Capitolo 8

Ottava Lezione

8.1 Sistemi - ultimi dettagli

Esempio 8.1. `[DDW00]` *Risolviamo il sistema*

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ovvero descriviamo in forma semplice l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \ \mid \ \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

Costruiamo la matrice completa del sistema e riduciamo con Gauss

```
A:=Mat([[1, -1,-1,2],
        [3, -2, 3,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -1, -1, 2]
     2^a-3*1^a [0, 1, 6, -6]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
;
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, -1, -1, 2]
-------------- [0, 1, 6, -6]

Cancello la colonna sopra il 2  pivot

   1^a*-1*2^a  [1, 0, 5, -4]
-------------- [0, 1, 6, -6]
```

Quindi

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \ \mid \ \begin{cases} x + 5z = -4 \\ y + 6z = -6 \end{cases} \right\}$$

Quindi se applichiamo le due condizioni $x = -5z - 4$ $y = -6z - 6$ al vettore generico di

$$\mathbb{K}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3\} = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{K}^3\}$$

per ottenere il vettore generico di $\mathcal{A}$ otteniamo $(-5z-4, -6z-6, z)$ senza nessuna ulteriore condizione su z. Quindi

$$\mathcal{A} = \{(-5z-4, -6z-6, z) \in \mathbb{K}^3 \mid z \in \mathbb{K}\}$$

Esempio 8.2. [DDA00] *Al variare di $a, b \in \mathbb{K}$ risolviamo i sistemi*

$$S_1 : \begin{cases} ax + by - zb = 1 \\ ax + ay = 2 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} ax + by - zb = 1 \\ bx + ay = 2 \end{cases}$$

- *Per S_1 operiamo con $II^a \to II^a - I^a$ per cancellare a_{21}. Non è necessario porre alcuna condizione su a, b in accordo con la Proposizione 6.33.*
- *Per S_2 possiamo operare in vari modi per cancellare a_{21}. Sempre usando la Proposizione 6.33*
  1. *$II^a \to \frac{1}{b} II^a - \frac{1}{a} I^a$. In questo caso, dobbiamo porre $a, b \neq 0$ per poter fare la divisione, e trattare a parte i due casi $a = 0$ e $b = 0$. Non sono necessarie altre condizioni.*
  2. *$II^a \to II^a - \frac{b}{a} I^a$. In questo caso, dobbiamo porre $a \neq 0$ per poter fare la divisione, e trattare a parte il caso $a = 0$. Non sono necessarie altre condizioni.*
  3. *$II^a \to aII^a - bI^a$. In questo caso, dobbiamo porre $a \neq 0$ per rispettare le ipotesi della Proposizione 6.33, e dobbiamo trattare a parte il caso $a = 0$. Non sono necessarie altre condizioni.*

  Scegliamo il secondo approccio (quello di Gauss). Facciamo a parte il caso $a = 0$, ovvero $\begin{cases} by - zb = 1 \\ bx = 2 \end{cases}$.

  Abbiamo, con $a \neq 0$

  $$\begin{pmatrix} a & b & -b & 1 \\ b & a & 0 & 2 \end{pmatrix} \; II^a - \tfrac{b}{a} I^a \;\longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & -b & 1 \\ 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & \frac{b^2}{a} & \frac{2a-b}{a} \end{pmatrix}$$

  e dato che $a \neq 0$ dividiamo la seconda riga per a e consideriamo la matrice

  $$\begin{pmatrix} a & b & -b & 1 \\ 0 & a^2 - b^2 & b^2 & 2a - b \end{pmatrix}$$

  Finire di risolvere per esercizio.

8.2 Dipendenza lineare - dettagli

Se un insieme di vettori è linearmente dipendente, ne posso esprimere uno mediante una combinazione lineare degli altri

Corollario 8.3. [CCC45] *Se $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $1 \leq j \leq n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n)$ tali che*

$$\underline{v}_j = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots, \lambda_{j-1} \underline{v}_{j-1} + \lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1} + \ldots, \lambda_n \underline{v}_n$$

o, scritto in modo più compatto,

$$\underline{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \underline{v}_i$$

Dimostrazione. Dato che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

Per ipotesi esiste un $\alpha_j \neq 0$. Possiamo allora scrivere

$$\alpha_j \underline{v}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \Rightarrow \underline{v}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \underline{v}_i$$

e la tesi è dimostrata prendendo $\lambda_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ per $i : 1, \dots, n,\ i \neq j$. □

