Capitolo 4

Quarta Lezione

4.1 Il campo dei complessi

Osservazione 4.1. `[BBB00]` *L'equazione* $x^2+1=0$ *non ha soluzioni sui reali. Introduciamo l'oggetto* $i \notin \mathbb{R}$ *con la proprietà* $i=\sqrt{-1}$. *Problema: se aggiungo* i *ad* $\mathbb{R}$, *ottengo un campo?*

Proposizione 4.2. `[BBB01]` *L'insieme* $\mathbb{R}[i]=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ *è un campo con le ovvie operazioni:*

$$a+ib =_{\mathbb{R}[i]} 0 \Leftrightarrow a=b=0 \Leftrightarrow (a,b)=(0,0)$$

$0=0+0i$ *è il neutro additivo,* $1=1+0i$ *il neutro moltiplicativo,*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}[i]\times\mathbb{R}[i] & \to & \mathbb{R}[i] \\ & a+ib, c+id & \mapsto & a+c+i(b+d) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}[i]\times\mathbb{R}[i] & \to & \mathbb{R}[i] \\ & (a+ib,c+id) & \mapsto & \begin{aligned}(a+ib)\cdot(c+id) &= ac+iad+ibc+i^2bd \\ &= ac-bd+i(ad+bc)\end{aligned} \end{array}$$

Ricordiamo che $i^2=-1$. *Notiamo che due numeri complessi* $a+ib$, $c+id$ *sono uguali se e solo se* $a=c$ *e* $b=d$.

Dimostrazione. Verifichiamo $(\mathbb{R}[i],+,\cdot)$ sia un anello controllando le proprietà una per una:

1. Dimostriamo che se $a,b\in\mathbb{R}$, $a+ib=0\Leftrightarrow a=b=0$. Infatti, se $b\neq 0$

   $$a+ib=0 \Rightarrow i=-\frac{a}{b}\in\mathbb{R} \text{ assurdo}$$

   Se invece $b=0$

   $$a+ib=0\Rightarrow a=0$$

   ed abbiamo $a=b=0$.

2. Verifichiamo che $(\mathbb{R}[i],+)$ sia un gruppo abeliano

   (a) L' insieme $\mathbb{R}[i]$ è chiuso rispetto all''operazione $+$, dato che per ogni due elementi $(a+ib),(c+id)\in\mathbb{R}[i]$ abbiamo che

   $$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)\in\mathbb{R}[i]$$

con $a+c,\ b+d \in \mathbb{R}$. Notiamo che l'operazione $+$ è commutativa, ovvero che per ogni due elementi $(a+ib),(c+id) \in \mathbb{R}[i]$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) abbiamo che

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) = (c+a)+i(d+b) = (c+id)+(a+ib)$$

sfruttando la commutatività della somma sui reali.

(b) Esiste il neutro additivo $0+i0=0$, tale che

$$\forall\ a+ib \in \mathbb{R}[i] \quad (a+ib)+0 = a+ib$$

(c) Ogni elemento di $\mathbb{R}[i]$ ha inverso additivo (che chiamiamo opposto). Infatti

$$\forall\ a+ib \in \mathbb{R}[i]\ \exists\ x+iy \in \mathbb{R}[i] \text{ tale che } (a+ib)+(x+iy)=0$$

basta prendere come $x+iy$ l'elemento $-a+i(-b)=-a-ib$, sfruttando gli opposti in $\mathbb{R}$.

Quindi $(\mathbb{R}[i],+)$ è un gruppo abeliano.

3. L' insieme $\mathbb{R}[i]$ è chiuso rispetto all'operazione $\cdot$, dato che per ogni due elementi $(a+ib),(c+id) \in \mathbb{R}[i]$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) abbiamo che

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc) \in \mathbb{R}[i]$$

con $ac+bd,\ ad+bc \in \mathbb{R}$. Notiamo che l'operazione $\cdot$ è commutativa, ovvero che per ogni due elementi $(a+ib),(c+id) \in \mathbb{R}[i]$ abbiamo che

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) = (c+id)\cdot(a+ib)$$

sfruttando la commutatività del prodotto sui reali.

4. Esiste il neutro moltiplicativo $1+i0=1$, tale che

$$\forall\ a+ib \in \mathbb{R}[i]\ (a+ib)\cdot 1 = a\cdot 1+ib\cdot 1 = a+ib$$

5. Verifichiamo la commutatività del prodotto

$$\forall\ a+ib, c+id \in \mathbb{R}[i] \quad (a+ib)\cdot(c+id) = (c+id)\cdot(a+ib)$$

Infatti

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd+i(ad+bc)$$

e

$$(c+id)\cdot(a+ib) = ca+icb+ida+i^2db = ca-db+i(cb+da) = ac-bd+i(ad+bc)$$

dato che $\mathbb{R}$ è commutativo.

