0, 0, 1)$. Vediamo che questi vettori generano W come $\mathbb{R}$-spazio e che sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

  - Generazione: un vettore generico di W è

$$(ai, b, c + id) = a(i, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + d(0, 0, i) \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Chiaramente $(i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, i), (0, 0, 1)$ generano W come $\mathbb{R}$-spazio.

  - Lineare indipendenza: il sistema di equazioni (variabili $x, y, z, t \in \mathbb{R}$)

$$x(i, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, i) + t(0, 0, 1) = \underline{0} \Leftrightarrow (xi, y, iz + t) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} xi = 0 \\ y = 0 \\ t + iz = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla $x = y = z = t = 0$ per il principio di identità dei complessi in forma cartesiana.

I nostri vettori sono quindi base di W come $\mathbb{R}$=spazio

Perchè ho scelto proprio questi quattro vettori

$$(i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, i), (0, 0, 1)$$

per vedere se formavano una base? Perchè un vettore generico di W è dato da un vettore generico di $\mathbb{C}^3$, $(a + bi, c + id, e + if)$ con le condizioni $a = d = 0$, quindi

$$(bi, c, e + if) = b(i, 0, 0) + c(0, 1, 0) + e(0, 0, i) + f(0, 0, 1)$$

□

15.3 Esercizi svolti

Esempio 15.20. `[GGQ33]` *Abbiamo che*

$$\underline{v} = (1,3,2,1) \in \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\} = W \ ?$$

In questo caso W *è del tipo* $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$*. Vediamo se* $\underline{v}$ *è soluzione del sistema. Sostituiamo.*

$$\begin{cases} x - 2z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \underset{x=1,y=3,z=2,t=1}{=} \begin{cases} 1 - 4 + 1 = 0 \\ 1 - 3 + 2 = 0 \end{cases}$$

La prima non è un uguaglianza. Quindi $\underline{v} \notin W$

Esempio 15.21. `[GGQ32]`

- *È vero che*

  $$(4,0,2,1) \in \mathrm{Span}((1,0,3,2),(1,0,1,1),(2,0,0,0)) \ ?$$

  Usando la definizione di Span*, bisogna vedere se esitono* α, β, γ *tali che*

  $$\alpha(1,0,3,2) + \beta(1,0,1,1) + \gamma(2,0,0,0) = (4,0,2,1)$$

  ovvero se il sistema

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  ha soluzioni. La matrice completa è

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Il rango dell'incompleta è massimo, 3*, perchè la sottomatrice*

  $$A_{(1,3,4);(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  è non singolare. Il rango della completa è 3 *dato che il suo determinate è nullo ed ha la stessa sottomatrice* 3×3 *dell'incompleta. Dato che i due ranghi sono uguali, esistono soluzioni per il teorema di Rouchè-Capelli.*

- *È vero che*

  $$\underline{v} = (1,2,3,2) \in \mathrm{Span}((1,0,3,2),(1,0,1,1),(2,0,0,0)) \ ?$$

  No, perchè tutti i vettori nello Span *hanno seconda componente nulla, e* $\underline{v}$ *no.*

Esempio 15.22. `[MK55]` *Determinare se le matrici*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *sono linearmente indipendenti, ed in caso contrario determinare una base dello spazio che generano e le relazioni tra di esse.*

Soluzione. Esprimiamo la matrici nella base canonical di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $(M_{1,1}, M_{1,2}, M_{2,1}, M_{2,2})$, dove

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$\begin{array}{lll} M_1 = (1,2,3,2), & M_2 = (1,0,-1,3), & M_3 = (2,2,2,5) \\ M_4 = (0,1,2,1), & M_5 = (1,4,7,1), & M_6 = (1,-4,-9,5) \end{array}$$