Esempio 8.4. `[CCF11]` *I vettori* $\underline{v}_1 = (1, 1, 1), \underline{v}_2 = (2, 1, 1), \underline{v}_3 = (3, 2, 2), \underline{v}_4 = (0, 0, 1)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti?*

Soluzione. I quattro vettori sono linearmente dipendenti, dato che la quadrupla $(1, 1, -1, 0)$ di coefficenti, non tutti nulli, mi dà la combinazione lineare nulla

$$(1)(1, 1, 1) + (1)(2, 1, 1) + (-1)(3, 2, 2) + (0)(0, 0, 1) = \underline{0}$$

ovvero $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}$.

Notiamo che da questa relazione possiamo esplicitare $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ o $\underline{v}_3$

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_2 \text{ o } \underline{v}_2 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 \text{ oppure } \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

ma non $\underline{v}_4$, perchè il suo coefficente nella combinazione lineare è 0. □

Il campo da cui posso scegliere gli scalari (i coefficienti della combinazione lineare) può essere importante

Esercizio 8.5. `[CCB42]` *I numeri complessi* $1 + i,\ 4$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{C}$*? Su* $\mathbb{R}$*?*

1. *Risolviamo per* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *il sistema omogeneo*

$$\{\alpha(1 + i) + \beta 4 = 0 \Leftrightarrow \{\beta = -\frac{1 + i}{4}\alpha$$

le soluzioni sono quindi

$$\left\{ \left(\lambda, -\frac{1 + i}{4}\lambda\right) \ \mid\ \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

dato che ci sono altre soluzioni oltre a $\underline{0}$ *i numeri complessi* $1 + i,\ 4$ *sono linearmente dipendenti su* $\mathbb{C}$.

2. *Risolviamo per* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *il sistema omogeneo*

$$\{\alpha(1 + i) + \beta 4 = 0 \Leftrightarrow \{\alpha + 4\beta + \alpha i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

l'unica soluzione è quindi $\underline{0}$ *ed i numeri complessi* $1 + i,\ 4$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.6. `[CCS42]` *Il vettore* $\underline{0}$ *è dipendente anche da se stesso, infatti* $3 \cdot \underline{0} = \underline{0}$ *ma* $3 \neq 0$.

8.3 Prodotto di matrici - una motivazione

Notazione 8.7. `[DDD00]` *Spesso faremo riferimento alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

come $(a_{ij})_{ij}$ *o* (a_{ij}) *con* $i : 1 \dots m$, $j : 1 \dots n$.

Ricordiamo che

Osservazione 8.8. `[DDD10]` *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ed il vettore } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere il sistema di equazioni lineare $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{come} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Che, usando il prodotto scalare, possiamo scrivere come

$$\begin{cases} A_1 \cdot \underline{x} & = b_1 \\ & \vdots \\ A_1 \cdot \underline{x} & = b_1 \\ & \vdots \\ A_m \cdot \underline{x} & = b_m \end{cases}$$

in breve,

$$(A^1, \ldots, A^n) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

o

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Esempio 8.9. `[DDC10]` *Risolvere i tre sistemi*

$$S_1 : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x' + y' - z' = 1 \\ x' - y' - z' = 1 \\ 2x' + 2y' + 3z' = 1 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} x'' + y'' - z'' = 0 \\ x'' - y'' - z'' = 1 \\ 2x'' + 2y'' + 3z'' = 2 \end{cases}$$

Indichiamo le tre colonne dei termini noti come

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \underline{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \underline{b}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il primo sistema mediante una riduzione di Gauss a triangolare superiore

```
Ab:=Mat([[1, 1,-1,3],
         [1,-1,-1,0],
         [2, 2, 3,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3]
     2^a-1*1^a [0, -2, 0, -3]
     3^a-2*1^a [0, 0, 5, -5]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3]
-------------- [0, -2, 0, -3]
  0 sotto pivot[0, 0, 5, -5]
```

Notiamo che i tre pivot sono tutti nelle prime tre colonne. Portiamo la matrice incompleta in forma diagonale

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=5
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits

-------------------------------
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -1, 3]
     2^a*-1/2  [0, 1, 0, 3/2]
     3^a*+1/5  [0, 0, 1, -1]