Rimane da verificare che $\mathbb{R}[i]$ sia un campo, ovvero che tutti gli elementi non nulli abbiano inverso. Vediamo che dato $a+ib \in \mathbb{R}[i]$, non nullo ($(a,b) \neq (0,0)$) esiste $x+iy \in \mathbb{R}[i]$ tale che $(a+ib)(x+iy)=1$. Proviamo facilmente che se $a+ib \neq 0 \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0$ ponendo

$$x+iy = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

abbiamo che

$$(a+ib)\cdot\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2+aib-iba-i^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

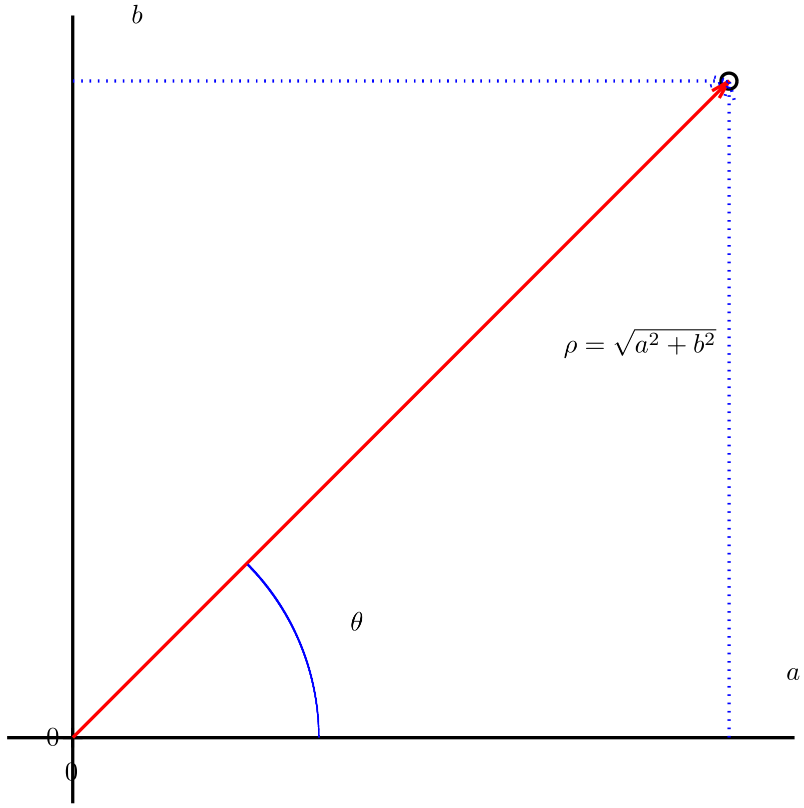
Indichiamo l'inverso moltiplicativo di $a+ib$ come $(a+ib)^{-1}$ o $\dfrac{1}{a+ib}$. □

Osservazione 4.3. `[BBX50]` *Rimarchiamo che c'è una corrispondernza biunivoca tra* $\mathbb{C}$ *ed* $\mathbb{R}^2$

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ a+ib & \mapsto & (a,b) \end{array}$$

Possiamo quindi identificare, dal punto di vista insiemistico, i complessi col piano reale. Ogni punto si puo' identificare come una coppia ordinata di numeri reali (a, b) *oppure (tranne l'origine) con la distanza dall'origine e la direzione, come visto dal disegno*

GNU1: Rappresentazione vettoriale di (a, b)



L'origine è l'unico punto con distanza nulla e direzione non definita. Per il teorema di Pitagora, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Osservazione 4.4. `[BBB99]` *[Forma vettoriale o trigonometrica] Un numero complesso* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *può essere identificato con l' elemento* (a, b) *del piano reale* $\mathbb{R}^2$*, con sulle ascisse la parte reale e sulle ordinate la parte complessa, che in questo caso si indica come il* piano di Argand-Gauss*. In questo caso il modulo* $|z|$ *(si scrive spesso come* ρ*) è la lunghezza del vettore centrato nell'origine* (a, b) *e possiamo definire l'argomento* $\arg(z) = \theta$*. L'argomento è noto a meno di multipli interi di* 2π*. Dalla trigonometria elementare abbiamo che*

$$a = \mathrm{Re}(z) = \rho \cos\theta \;\; e \;\; b = \mathrm{Im}(z) = \rho \sin\theta$$

quindi possiamo scrivere ogni complesso in forma trigonometrica.

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

Notiamo che l'argomento di 0 *non è definito.*

Diamo qualche notazione su $\mathbb{R}[i]$

Definizione 4.5. [BBB50]

1. *Il campo* $\mathbb{R}[i]$ *si dice campo dei* complessi *e si indica come* $\mathbb{C}$.
2. *Un numero complesso scritto come* $a + ib$ *si dice* in forma cartesiana.

   Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$*:*
3. *la* parte reale *di* z *è* a *e si indica* $\mathrm{Re}(z)$.
4. *La* parte immaginaria *di* z *è* b *e si indica* $\mathrm{Im}(z)$.
5. *Se* $\mathrm{Re}\, z = a = 0$ *allora* z *è detto* immaginario puro.
6. *Se* $\mathrm{Im}\, z = b = 0$ *allora* $z \in \mathbb{R}$.
7. *Il* modulo *di* z *è* $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ *e si indica* $|z|$.

Esempio 4.6. [BBB98] *Portare i complessi* z_1 *di modulo* 3 *ed argomento* $\frac{\pi}{2}$, *e* z_2 *di modulo* 2 *ed argomento* $\frac{\pi}{4}$ *in forma cartesiana.*

Svolgiamo semplicemente i conti.

- *Dato che* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, *abbiamo*

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$$

- *Dato che* $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *abbiamo*

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Esempio 4.7. [BBB88] *Portiamo* $1 + i \in \mathbb{C}$ *in forma trigonometrica. Ricordiamo che*

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \rho\cos\theta = a, \quad \rho\sin\theta = b$$

Qundi $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ *ed abbiamo per* $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2}\cos\theta \\ b = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

dato che sia a *che* b *sono positivi* z *appartiene al primo quadrante del piano di Argand-Gauss, e quindi delle due possibili soluzioni* $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, *scegliamo* $\frac{\pi}{4}$. *La forma trigonometrica di* $1 + i$ *è quindi*

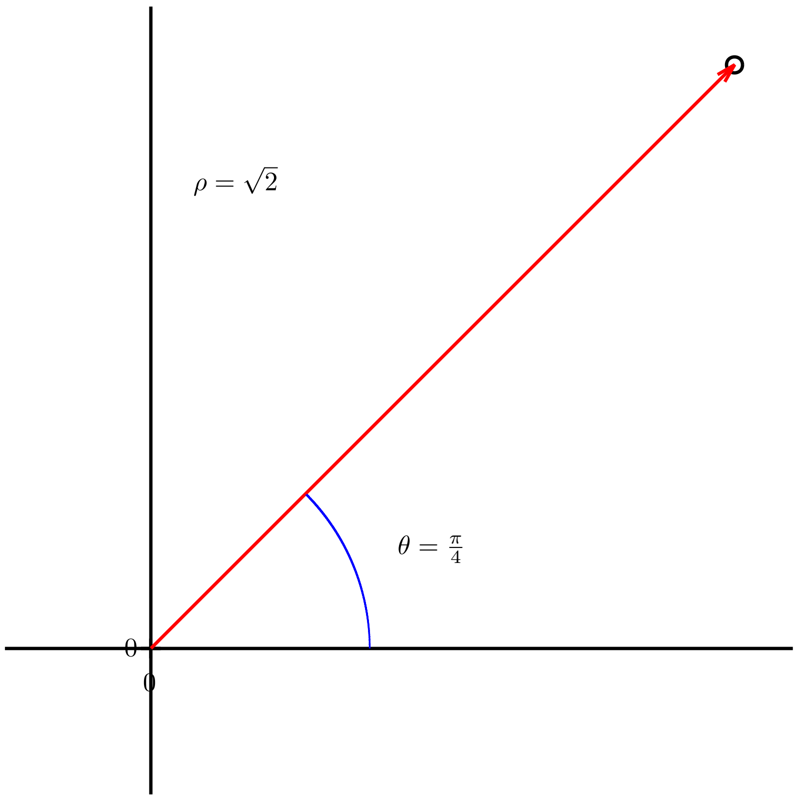
$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Per esercizio, risolvere disegnando $1 + i$ *sul piano di Argand-Gauss e leggendo il modulo e l'argomento dal disegno.*

Osservazione 4.8. [BBB82] *Semplicemente disegnando il complesso sul piano di Argand-Gauss spesso possiamo determinare immediatamente la sua forma cartesiana o trigonometrica*

Esempio 4.9. [BBX82] *Determinare modulo ed argomento del complesso* $1+i$

GNU2: Rappresentazione trigonometrica di $1+i$



E' immediato dalla definizione di forma trigonometrica e dal principio di identità dei complessi in forma cartesiana che due numeri complessi in forma trigonometrica sono uguali se sono ambedue nulli o se hanno uguale modulo ed il loro argomento differisce per un multiplo intero di 2π

Osservazione 4.10. [BBZ15] *Abbiamo un numero complesso in forma trigonometrica* $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Possiamo sempre portarlo in forma* ridotta, *ovvero trovare un unico* $\theta' \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta' < 2\pi$ *tale che*

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Per determinare θ' *basta sommare a* θ *un opportuno multiplo intero di* 2π, *anche negativo se del caso.*

Esempio 4.11. [BBZ16] *Posso scrivere il numero complesso in forma trigonometrica* $4(\cos 11\pi + i\sin 11\pi)$ *come, per esempio*

$$4(\cos 9\pi + i\sin 9\pi), \quad 4(\cos 3\pi + i\sin 3\pi), \quad 4(\cos\pi + i\sin\pi), \quad 4(\cos -\pi + i\sin -\pi)$$

Tra queste rappresentazioni la forma ridotta è $4(\cos\pi + i\sin\pi)$, *dato che l'argomento appartiene all intervallo* $[0, 2\pi)$.