Mettiamo i vettori, per riga, nella matrice

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -9 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_7 \end{array} \end{array}$$

e riduciamola con Gauss

```
A:=Mat([[1, 2, 3, 2],
       [1, 0, -1, 3],
       [2, 2, 2, 5],
       [0, 1, 2, 1],
       [1, 4, 7, 1],
       [1, -4, -9, 5]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2]
     2^a-1*1^a [0, -2, -4, 1]
     3^a-2*1^a [0, -2, -4, 1]
  0 sotto pivot[0, 1, 2, 1]
     5^a-1*1^a [0, 2, 4, -1]
     6^a-1*1^a [0, -6, -12, 3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2]
-------------- [0, -2, -4, 1]
     3^a-1*2^a [0, 0, 0, 0]
   4^a+1/2*2^a [0, 0, 0, 3/2]
     5^a+1*2^a [0, 0, 0, 0]
     6^a-3*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Dato che non abbiamo effettuato scambi ri riga, questo ci dice che le matrici M_1, M_2, M_4 sono linearmente indipendenti, mentre le matrici M_3, M_5, M_6 si esprimo come combinazione lineare di queste.

Vogliamo adesso trovare queste combinazioni lineari. Usiamo il metodo delle variabili tag, aggiungendo l'opportuna colonna alla matrica A

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & m_1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & m_2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & m_3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & m_4 \\ 1 & 4 & 7 & 1 & m_5 \\ 1 & -4 & -9 & 5 & m_6 \end{pmatrix}$$

```
Use R::=Q[m[1..6]];
A1:=Mat([[1, 2, 3, 2,m[1]],
       [1, 0, -1, 3,m[2]],
       [2, 2, 2, 5,m[3]],
       [0, 1, 2, 1,m[4]],
       [1, 4, 7, 1,m[5]],
       [1, -4, -9, 5,m[6]]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, m[1]]
     2^a-1*1^a [0, -2, -4, 1, -m[1] + m[2]]
     3^a-2*1^a [0, -2, -4, 1, -2m[1] + m[3]]
  0 sotto pivot[0, 1, 2, 1, m[4]]
     5^a-1*1^a [0, 2, 4, -1, -m[1] + m[5]]
     6^a-1*1^a [0, -6, -12, 3, -m[1] + m[6]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  2,  3,   2,  m[1]]
-------------- [0, -2, -4,   1, -m[1] + m[2]]
     3^a-1*2^a [0,  0,  0,   0, -m[1] - m[2] + m[3]]
   4^a+1/2*2^a [0,  0,  0, 3/2, -1/2m[1] + 1/2m[2] + m[4]]
     5^a+1*2^a [0,  0,  0,   0, -2m[1] + m[2] + m[5]]
     6^a-3*2^a [0,  0,  0,   0,  2m[1] - 3m[2] + m[6]]
```

Le ultime componenti della terza, quinta e sesta riga ci dicono che

$$\begin{aligned} -M[1] - M[2] + M[3] &= 0 \\ -2M[1] + M[2] + M[5] &= 0 \\ 2M[1] - 3M[2] + M[6] &= 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} M[3] &= M[1] + M[2] \\ M[5] &= 2M[1] - M[2] \\ M[6] &= -2M[1] + 3M[2] \end{aligned}$$

e queste sono le combinazioni lineari richieste.

□

Esercizio 15.23. [FFE10] *Determinare il massimo numero possibile di colonne linearmente indipendenti tra quelle della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -11 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e dare per ciascuna delle le dipendenti una relazione lineare.

Soluzione. Ricordiamo che il massimo numero di colonne indipendenti è dato dal rango, ma in generale possiamo scegliere queste colonne con molta libertà.

Vediamo di procedere con la tecnica standard. Ridurre la matrice M con Gauss senza scambi di colonne ci darà le posizioni dei pivot, e quindi sapremo quante colonne al massimo possono essere indipendenti ed avremo una scelta di colonne dipendenti/indipendenti. Per trovare le relazioni lineari, bisogna risolvere il sistema

$$xA^1 + yA^2 + zA^3 + aA^4 + bA^5 = \underline{0}$$

le relazioni sono le soluzioni. Ma per risolvere il sistema riduciamo la matrice associata, che è poi M. Riduciamo senza scambi di colonne

