14.3 Definizione e prime proprietà

Definizione 14.16. `[GGG00]` *Sia* $(V,+)$ *un gruppo commutativo,* $\mathbb{K}$ *un campo e* $\cdot\colon \mathbb{K}\times V \to V$ *un prodotto esterno. Diciamo che* V *è un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale o* $\mathbb{K}$*-spazio. Gli elementi* $\underline{v}\in V$ *si dicono* vettori *e si indicano sempre sottolineati. Gli elementi di* $\mathbb{K}$ *si dicono* scalari.

Osservazione 14.17. `[GGA09]` *Ricordiamo le proprietà di un prodotto esterno: dato* $(V,+)$ *gruppo commutativo, un operazione*

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & \mathbb{K} & \to & V \\ & (\lambda,\underline{v}) & \mapsto & \lambda,\underline{v} \end{array}$$

si dice prodotto esterno su V *se soddisfa le seguenti proprietà.*

1. $\forall\ \lambda\in\mathbb{K},\ \underline{v},\underline{w}\in V \quad \lambda(\underline{v}+\underline{w})=\lambda\underline{v}+\lambda\underline{w}$ *(Distributività del prodotto sulla somma).*
2. $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \underline{v}\in V \quad (\lambda+\mu)\underline{v}=\lambda\underline{v}+\mu\underline{v}$ *(Distributività della somma sul prodotto).*
3. $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \underline{v}\in V \quad \lambda(\mu\underline{v})=(\lambda\mu)\underline{v}$.
4. $\forall\ \underline{v}\in V \quad 1\underline{v}=\underline{v}$ *e* $0\underline{v}=\underline{0}$.

Osservazione 14.18. `[GGG09]` *Ricordiamo la differenza tra* $\underline{0}\in V$ *e* $0\in\mathbb{K}$.

Esempio 14.19. `[GGG01]` $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ *dove* $\cdot$ *è il prodotto esterno è un* $\mathbb{K}$*-spazio.*

Esempio 14.20. `[GGG02]` $\mathbb{K}[x]$*,* $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ *sono* $\mathbb{K}$*-spazi con le operazioni ovvie.*

Esempio 14.21. `[GGG03]` $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *è un* $\mathbb{K}$*-spazio con le operazioni ovvie (il prodotto per uno scalare, non il prodotto tra matrici).*

Esempio 14.22. `[GGG04]` *I vettori geometrici di* $\mathbb{R}^2$ *centrati sull'origine sono un* $\mathbb{R}$*-spazio con le operazioni ovvie.*

Esempio 14.23. `[GGG05]` $\mathbb{C}$ *è sia un* $\mathbb{C}$ *spazio (ovvio) che un* $\mathbb{R}$*-spazio, dato che* $(\mathbb{C},+)$ *è un gruppo commutativo e il prodotto*

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & (\lambda,(a+ib)) & \mapsto & \lambda a+i\lambda b \end{array}$$

è ben definito e soddisfa le condizioni di prodotto esterno

Esercizio 14.24. `[GGG11]` *Dati due campi* $\mathbb{K}_1\subseteq\mathbb{K}_2$*, dimostrare che* $\mathbb{K}_2$ *è un* $\mathbb{K}_1$*-spazio.*

Ricordiamo anche la definizione di uguaglianza tra funzioni:

Osservazione 14.25. `[FFX92]` *Date due funzioni* $f\colon A\to B,\ g\colon A\to B$ *abbiamo* $f\equiv g$ *(uguaglianza come funzioni) se e solo se*

$$\forall\ a\in A\ f(a)=g(a)$$

Esempio 14.26. `[GGG06]` $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\supset\mathbb{Q}$ *è un* $\mathbb{Q}$*-spazio con le operazioni ovvie. Non è un* $\mathbb{R}$ *spazio perchè l' operazione di prodotto esterno per un elemento di* $\mathbb{R}$ *non è ben definita -* $\pi(1+\sqrt{2})\notin\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

14.4 Sottospazi

Definizione 14.27. `[GGG13]` *Dato il K-spazio $(V, +, \cdot)$ e $W \subseteq V$, diciamo che W è* $\mathbb{K}$-sottospazio di V *se e solo se W è chiuso rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione (esterna) per elementi di $\mathbb{K}$, ovvero se il risultato di tali operazioni su elementi di W appartiene ancora a W. In altre parole, W è $\mathbb{K}$-sottospazio di V se e solo se*

- $\forall\ \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
- $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \underline{w}_2 \in W \quad \lambda \underline{w}_2 \in W$

Scriveremo $W \underset{SSP}{\subseteq} V$.