Osservazione 4.12. [BBB15] *[Principio di identità dei complessi in forma trigonometrica]*

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Detto in un altro modo

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}\ t.c. \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Definizione 4.13. [BBV11] *Dato $a + ib \in \mathbb{C}$, il complesso $\overline{a+ib} = a - ib$ è detto coniugato di $a + ib$.*

Valgono le seguenti proprietà del coniugio

Proposizione 4.14. [BBB11] *Dato $z, z_1 \in \mathbb{C}$,*

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}$.
3. $\overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1}$.
4. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *se* $z \neq 0$.
5. $\overline{z} = z$ *se e solo se* $z \in \mathbb{R}$.
6. $\overline{z} = -z$ *se e solo se* z *è immaginario puro..*
7. $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$ *e* $z\overline{z} = 0$ *se e solo se* $z = 0$.
8. *Possiamo indicare l'inverso moltiplicativo usando coniugio e modulo*

$$(a + ib)^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Dimostrazione. Facili verifiche □

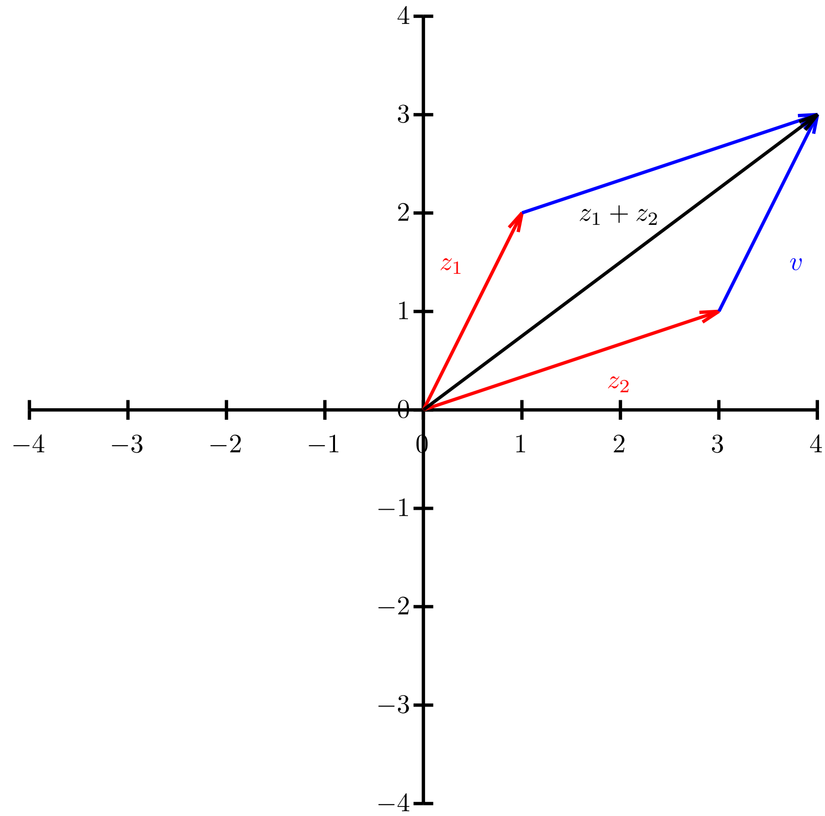
Valgono le seguenti proprietà del modulo

Proposizione 4.15. [BBB12] *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora*

1. $|z| \geq 0$ *e* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
4. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *[Disuguaglianza Triangolare]*
6. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Dimostrazione. Facili verifiche per le proprietà 1-4. Per le proprietà 5-6, cfr. [Abate], 11.3, oppure ci possiamo rifare alla geometria euclidea:

GNU3: Disuguaglianza Triangolare e regola del parallelogramma



Il lato v ha stesso modulo ed orientamento di z_1 e per il triangolo di lati $z_1 + z_2, z_2, v$ è già noto che:

- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è minore della somma delle lunghezze degli altri due, z_1, v.
- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è maggiore del valore assoluto della differenza delle lunghezze degli altri due, z_1, v.

E considerando che $|z_1|$, la lunghezza di z_1, è uguale a $|v|$, la lunghezza di v ne seguono le proprietà 5,6. $\square$

Esempio 4.16. `[BBB40]` *Alcuni esempi di equazioni risolvibili in* $\mathbb{C}$.