```
M:=Mat([[3, 3, 2, 1, 0],
        [3, 3, 5, 2, 1],
        [-3, -3, -11, -4, -3],
        [2, 2, -2, -1, -2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 3, 2, 1, 0]
     2^a-1*1^a [0, 0, 3, 1, 1]
     3^a+1*1^a [0, 0, -9, -3, -3]
   4^a-2/3*1^a [0, 0, -10/3, -5/3, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 3, 2, 1, 0]
-------------- [0, 0, 3, 1, 1]
     3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
  4^a+10/9*2^a [0, 0, 0, -5/9, -8/9]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 3, 2,  1,    0],
     [0, 0, 3,  1,    1],
     [0, 0, 0, -5/9, -8/9],
     [0, 0, 0,  0,    0]])
```

Vediamo che ci sono tre pivot e le loro posizioni sono $(1,1)$, $(2,3)$ e $(3,4)$. Il rango è quindi tre, una possibile scelta di colonne indipendenti è: prima, terza e quarta. Le altre (seconda, quinta) sono quindi dipendenti. Il sistema è

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z + a = 0 \\ 3z + a + b = 0 \\ 5/9a + 8/9b = 0 \end{cases}$$

Noi vorremmo trovare le combinazioni lineari della prima, terza e quarta colonna che mi danno la seconda e quinta. Questo vorrebbe dire, esplicitare le variabili y, b (quelle relative alle colonne dipendenti) in funzione delle variabili x, z, a (quelle relative alle colonne indipendenti). Peró il sistema è messo in forma tale per cui questo non è immediato.

Mettiamo la matrice in forma standard, senza scambi di colonna.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*+1/3  [1, 1, 2/3, 1/3, 0]
     2^a*+1/3  [0, 0, 1, 1/3, 1/3]
     3^a*-9/5  [0, 0, 0, 1, 8/5]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]

Cancello la colonna sopra il 4  pivot
 1^a-1/3*3^a   [1, 1, 2/3, 0, -8/15]
 2^a-1/3*3^a   [0, 0, 1, 0, -1/5]
-------------- [0, 0, 0, 1, 8/5]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 3  pivot
 1^a-2/3*2^a   [1, 1, 0, 0, -2/5]
-------------- [0, 0, 1, 0, -1/5]
-------------- [0, 0, 0, 1, 8/5]
-------------- [0, 0, 0, 0, 0]
```

Dalla matrice leggiamo immediatamente che

- La seconda colonna è uguale alla prima. $A^2 = A^1$.
- La quinta colonna: $A^5 = -2/5A^1 - 1/5A^3 + 8/5A^4$.

□

Esempio 15.24. `[GGG15]` *L'insieme* $\pi : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; a + b + c + 1 = 0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ *non è un* $\mathbb{R}$*-sottospazio di* $\mathbb{R}^3$*. È facile vedere che* $\underline{0} \notin r$*, dato che* $\underline{0}$ *non soddisfa la condizione di appartenenza a* r*.*

$$(0,0) \in \pi \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + 1 = 0 \qquad \textit{falso} \end{cases}$$

Notiamo che π *è un piano dello spazio* $\mathbb{R}^3$ *che non passa per l'origine.*

Osservazione 15.25. `[GGQ22]` *Dato un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale* V*, ed un sistema di equazioni lineari omogenee*

$$\begin{cases} p_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ p_m(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

il sottoinsieme di

$$\left\{ \underline{v} \in V \;\mid\; \begin{cases} p_1(\underline{v}) = 0 \\ \vdots \\ p_m(\underline{v}) = 0 \end{cases} \right\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale di V e

$$\begin{cases} p_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ p_m(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

è la sua descrzione cartesiana. Vedremo piú in dettaglio questo argomento quando avremo parlato di morfismi. Un esempio è $\mathrm{Sol}(A\underline{x}) = 0$*, le soluzioni di un sistema lineare omogeneo su un campo.*

Esempio 15.26. `[HHH27]` *Completare se possibile a base di $\mathbb{R}^6$ i vettori*

$\underline{v}_1 = (0,1,2,0,1,0)$, $\underline{v}_2 = (0,1,2,0,2,0)$, $\underline{v}_3 = (0,1,2,0,3,0)$,
$\underline{v}_4 = (0,0,0,-3,-5,0)$, $\underline{v}_5 = (1,0,0,2,5,0)$