Osservazione 14.28. `[GGR13]` *La definizione precedente è equivalente se si sostituisce alle condizioni*

- $\forall\ \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
- $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \underline{w}_2 \in W \quad \lambda \underline{w}_2 \in W$

la condizione

$$\forall\ \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W,\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \in W$$

Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, un suo $\mathbb{K}$-sottospazio W è anch'esso un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale rispetto alle stessse operazioni. Le verifiche sono semplici, perchè tutto si scarica sul fatto che V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, basta che le operazioni siano chiuse in W.

Esercizio 14.29. `[GGA14]` *Nelle ipotesi della definizione precedente,*
dimostrare formalmente che W è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V.

Esempio 14.30. `[GGG14]` *L'insieme $r : \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ è un $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathbb{R}^2$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare la chiusura su somma ed il prodotto. Dati $\underline{v}, \underline{w} \in r$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Per definizione di r, $\exists\ x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{v} = (x, 2x)$ e $\underline{w} = (y, 2y)$. Allora
$$\underline{v} + \underline{w} = (x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2(x + y)) \in r$$
per la definizione di r
2. $\lambda \underline{w} \in r$. Dimostrazione analoga.

□

N.B. Si tratta della retta $r : y = 2x$, passante per l'origine.

Esempio 14.31. `[GGW14]` *L'insieme $r' : \{(a, 3a - 1) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ non è un $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathbb{R}^2$.*

Dimostrazione.

- Il punto $(0, -1) \in r'$ dato che il sistema $(0, -1) = (a, 3a - 1)$ ha soluzione $a = 0$.
- Il punto $(1, 2) \in r'$ dato che il sistema $(1, 2) = (a, 3a - 1)$ ha soluzione $a = 1$.
- Il punto $(1, 2) + (0, -1) = (1, 1) \notin r'$ dato che il sistema
$$(1, 1) = (a, 3a - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a - 1 = 1 \end{cases}$$
non ha soluzione.

□

N.B. Si tratta della retta $r' : y = 3x - 1$, che non passa per l'origine.

Esempio 14.32. [GGG36] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$ di grado uguale a $d \geq 1$ non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$ dato che questo insieme è chiuso sul prodotto per uno scalare ma non è chiuso per la somma, per esempio $x^2 + x, x^2 - 1 \in \mathbb{K}[x]_{=2}$ ma $x^2 + x - x^2 - 1 = x - 1 \notin \mathbb{K}[x]_{=2}$.*

Esempio 14.33. [GGG37] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$ di grado minore od uguale a d formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$*

$$\mathbb{K}[x]_{\leq d} = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \ \mid \ \deg(p(x)) \leq d\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}[x]$$

Dato che somma di polinomi di grado minore od uguale a d ha ancora grado minoro od uguale a d, e lo stesso vale per il prodotto per uno scalare.

Esempio 14.34. [GGG18] *L'insieme $\{(a, a, b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ è un $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathbb{R}^3$. N.B. Si tratta del piano $\pi : x - y = 0$*

Esempio 14.35. [GGG16] *Ogni retta passante per l'origine è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$*

Proposizione 14.36. [GGG22] *Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \mathrm{Mat}_{m \times m}(\mathbb{K})$*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \underline{b} = \underline{0}$$

Dimostrazione.