- $z^2 + 1$, *soluzioni* $z = \pm i$.
- $x^2 + 2$, *soluzioni* $x = \pm i\sqrt{2}$.
- $x^2 + x + 1$, *soluzioni* $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- *È facile vedere che tutte le equazioni di secondo grado hanno soluzioni in* $\mathbb{C}$, *basta usare la formula. In particolare, tutti i polinomi di secondo grado a coefficienti reali con discriminante positivo hanno due soluzioni complesse, una coniugata dell'altra.*

Osservazione 4.17. `[BBB41]` $\forall\, a, b \in \mathbb{C}, \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

Esercizio 4.18. `[BBB42]` *[Proposto]* $\forall\, a, b \in \mathbb{C}, \quad a^4 + b^4 = ?$

4.2 Potenze e radici di un complesso.

La somma e la differenza di complessi in forma cartesiana sono facili da calcolare. Appena più complicati il prodotto e inverso. La potenza può presentare dei problemi.

Esempio 4.19. [BBB20] *Calcolare* $i^3, i^7, i^{12}, i^{323}$*. Dato che* $i^2 = -1$ *abbiamo che*

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = ii^2 = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

Notiamo che le potenze di i *sono cicliche di ordine* 4*, e* $i^n = i^r$ *dove* r *è il resto della divisione di* n *per* 4*. Quindi*

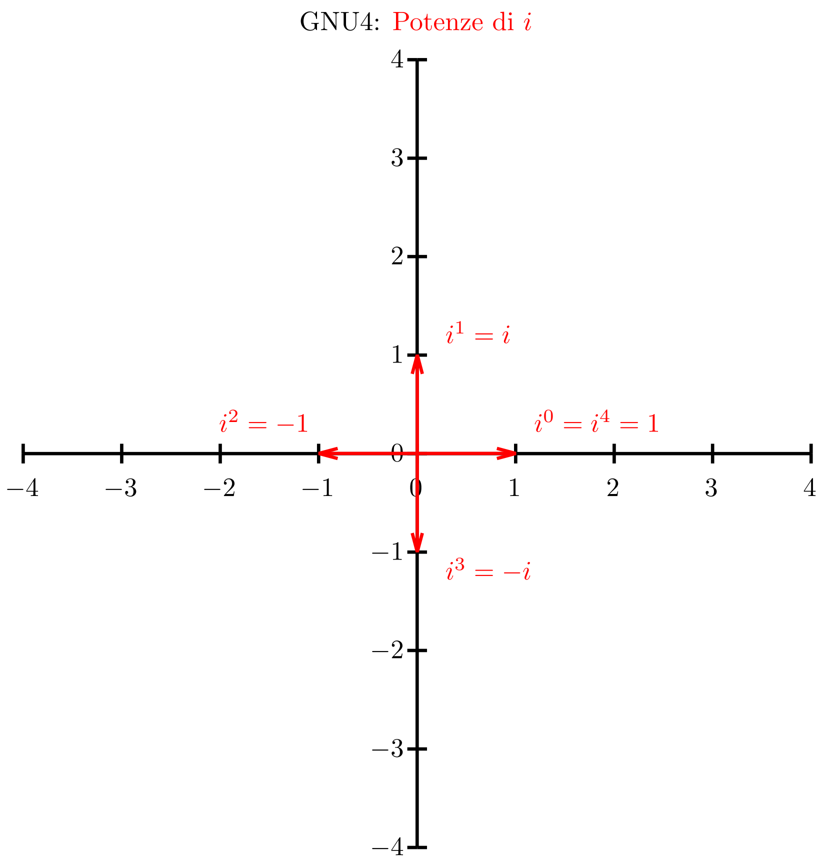
$$i^3 = -i, \quad i^7 = i^3 = -i, \quad i^2 = i^0 = 1$$

e dato che $323 = 4 \cdot 80 + 3$*, (vediamo in dettaglio, ma potremmo saltare direttamente al risultato)*

$$i^{323} = i^{80 \cdot 4 + 3} = i^{4 \cdot 80} \cdot i^3 = \left(i^4\right)^{80} \cdot -i = 1^{80} \cdot -i = -i$$

Notiamo altresì che dall'identità $i^4 = i^3 \cdot i = 1$ *discende immediatamente che*

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = i^3 = -i$$



Esempio 4.20. [BBB21]

$$
\begin{aligned}
(2+i)^5 &= 2^5 + 5\cdot 2^4 i + 10\cdot 2^3 i^2 + 10\cdot 2^2 i^3 + 5\cdot 2 i^4 + i^5 \\
&= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i \\
&= -38 + 41i
\end{aligned}
$$

Richiamo 4.21. [BBB30] *Ricordiamo dalla trigonometria elementare la formula del coseno della somma*

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ \ e \ \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

e che

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\alpha \\ \sin\theta = \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \ \textit{tale che}\ \theta = \alpha + 2k\pi$$

Il prodotto e la divisione di complessi in forma trigonometrica, come la loro potenza, sono relativamente semplici

Proposizione 4.22. [BBB22] *Dati i due complessi in forma trigonometrica*

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \ \ e \ \ z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

Abbiamo che

1. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$
2. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{\rho_1}(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)) = \dfrac{1}{\rho_1}(\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1))$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$
4. $z_1^n = (\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))^n = \rho_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$ *[Formula di DeMoivre]*

Dimostrazione.