Soluzione. Costruiamo la matrice che ha i vettori $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_5$ come righe e riduciamola a scala. Per l'ultima colonna, aggiungiamo le "tag variables" $v[1],\dots,v[5]$ per tenere conto degli scambi di riga. Sull'ultima colonna non effettuiamo altre operazioni che gli scambi di riga, dato che non siamo interessati alle particolari combinazioni lineari di $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_5$ che mi danno le righe della matrice.

```
Use R::=Q[v[1..5]];
M:=Mat([[0,1,2,0,1,0,v[1]],
        [0,1,2,0,2,0,v[2]],
        [0,1,2,0,3,0,v[3]],
        [0,0,0,-3,-5,0,v[4]],
        [1,0,0,2,5,0,v[5]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Scambio la 1^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[
  [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]],
  [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]],
  [0, 1, 2, 0, 3, 0, v[3]],
  [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]],
  [0, 1, 2, 0, 1, 0, v[1]]]
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
  0 sotto pivot[0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
  0 sotto pivot[0, 1, 2, 0, 3, 0, v[3]]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
  0 sotto pivot[0, 1, 2, 0, 1, 0, v[1]]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
-------------- [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
     3^a-1*2^a [0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
     5^a-1*2^a [0, 0, 0, 0, -1, 0, v[1]]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
```

```
Adesso la matrice e'
Mat[
  [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]],
  [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]],
  [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]],
  [0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]],
  [0, 0, 0, 0, -1, 0, v[1]]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=-3
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
-------------- [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
-------------- [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1, 0, v[1]]

Ho trovato il pivot in posizione A[4, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
-------------- [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
-------------- [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]]
     5^a+1*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, v[1]]
```

Quindi le prime quattro righe (i vettori $\underline{v}_5, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_3$) sono linearmente indipendenti. Il vettore $\underline{v}_1$ è combinazione lineare di $\underline{v}_5, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_3$ e una base di $\mathbb{R}^5$ mi è data da $\underline{v}_5, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_3, \underline{e}_3.\underline{e}_6$, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, □

Esempio 15.27. `[HHQ61]` *Caratterizzare i sottospazi di $\mathbb{R}^2$.*

Soluzione. Abbiamo sicuramente $\operatorname{Span}(\underline{0})$ e $\mathbb{R}^2$, i sottospazi banali. I sottospazi propri devono avere dimensione strettamente compresa tra 0 e 2, quindi devono avere dimensione 1. Devono contenere almeno un vettore $(a, b) \neq \underline{0}$, e quindi tutti i suoi multipli. Devono quindi conterenere tutti i vettori della retta per (a, b). Devono altresì contenere il vettore $\underline{0}$, quindi queste rette devono passare per l'origine. Le rette che passano per l'origine sono quindi sottospazi di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1. Vediamo che non ce ne sono altri:

Sia $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$, $\dim V = 1$. Quindi V ha base $B = \underline{v}_1$. Dato che la base genera, ogni vettore di V deve essere multiplo di $\underline{v}_1$, e quindi V è una retta (passante per l'origine). □

Esempio 15.28. `[GGA37]`

1. $(3, 2, 1) \in \operatorname{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. *Infatti* $(1, 2, 1) = 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3$
2. $(2, 1, 3, 2) \in \operatorname{Span}((1, 2, 3, 2), (3, 1, 2, 2), (2, 2, 2, 2))$ *dato che una soluzione del sistema*

$$\alpha(1, 2, 3, 2) + \beta(3, 1, 2, 2) + \gamma(2, 2, 2, 2) = (1, 2, 1)$$

è $(1, 1, -1)$*, il che implica che*

$$(2, 1, 3, 2) = (1, 2, 3, 2) + (3, 1, 2, 2) - (2, 2, 2, 2)$$

3. $(x^3 + 3x^2 - 1 \in \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3)$*, dato che chiaramente*

$$x^3 + 3x^2 - 1 = -1(1) + 0x + 3x^2 + 1x^3$$

Esempio 15.29. [GGG43]