- Dimostriamo per il caso $\underline{b} = \underline{0}$. Vediamo la chiusura: se $\underline{c}_1, \underline{c}_2 \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ vogliamo dimostrare che $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ A(\lambda\underline{c}_1 + \mu\underline{c}_2) = \underline{0}$. Abbiamo infatti

$$A(\lambda\underline{c}_1 + \mu\underline{c}_2) = \lambda A\underline{c}_1 + \mu A\underline{c}_2 = \lambda\underline{0} + \mu\underline{0} = \underline{0}$$

- Se $\underline{b} \neq \underline{0}$ abbiamo che $\underline{0}$ non è soluzione del sistema $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e quindi $\underline{0} \notin \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e quindi $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ non può essere uno spazio vettoriale.

□

14.5 Generatori

Definizione-Proposizione 14.37. [GGA24] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$. Allora l'insieme*

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = \{\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n \ \mid \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \underset{SSP}{\subseteq} V$$

è un $\mathbb{K}$-sotto spazio di V.

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ abbiamo

$$\alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$$

ovvero che

$$\exists\lambda_1'', \ldots, \lambda_n'' \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2 = \lambda_1''\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n''\underline{v}_n$$

Infatti

$$\underline{w}_1 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{w}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n$$
$$\underline{w}_2 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) \Leftrightarrow \exists \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{w}_2 = \lambda'_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda'_n \underline{v}_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 &= \alpha(\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n) + \beta(\lambda'_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda'_n \underline{v}_n) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda'_1)\underline{v}_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n + \beta\lambda'_n)\underline{v}_n \\ &= \lambda''_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda''_1 \underline{v}_n \end{aligned}$$

con

$$\lambda''_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda'_1, \ldots, \lambda''_n = \alpha\lambda_n + \beta\lambda'_n$$

□

Osservazione 14.38. [GGQ25] *A meno che non sia necessario per evitare ambiguità, scriveremo* Span *al posto di* $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}$.

Definizione 14.39. [GGG24] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$. Se $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ si dicono* generatori di V come $\mathbb{K}$-spazio *o* generano V come $\mathbb{K}$-spazio *o sono un* sistema di generatori di V come $\mathbb{K}$-spazio.

Esempio 14.40. [GGA25] *I vettori $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ generano $\mathbb{K}^n$.*

Dimostrazione. Per ogni vettore $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$(a_1, \ldots, a_n) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_n(0, \ldots, 0, 1) = a_1\underline{e}_1 + \cdots + a_n\underline{e}_n$$

□

Esempio 14.41. [GGA31] *I polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^d \in \mathbb{K}[x]$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$.*

Dimostrazione. Infatti

$$\forall\ p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]_{\leq d} \quad \exists\ c_i, \ldots, c_d \in \mathbb{K} \text{ tali che } a_0 \cdot 1 + \ldots + a_d \cdot x^d = p(x)$$

e si dicono *generatori canonici* di $\mathbb{K}_d \leq d[x]$. Dato che $1, x, x^2, \ldots, x^d \in \mathbb{K}[x]$ e che ogni polnomio di $\mathbb{K}_d \leq d[x]$ sta in $\mathrm{Span}(1, x, x^2, \ldots, x^d)$ possiamo dire che $\mathrm{Span}(1, x, x^2, \ldots, x^d) = \mathbb{K}_d \leq d[x]$. □

Esercizio 14.42. [GGS32] *[Proposto] I polinomi $p_0(x), \ldots, p_d(x) \in \mathbb{K}[x]$, con $\deg p_i(x) = i$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$.*

Esempio 14.43. [GGA33] *I polinomi $x - 1, 2x + 2, x + 3 \in \mathbb{K}[x]$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\forall\ p(x) = ax + b \in \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \quad \exists\ \alpha, \beta\gamma \in \mathbb{K} \text{ tali che } \alpha(x-1) + \beta(2x+2) + \gamma(x+3) \equiv ax + b$$

Vogliamo far vedere che il sistema seguente, nelle variabili $\alpha, \beta\gamma$ e ripsetto ad ogni scelta di parametri a, b ha soluzioni.

$$(\alpha + 2\beta + \gamma) + (-\alpha + 2\beta + 3\gamma) \equiv ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = a \\ -\alpha + 2\beta + 3 = b \end{cases}$$

Riscriviamo il sitema in forma matriciale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ -1 & 2 & 3 & b \end{array}\right)$$