1. Il prodotto $\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ mi da'

$$
\begin{aligned}
&\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) = \\
&= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\
&= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}
$$

per la regola sul seno e coseno dell'angolo somma.

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} &= \frac{1}{\rho_1}\frac{1}{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}\cdot\frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}\\
&= \frac{1}{\rho_1}\frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}\\
&= \frac{1}{\rho_1}\frac{\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)}{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1}\\
&= \frac{1}{\rho_1}\frac{\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)}{1}\\
&= \frac{1}{\rho_1}\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)
\end{aligned}$$

usando la formula $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ e le proprietà di seno e coseno.

3. Discende immediatamente dal punto precedente.

4. Lasciato per esercizio. Discende immediatamente dal primo punto, con una facile dimostrazione per induzione. Per l'induzione, facciamo riferimento al corso di Analisi.

□

Una immediata conseguenza è la formula per l'estrazione delle n radici n-esime di un complesso in forma trigonometrica.

Definizione 4.23. [BBB23] *Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$. Una* radice n-esima *di w è un complesso z tale che $z^n = w$. L'insieme delle radici n-esime di w si indica come $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}}$.*

Proposizione 4.24. [BBB24] *Sia w un complesso non nullo e $n \geq 1$. Allora esistono esattamente n radici distinte di w. Se $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{con } k = 0, \dots, n-1 \tag{4.1}$$

Abbiamo che $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ e gli z_k sono tutti distinti

Dimostrazione. Innanzitutto, grazie alla formula di DeMoivre, abbiamo che

$$z_k^n = \rho\left[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = w$$

e quindi gli z_k sono radici di w (cfr. definzione di radice). Rimane da vedere che siano le uniche e siano tutte distinte.

Per l'unicità: se $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ è una radice n-esima di w, dato che

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = w$$

dobbiamo avere, per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } n\alpha = \theta + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z}$$

per cui z è della forma 4.1

Dimostriamo ora che gli z_k, con $k : 1, \dots, n-1$ sono tutti distinti. Per costruzione, i loro argomenti sono distinti e compresi tra $\frac{\theta}{n}$ e $\frac{\theta}{n}2\pi$. Quindi per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica gi z_k sono tutti distinti. □

Esempio 4.25. [BBB44] *Risolvere* $z^3 - 1 = 0$.

Basta estrarre le tre radici terze dell'unità: $z = \sqrt[3]{1}_{\mathbb{C}}$. *Mettiamo* 1 *in forma trigonometrica*

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Dalla formula

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right) \quad k{:}0\ldots 2$$

e quindi

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1\left(\cos\left(\frac{0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0}{3}\right)\right) && = 1 && k = 0\\
z_1 &= 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) && = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} && k = 1\\
z_2 &= 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) && = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} && k = 2
\end{aligned}$$

Definizione 4.26. [BBB25] *Si usa scrivere il complesso* $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ *come* $\rho e^{i\theta}$. *Questa è la* forma esponenziale *del complesso. Al nostro livello, questa è* **semplicemente una notazione**.

L'utilità della notazione è immediata, dato che sono rispettate tutte le usuali regole delle potenze:

Osservazione 4.27. [BBB26] *[Proprietà della forma esponenziale] Dati* $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_0^+$ *e* $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

1. *Principio di identità dei complessi in forma esponenziale*

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \textit{ tale che} \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

2. $\rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
3. $\left(\rho e^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}}$.
4. $\dfrac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
5. $\left|\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| = \rho$.
6. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.
7. $\arg\left(\rho e^{i\theta}\right) = \theta$.
8. $\overline{\left(\rho e^{i\theta}\right)} = \rho e^{-i\theta}$.
9. $e^{i\pi} = -1$.
10. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora* $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$
11. *Se* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *allora* $\left(e^{a+ib}\right)^c = e^{c(a+ib)}$

Osservazione 4.28. `[BBB46]` *[Formula delle radici in forma esponenziale] Se* $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$$\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}} \quad | \quad k : 0 \ldots n-1 \right\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad | \quad k : 0 \ldots n-1 \right\}$$