1. $x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1$ *generano* $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$*?*

   (a) *Potrei vedere se un polinomio generico* $ax^2 + bx + c$*, con* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *di* $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ *appartiene a* $\mathrm{Span}(x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1)$*, ovvero dimostrare che il sistema nelle variabili* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

   $$\alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) \equiv ax^2 + bx + c$$

   ha soluzione per ogni valore dei parametri a, b, c*. Ma il sistema è*

   $$(\alpha + \delta)x^2 + (2\beta + \gamma + \delta)x + \alpha - \beta + 3\gamma - \delta \equiv ax^2 + bx + c$$

   ovvero

   $$\begin{cases} \alpha + \delta = a \\ 2\beta + \gamma + \delta = b \\ \alpha - \beta + 3\gamma - \delta = c \end{cases} \qquad \text{ovvero } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   e dato che la sottomatrice $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$ *è non singolare il rango dell'incompleta è massimo, 3, ed esistono* $\infty^{4-3} = \infty^1$ *soluzioni. Quindi* $x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1$ *generano* $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$*.*

   (b) *Dato che so che* $1, x, x^2$ *generano* $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ *potrei vedere se* $1, x, x^2$ *appartengono a* $\mathrm{Span}(x^2{+}1, 2x{-}1, x{+}3, x^2{+}x{-}$
   Ovvero risolvere i tre sistemi

   $$\begin{aligned} \alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) &\equiv 1 \\ \alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) &\equiv x \\ \alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) &\equiv x^2 \end{aligned}$$

   Ma noto che ciascuno di questi sistemi ha matrice incompleta uguale alla matrice incompleta del sistema risolto al punto precedente, e quindi ciascuno ha ∞^1 *soluzioni,* $1, x, x^2$ *appartengono a* $\mathrm{Span}(x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1)$ *e* $x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1$ *generano* $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$*.*

2. *Span*$(x^2 + 1, 2x - 3) \subset \mathrm{Span}(x^2, x + 1, x - 1)$*? Dovrei controllare se* $x^2 + 1, 2x - 3$ *siano combinazioni lineari di* $x^2, x + 1, x - 1$*, ovvero se*

   $$x^2 + 1 \in \mathrm{Span}(x^2, x + 1, x - 1) \text{ e } 2x - 3 \in \mathrm{Span}(x^2, x + 1, x - 1)$$

   ovvero se i due sistemi

   $$x^2 + 1 \equiv \alpha(x^2) + \beta(x + 1) + \gamma(x - 1) \text{ e } 2x - 3 \equiv \lambda(x^2) + \mu(x + 1) + \nu(x - 1)$$

abbiano soluzioni Svolgiamo i calcoli

$$\alpha x^2 + (\beta+\gamma)x + \beta - \gamma \equiv x^2+1 \text{ e } \lambda x^2 + (\mu+\nu)x + \mu - \nu \equiv 2x-3$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu+\nu = 2 \\ \mu - \nu = -3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

E dato che le due matrici incomplete sono non singolari, entrambi i sistemi hanno soluzione unica e quindi $Span(x^2+1, 2x-3) \subset \mathrm{Span}(x^2, x+1, x-1)$

Proposto: rifare i conti portando i polinomi a vettori mediante una base e usando le matrici

Esempio 15.30. `[GGG56]`

1. $(1,2,1),(2,1,1),(0,3,2),(2,2,2)$ *generano* $\mathbb{R}^3$*?*

(a) *Potrei vedere se ogni* $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ *si può scrivere come combinazione lineare di* $(1,2,1),(2,1,1),(0,3,2),(2,2,2)$.

(b) *Oppure, sapendo già che* $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ *generano* $\mathbb{R}^3$, *potrei vedere se* $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ *sono combinazioni lineari di* $(1,2,1),(2,1,1),(0,3,2),(2,2,2)$.