Dato che la matrice incompleta ha rango 2 massimo, la matrice completa ha rango 2 e per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ammette soluzioni. □

Definizione 14.44. `[GGG32]` *Le matrici* $E_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *con tutti gli elementi nulli tranne quello in posizione* ij*, che vale* 1*, si dicono* generatori canonici *di* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Per esempio,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{23} \in \mathrm{Mat}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Osservazione 14.45. `[GGG33]` *Abbiamo che* $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\{E_{ij} \mid i : 1, \ldots, m,\ j : 1, \ldots, n\}) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$

14.6 Basi e dimensione

Problema 14.46. `[GGG40]`

- *Quali sistemi di generatori sono "speciali"?*
- *Quanti generatori sono necessari per generare tutto uno spazio (o sottospazio) vettoriale?*

Definizione 14.47 (Base)**.** `[GGG41]` *Sia* V *un* $\mathbb{K}$ *spazio vettoriale e* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$*. Se*

1. $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *sono linearmente indipendenti.*
2. *E* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *generano* V*.*

   Equivalentemente $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = V$*.*

   Equivalentemente $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *sono un* sistema di generatori di V come $\mathbb{K}$-spazio*.*

Diciamo che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *sono o formano una* base di V come $\mathbb{K}$-spazio

Esempio 14.48 (Base)**.** `[GGG51]`

1. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ *formano* E_n*, una base di* $\mathbb{K}^n$*, detta la* base canonica di $\mathbb{K}^n$*.*
2. *I* $d + 1$ *polinomi* $1, x, \ldots, x^n$ *formano una base di* $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$*, detta la* base canonica di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$*.*
3. $\{M_{ij}\}_{i:1,\ldots,m,j:1,\ldots,n}$ *formano una base di* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, detta la* base canonica di $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ o E_{mn}*.*

Problema 14.49. `[GGG45]` *Una base esiste sempre per ogni spazio? Se ne esistono, quante ne esistono? È possibile determinare computazionalmente una base di uno spazio* V*? A partire da dei generatori? A partire da vettori linearmente indipendenti?*

Definizione 14.50. [GGG80] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio. I vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ si dicono* sistema minimale di generatori di V *se generano V e se togliendone uno non lo generano più. Più precisamente se valgono le due condizioni*

- $V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$.
- $\forall\, i \quad V \neq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n)$.

Proposizione 14.51. [GGG81] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio e $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$. Allora*

$$\mathcal{B} \text{ è base} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ è un sistema minimale di generatori di } V$$

Dimostrazione. Proviamo che se $\mathcal{B}$ è base allora è un sistema minimale di generatori: basta provare che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n$ non generano $\underline{v}$. Se infatti, per assurdo,

$$\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n) = V$$

avremmo che $\underline{v}_i$ sarebbe esprimibile come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n$, e questo è assordo in quanto $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Proviamo che se $\mathcal{B}$ è un sistema minimale di generatori di V allora è base. Basta dimostrare che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che non lo siano. Allora $\exists\, i$ tale che v_i è combinazione lineare degli altri. Ma questo implica che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n$ generano V, dato che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ lo generano e $\underline{v}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \underline{v}_j$. □

Osservazione 14.52. [GGG91] *Possiamo eliminare da un sistema di generatori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ di V i vettori dipendenti dagli altri e quando raggiungiamo un sistema di generatori minimale di V abbiamo ottenuto una base.*

Esempio 14.53. [GGG92] *Sia $\mathcal{B} = (1,2), (1,3), (1,4)$ un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$. Costruiamo e riduciamo con Gauss la matrice*

```
M:=Mat([[1,2],
        [1,3],
        [1,4]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2]
     2^a-1*1^a [0, 1]
     3^a-1*1^a [0, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2]
-------------- [0, 1]
     3^a-2*2^a [0, 0]
```