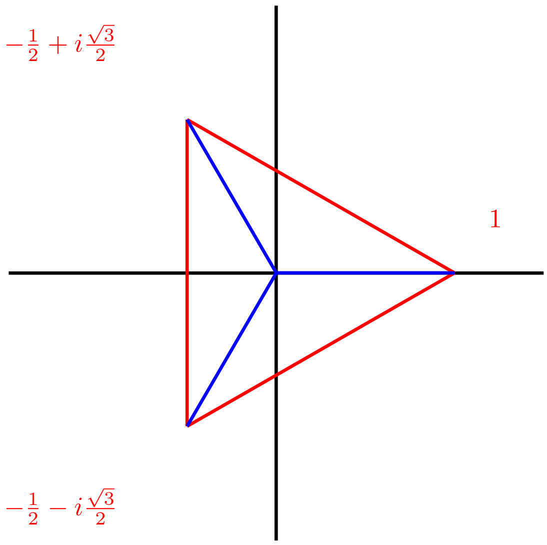
o anche, scritto in altro modo

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}, \ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}, \ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{2\pi}{n}\right)}, \ldots \ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}, \ldots, \ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)} \right\}$$

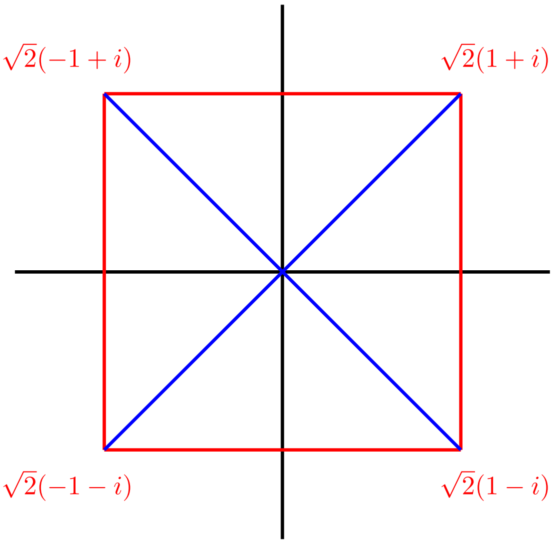
Discende immediatamente dall'osservazione precedente che

Corollario 4.29. `[BBB60]` *Le* n *radici* n*-esime di un complesso* z *sono i vertici di un poligono regolare con* n *lati nel piano di Argand-Gauss, dato che gli argomenti (angoli associati) di due radici "sucessive"* $j, j+1$ *differiscono sempre per lo stesso angolo. Abbiamo gia' visto che le radici quarte di* 1 *formano i vertici di un quadrato,*

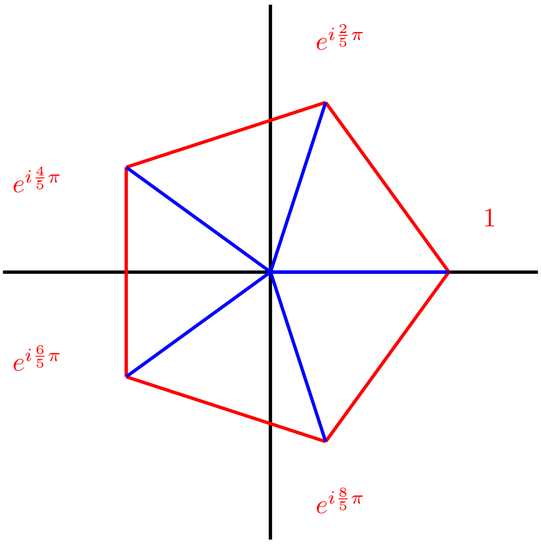
GNU5: Le radici terze di 1 formano i vertici di un triangolo equilatero



GNU6: Le radici quarte di 1 formano i vertici di un quadrato



GNU7: Le radici quinte di 1 formano i vertici di un pentagono regolare



Esercizio 4.30. [BBB84] *[Proposto] Dato $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ ed $n > 1$, $(\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}}, \cdot)$ è un sottogruppo moltiplicativo di $(\mathbb{C}, \cdot)$.*

La moltiplicazione torce il complesso.

Esempio 4.31. [BBB95] *Dato $z = e^{i\pi/4} \in \mathbb{C}$*

1. $2 \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi/4}$ *il modulo di z viene moltiplicato per 2. [Allunga]*
2. $e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = e^{i7/\pi 4}$ *sommo $\pi/3$ al modulo di z. [Ruota]*

3. $2e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i7/4\pi}$ *moltiplico il modulo di z per 2 E sommo $\pi/3$ al suo modulo. [Torce]*

Esempio 4.32. `[BBB49]` *Dato $z = \rho_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$ e $a, \alpha \in \mathbb{R}$*

1. $a\rho_0 e^{i\theta_0}$ *moltiplico il modulo di z per a.*
2. $e^{i\alpha}\rho_0 e^{i\theta_0}$ *sommo α all'argomento di z.*
3. $ae^{i\alpha}\rho_0 e^{i\theta_0}$ *moltiplico il modulo di z per a E sommo α all'argomento di z.*

4.3 Fattorizzazioni in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Teorema 4.33 (Teorema fondamentale dell'Algebra)**.** `[BBB70]` *Un polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha esattamente n radici complesse, non necessariamente distinte.*

Corollario 4.34. `[BBB71]` *Per ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ esistono $\alpha_i, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ non necessariamente distinti tali che*

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

Gli unici polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ sono lineari.