(c) *Ovvero potrei vedere se* $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ *sono linearmente dipendenti da* $(1,2,1),(2,1,1),(0,3,2),(2,2,2)$. *Per fare questo mi basta ridurre con Gauss la matrice*

```
M:=Mat[[1, 2, 1],
       [2, 1, 1],
       [0, 3, 2],
       [2, 2, 2],
       [1, 0, 0],
       [0, 1, 0],
       [0, 0, 1]];
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1]
     2^a-2*1^a [0, -3, -1]
  0 sotto pivot[0, 3, 2]
     4^a-2*1^a [0, -2, 0]
     5^a-1*1^a [0, -2, -1]
  0 sotto pivot[0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1]
-------------- [0, -3, -1]
     3^a+1*2^a [0, 0, 1]
   4^a-2/3*2^a [0, 0, 2/3]
   5^a-2/3*2^a [0, 0, -1/3]
```

```
   6^a+1/3*2^a [0, 0, -1/3]
  0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1]
-------------- [0, -3, -1]
-------------- [0, 0, 1]
   4^a-2/3*3^a [0, 0, 0]
   5^a+1/3*3^a [0, 0, 0]
   6^a+1/3*3^a [0, 0, 0]
     7^a-1*3^a [0, 0, 0]
```

Noto che non ci sono stati scambi di riga. Il risultato mi dice che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ *sono combinazioni lineari di* $(1,2,1),(2,1,1),(0,3,2)$*, ed anche* $(2,2,2)$ *lo è.*

2. $(3,5,7,5),(1,6,11,6),(1,4,7,4)$ *generano* $\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1))$*?*

$(3,5,7,5),(1,6,11,6),(1,4,7,4)$ *sono combinazioni lineari di* $\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1))$ *dato che*

```
M:=Mat[[1, 4, 7, 4],
       [1, 6, 11, 6],
       [3, 5, 7, 5],
       [1, 2, 3, 2],
       [1, 1, 1, 1]];
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 4, 7, 4]
     2^a-1*1^a [0, 2, 4, 2]
     3^a-3*1^a [0, -7, -14, -7]
     4^a-1*1^a [0, -2, -4, -2]
     5^a-1*1^a [0, -3, -6, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 4, 7, 4]
-------------- [0, 2, 4, 2]
   3^a+7/2*2^a [0, 0, 0, 0]
     4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0]
   5^a+3/2*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Quindi $(1,2,3,2),(1,1,1,1)$ *sono combinazioni lineari di* $(3,5,7,5),(1,6,11,6),(1,4,7,4)$*, anzi di* $(3,5,7,5),(1,6,11$ *dato che anche la terza riga di* M *viene ridotta a zero. Quindi*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Span}((1,2,3,2),(1,1,1,1)) &= \mathrm{Span}((3,5,7,5),(1,6,11,6),(1,4,7,4)) \\
&= \mathrm{Span}((3,5,7,5),(1,6,11,6))
\end{aligned}
$$

Esempio 15.31. [FFF10] *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *vogliamo vedere se le sue righe sono linearmente indipendenti, ed in caso contrario vogliamo determinare i coefficienti* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficenti che danno una loro combinazione lineare nulla).*

Denominiamo le righe di A *come* $v_1, \ldots, v_4$.

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & v_1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & v_2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & v_3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & v_4 \end{array} \right)$$

All'inizio ogni riga di S *è uguale a se stessa. Operiamo una riduzione di Gauss fino ad ottenere una forma triangolare superiore* per A.

```
Use R::=Q[v[1..4]];
S:=Mat([[1,1,3,1,v[1]],
        [1,1,1,2,v[2]],
        [1,3,1,2,v[3]],
        [4,3,2,2,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(S);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 3, 1, v[1]]
     2^a-1*1^a [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a-1*1^a [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
     4^a-4*1^a [0, -1, -10, -2, -4v[1] + v[4]]

Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[
  [1, 1, 3, 1, v[1]],
  [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]],
  [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]],
  [0, -1, -10, -2, -4v[1] + v[4]]
]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 3, 1, v[1]]
-------------- [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
  0 sotto pivot[0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
   4^a+1/2*2^a [0, 0, -11, -3/2, -9/2v[1] + 1/2v[3] + v[4]]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 3, 1, v[1]]
-------------- [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
-------------- [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
  4^a-11/2*3^a [0, 0, 0, -7, v[1] - 11/2v[2] + 1/2v[3] + v[4]]
```

La matrice A ha quindi determinante $1 \cdot 2 \cdot -2 \cdot -7 = 28 \neq 0$, l'unica soluzione è quella nulla e le sue righe quindi sono linearmente indipendenti. Gli elementi dell'ultima colonna continuano dare i coefficenti di una combinazione lineare, ma mai di una relazione di dipendenza lineare tra le righe di A. Per esempio

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2}\ \underline{v}_1 + \frac{1}{2}\ \underline{v}_3 + \underline{v}_4 &= (0,0,-11) \\ -\frac{9}{2}\ (1,1,3) + \frac{1}{2}\ (1,3,1) + (4,3,2) &= (0,0,-11) \end{aligned}$$

15.4 Esercizi proposti

Esercizio 15.32. `[GGB10]` *Dimostrare che $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}\}$ non ha una base.*

Esempio 15.33. `[HHH18]` *Dare, se possibile le dimensioni di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ come $\mathbb{Q}$ spazi.*

Esercizio 15.34. `[KK12a]` *Siano*

$$\begin{aligned} V &= \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \\ W &= \{(2x + y, 6x + 4y, 4x + y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

due $\mathbb{R}-$ sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. È vero che $V \subseteq W$? $V \supseteq W$? $V = W$? Svolgere usando le basi.

Esercizio 15.35. `[MK04]` *Dati i vettori*

$$\underline{w}_1 = (1,2,1,2,1), \underline{w}_2 = (2,1,-3,1,1), \underline{w}_3 = (2,1,-3,1,0), \underline{w}_4 = (1,-1,-4,-1,-3)$$

- *Determinare una base B di* $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4)$.
- *Completare B a base di $\mathbb{R}^5$.*

Esercizio 15.36. `[GGA12]` *L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 2x)(y + 4x) = 0\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$?*

Esercizio 15.37. `[GGA13]` *L'insieme $\mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ è sottospazio di $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?*

Esercizio 15.38. `[GGA57]` *L'insieme $\mathcal{F}_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$ è sottospazio di $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?*

Esercizio 15.39. `[GGA15]` *L'insieme $\mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = f(2) = 0\}$ è sottospazio di*

$$\mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\} \ ?$$

Esercizio 15.40. `[GGA16]` *Trovare 212 basi diverse di $\mathbb{R}^3$*

Esercizio 15.41. `[GGA17]` *Dimostrare che se un $\mathbb{K}$-spazio V ha una base, ha infinite basi. Ricordiamo che tutti i campi che trattiamo hanno infiniti elementi.*

Esercizio 15.42. `[GGA55]` *Siano $f_1(x), \ldots, f_n(x) \in \mathbb{K}[x]$, di gradi tutti diversi tra loro. Dimostrare che $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ sono una base di* $\mathrm{Span}(f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

Esercizio 15.43. `[GGC00]` *Completare a base di $\mathbb{R}^4$ i seguenti vettori*

$$(1,3,2,1), (1,3,2,2)$$

Esercizio 15.44. `[GGC01]` *Completare a base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ i seguenti vettori*

$$x^4 + x - 1, x^3 + x$$

Esercizio 15.45. `[GGC02]` *Determinare la dimensione di*

$$V = \left\{ (x,y,z,t,u) \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z+3t-u=0 \\ 2x+3z-3u=0 \\ x+3y+9t-6u=0 \end{cases} \right\}$$

[Sol:2]

Esercizio 15.46. `[GGC03]` *Data la base* $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ *di un* $\mathbb{K}$*-spazio* V*, completare a base di* V *i vettori* $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_3 - \underline{v}_4$.

Esercizio 15.47. `[GGC06]` *Caratterizzare geometricamente i sottospazi di* $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 15.48. `[IIA10]` *Trovare due sottospazi di dimensione* 2 *di* $\mathbb{R}^4$ *(due piani) che abbiano intersezione solo nell'origine.*