Notiamo che non ci sono scambi di riga. Questo ci dice che il vettore $(1,4)$ è combinazione lineare degli altri. I vettori di $\mathbb{R}^2$ non possono essere tutti multipli di un singolo vettore, quindi $B = (1,2), (1,3)$ è un sistema minimale di generatori e quindi una base di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 14.54. [GGG50] *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio. I vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$, linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ si dicono* sistema massimale di vettori linearmente indipendenti per V *se non esiste $\underline{w} \in V$ tale che $\underline{w}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Proposizione 14.55. `[GGG93]` *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio e $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ linearmente indipendenti. Allora*

$$\mathcal{B} \text{ è base} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in } V$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\mathcal{B}$ è base, allora è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in V. Supponiamo per assurdo che esista $\underline{v} \in V$ tale che $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ siano linearmente indipendenti. Allora $\underline{v}$ non sarebbe combinazione lineare di $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, ma questo è assurdo perchè $\mathcal{B}$ è base, e quindi $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ generano tutto V.

Dimostriamo che se $\mathcal{B}$ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in V, allora è base. Basta dimostrare che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ generano V, dato che sono già linearmente indipendenti. Prendiamo un qualunque vettore $\underline{v} \in V$; vogliamo dimostrare che $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Per ipotesi, $\underline{v}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti, quindi esistono $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$\lambda\underline{v} + \lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0} \text{ con } \underline{\lambda} \neq \underline{0}.$$

Se avessimo $\lambda \neq 0$, potremmo scrivere $\underline{v} = \sum_i -\frac{\lambda_i}{\lambda}\underline{v}_i$ ed avere la tesi. Ma non è possibile avere $\lambda = 0$, dato che questo implicherebbe

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$$

dato che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, ma allora avremmo $\underline{\lambda} = \underline{0}$.

□

Osservazione 14.56. `[GGG94]` *Aggiungo uno ad uno ad un vettore $\underline{v}_1 \in V$ dei vettori $\underline{v}_i \in V$ in modo tale che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ siano sempre linearmente indipendenti,* **SE** *ad un certo punto non riesco più a procedere ho trovato una base.*

Osservazione 14.57. `[GGX94]` *Se ho un sistema di generatori finito di V, se continuo a togliere quelli ridondanti fino a trovare un sistema di generatori minimale ad un certo punto devo fermarmi ed ho trovato una base.*

Esempio 14.58. `[GGG97]` *In $\mathbb{K}[x]$ posso creare gli insiemi di vettori*

$$1 \qquad 1, x \qquad 1, x, x^2 \qquad 1, x, x^2, x^3, \cdots$$

tutti composti da vettori linearmente indipendenti senza mai fermarmi. Quindi $\mathbb{K}[x]$ non può avere base.

14.7 Esercizi svolti

Esempio 14.59. `[GGA36]` *Determinare se $(1, 2) \in \mathrm{Span}((1, 3), (1, 1), (2, 0))$. Vediamo se il sistema*

$$\alpha(1, 3) + \beta(1, 1) + \gamma(2, 0) = (1, 2)$$

ammette soluzioni. Non è necessario trovarle. Scriviamo il sistema in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice completa associata al sistema

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Usiamo il teorema di Rouchè-Capelli: Il rango della matrice incompleta è 2, dato che il minore $A_{(1,2);(1,2)}$ è non singolare. La matrice completa ha anche'essa rango 2 e quindi esitono soluzioni. Quindi $(1, 2) \in \mathrm{Span}((1, 3), (1, 1), (2, 0))$.

Esempio 14.60. `[GGA40]` *Determinare se* $x^3+2x^2+x \in \operatorname{Span}(x^3+x, x^3+x^2+3, 2x^3+2x+1)$*. Vediamo se il sistema*

$$\begin{aligned} \alpha(x^3+3)+\beta(x^3+x^2+3)+\gamma(2x^3+2x+1) &\equiv_{\mathbb{K}[x]} x^3+2x^2+x \\ (\alpha+\beta+2\gamma)x^3+\beta x^2+(\alpha+2\gamma)x+3\beta+\gamma &\equiv_{\mathbb{K}[x]} x^3+2x^2+x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=1 \\ \beta=2 \\ \alpha+2\gamma=1 \\ 3\beta+\gamma=0 \end{cases} \end{aligned}$$

ammette soluzioni. Scriviamo la matrice completa del sistema e vediamo il suo rango