Osservazione 4.35. `[BBB72]` *Determinare esplicitamente le radici (i fattori lineari) di un polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ è in genere impossibile. Si conoscono formule per i polinomi di grado $2, 3, 4$ ed è stato dimostrato che non esiste una formula esatta che usi solo i radicali per polinomi di grado ≥ 5.*

Notiamo che quando risolviamo un equazione di secondo grado a discriminante negativo troviamo due soluzioni complesse coniugate

Esempio 4.36. `[BBB86]`

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Osservazione 4.37. `[BBB58]` *Notiamo altresì che dato $z_0 \in \mathbb{C}$, il prodotto dei due fattori lineari $(x - z_0)$, $(x - \overline{z_0})$, che stanno in $\mathbb{C}[x]$, è un polinomio in $\mathbb{R}[x]$, e precisamente*

$$\boxed{(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2(\mathrm{Re}(z_0))x + |z_0|^2}$$

Infatti, se $z_0 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ e ricordando che la parte reale Re *di z_0 è a e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$,*

$$\begin{aligned}
(x - (a + ib))(x - \overline{a + ib}) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib)) \\
&= x^2 - x(a - ib) - (a + ib)x + (a + ib)(a - ib) \\
&= x^2 - xa + xib - xa - ibx + a^2 + b^2 \\
&= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \\
&= x^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0)x + |z_0|^2
\end{aligned}$$

Quindi fattorizziamo un polinomio di secondo grado a discriminante negativo in due fattori lineari complessi "coniugati", e il prodotto di due fattori lineari complessi "coniugati" mi dà un polinomio reale.

Possiamo generalizzare alla fattorizzazione di polinomi di grado superiore?

Proposizione 4.38. [BBB73] *Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora se z_0 è radice, anche il coniugato di z_0 lo è, e con la stessa molteplicità. Più precisamente, se indichiamo con $\mu(\cdot)$ la molteplicità,*

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow f(\overline{z_0}) = 0 \text{ e } \mu(z_0) = \mu(\overline{z_0})$$

Non svolta in classe. Sia

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ con } a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$$

un polinomio di grado n. Allora, per le proprietà del coniugio,

$$\begin{aligned} f(\overline{z}) &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{f(z)} \end{aligned}$$

dato che $\forall\ i : 0 \ldots n,\ a_i = \overline{a_i}$. Quindi

$$z_0 \text{ è radice} \Leftrightarrow f(z_0) = 0 \Leftrightarrow \overline{f(z_0)} = 0 \Leftrightarrow f(\overline{z_0}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z_0} \text{ è radice}$$

Vediamo di dimostrare che z_0 e $\overline{z_0}$ hanno la stessa molteplicità.

$$z_0 \text{ radice } \Rightarrow \overline{z_0} \text{ radice } \Rightarrow \exists\ q(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ t.c. } f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})q(x)$$

per il Teorema di Ruffini. ma quindi, se $z_0 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dato che $\mathrm{Re}(z_0) = \mathrm{Re}(a + ib) = a$ e ricordando l'esercizio 4.37 precedente

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0)x + |z_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$$

è un fattore di $f(x)$, e dato che sta in $\mathbb{R}[x]$, anche $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le radici non reali di $f(x)$ sono quindi coniugate a coppie e

$$\boxed{f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \alpha_i) \cdot \prod_{j=0}^{m} P_j(x)}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $P_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ del tipo $x^2 - 2\,\mathrm{Re}(w_j)x + |w_j|^2$ per qualche opportuna radice di $f(x)$ $w_j \in \mathbb{C}$. Notiamo che $\deg(f(x)) = k + 2m$. Raccogliendo se del caso i fattori uguali otteniamo la fattorizzazione in irriducibili

$$\boxed{f(x) = \prod_{i=1}^{k'}(x - \alpha_i)^{\beta_i} \cdot \prod_{j=0}^{m'} P_j(x)^{\gamma_i}}$$

Per il teorema di fattorizzazione unica su $\mathbb{R}[x]$, questa fattorizzazione è unica. Quindi ad ogni fattore $x - z_0$ corrisponde uno ed un solo fattore del tipo $x - \overline{z_0}$ e quindi segue che $\mu(z_0) = \mu(\overline{z_0})$. □

Corollario 4.39. [BBB79] *Un polinomio di grado dispari in $\mathbb{R}[x]$ ha almeno una radice reale.*

Dimostrazione. Deve avere un numero dispari di radici in $\mathbb{C}[x]$, e quelle non reali sono a due a due coniugate. □

Corollario 4.40. [BBB74] *I soli polinomi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono lineari o di grado 2 a discriminante negativo. Tutti gli altri sono riducibili.*