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la terza riga con la prima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo con Laplace secondo la prima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo con Laplace secondo la seconda riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è non singolare, quindi è non singolare anche la matrice completa, che ha rango quandi quattro. La matrice incompleta ha ordine 4×3*, il suo rango è quindi al massimo* 3*. Dato che il rango della completa è diverso dal rango dell'incompleta, il sistema non ha soluzioni, e quindi*

$$x^3+2x+x \notin \operatorname{Span}(x^3+x, x^3+x^2+3, 2x^3+2x+1)$$

Esempio 14.61. `[KK11]` *Sia* $\underline{v}=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3$ *e* $V=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}((1,4,2),(2,3,1))$*. Stabilire se* $\underline{v}\in V$*.*

Soluzione: Per rispondere alla domanda dobbiamo dire se

$$\exists\, a,b\in\mathbb{R} \text{ t.c. } (1,2,3)=a(1,4,2)+b(2,3,1)$$

Ovvero se esistono soluzioni al sistema lineare nelle variabili $a,b\in\mathbb{R}$

$$a(1,4,2)+b(2,3,1)=(1,2,3)\Rightarrow(a+2b,4a+3b,2a+b)=(1,2,3)$$

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ 4a+3b=2 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ 4(1-2b)+3b=2 \\ 2(1-2b)+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ -5b=-2 \\ -3b=1 \end{cases}$$

Che si vede facilmente essere impossibile. Quindi $\underline{v}\notin V$ □

14.8 Esercizi proposti

Esercizio 14.62. `[GGA38]` *Determinare se i seguenti vettori appartengono ai seguenti sottospazi*

1. $x^3 + 3x^2 - 1 \in \operatorname{Span}(x^3 + x^2 - 1, x^2 + x + 2, x - 1, 3)$. *[Si]*
2. $x^3 + 3x^2 - 1 \in \operatorname{Span}(x^3 + x^2 - 1, x^2 + x + 2, x^2 + x + 1, x^2, 3)$. *[Si]*
3. $(1, 2, 0, 3) \in \operatorname{Span}((3, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$. *[Si]*
4. $(3, 1, 1, 3) \in \operatorname{Span}((3, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$. *[No]*
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ *[No]*

Esercizio 14.63. `[GGB03]`*[Difficile] Generalizzare la nozione di base al caso in cui non esistano sistemi finiti di generatori.*

Esercizio 14.64. `[GGA07]` *Dire se* $\mathbb{K}[x, y]$ *è* $\mathbb{K}$*-spazio.*

Esercizio 14.65. `[GGA08]` *Dare dei generatori di* $\mathbb{K}[x, y]_{\leq 2}$.

Esercizio 14.66. `[GGQ09]` *Dare dei generatori di* $\mathbb{K}[x, y]_{\leq 3}$.

Esercizio 14.67. `[GGA10]` *Determinare un possibile numero di generatori per* $\mathbb{K}[x, y]_{\leq 4}$.

Esercizio 14.68. `[GGA11]`*[Difficile] Determinare un possibile numero di generatori per* $\mathbb{K}[x, y]_{\leq d}$.

Esercizio 14.69. `[GGW12]` *L'insieme* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 2x)(y + 4x) = 0\}$ *è sottospazio di* $\mathbb{R}^2$*?*

Esercizio 14.70. `[GGG87]` *Ogni retta passante per l'origine è un sottospazio di* $\mathbb{R}^3$

Esercizio 14.71. `[GGG20]` *Ogni piano passante per l'origine è un sottospazio di* $\mathbb{R}^3$

Esercizio 14.72. `[GGC04]` *Dare una base di* $\mathbb{R}^5$ *che contenga il massimo numero possibile dei seguenti vettori*

$$(1, 3, 2, 1), (4, 3, 8, 7), (1, 0, 2, 2), (1, 12, 2, -2)$$

Esercizio 14.73. `[GGC08]` *dimostrare che* $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}((3, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 1))$.

Esercizio 14.74. `[GGC09]` *L'insieme delle matrici invertibili di* $\operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *è un sottospazio con le operazioni standard?*