Cancello la colonna sopra il 3 pivot

   1^a*-1*3^a  [1, 1, 0, 2]
-------------- [0, 1, 0, 3/2]
-------------- [0, 0, 1, -1]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

   1^a*+1*2^a  [1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0, 1, 0, 3/2]
-------------- [0, 0, 1, -1]
```

Quindi

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right) \right\} \ \textit{ovvero} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che, come affermato nella Proposizione 6.42, anche nel procedimento di sostituzione all'indietro, nessuna operazione è dipesa da particolari valori nella colonna dei termini noti.

Potremmo risolvere gli altri due sistemi

$$A\underline{x}' = \underline{b}' \qquad A\underline{x}'' = \underline{b}''$$

nello stesso modo usando Gauss, ma dato che la matrice incompleta dei tre sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è uguale, e basandoci sulle osservazioni precedenti, invece di mettere in forma a scala le altre due matrici $(A \mid b_2)$,$(A \mid b_3)$ *possiamo mettere a scala la matrice*

$$(A \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3)$$

dato che durante il procedimento di risoluzione i pivot, come già notato, possono essere sempre comunque limitati alla matrice incompleta, e quindi le colonne dei termini noti non influiscono sulle operazioni di Gauss che lvengono effettuate. Avremo in un colpo solo le risoluzioni dei tre sistemi facendo le stesse operazioni di prima sulla matrice incompleta e replicando le operazioni di prima sulle altre colonne dei termini noti, $\underline{b}'$, $\underline{b}''$.

```
Abbb:=Mat([[1, 1,-1,3,1,0],
           [1,-1,-1,0,1,1],
           [2, 2, 3,1,1,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Abbb);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
     2^a-1*1^a [0, -2, 0, -3, 0, 1]
     3^a-2*1^a [0, 0, 5, -5, -1, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
-------------- [0, -2, 0, -3, 0, 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 5, -5, -1, 2]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
     2^a*-1/2  [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
     3^a*+1/5  [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]

Cancello la colonna sopra il 3 pivot

   1^a*-1*3^a  [1, 1, 0, 2, 4/5, 2/5]
-------------- [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
-------------- [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot
```

```
   1^a*+1*2^a  [1, 0, 0, 1/2,  4/5, 9/10]
-------------- [0, 1, 0, 3/2,    0, -1/2]
-------------- [0, 0, 1,  -1, -1/5,  2/5]
```

Abbiamo ritrovato la soluzione del primo sistema e abbiamo trovato le soluzioni del secondo e terzo sistema

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{x}'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ -1/2 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere il sistema come

$$A(\underline{x} \mid \underline{x}' \mid \underline{x}'') = (\underline{b} \mid \underline{b}' \mid \underline{b}'')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \\ x_2 & x_2' & x_2'' \\ x_3 & x_3' & x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x_1' + x_2' - x_3' & x_1'' + x_2'' - x_3'' \\ x_1 - x_2 - x_3 & x_1' - x_2' - x_3' & x_1'' - x_2'' - x_3'' \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x_1' + 2x_2' + 3x_3' & 2x_1'' + 2x_2'' + 3x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8.4 Prodotto di matrici

Definizione 8.10 (Prodotto di matrici). `[DDD02]` *Siano* $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\mathbb{K}$ *Definiamo il prodotto* $\odot$ *delle matrici* A, B *come*

$$A \odot B \text{ con } (A \odot B)_{i,j} = (A_i \cdot B^j) \qquad i, j : 1 \dots n$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ & \vdots & \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & \dots & A_1 \cdot B^n \\ & \vdots & \\ A_n \cdot B^1 & \dots & A_n \cdot B^n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Più formalmente

$$\begin{array}{rccc} \odot\colon & \mathrm{Mat}_{n\times n}\mathbb{K} \times \mathrm{Mat}_{n\times n}\mathbb{K} & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n}\mathbb{K} \\ & (A, B) & \mapsto & (A_i \cdot B^j)_{i,j} \end{array}$$

Esempio 8.11. `[DDD60]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \\ x_2 & x_2' & x_2'' \\ x_3 & x_3' & x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x_1' + x_2' - x_3' & x_1'' + x_2'' - x_3'' \\ x_1 - x_2 - x_3 & x_1' - x_2' - x_3' & x_1'' - x_2'' - x_3'' \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x_1' + 2x_2' + 3x_3' & 2x_1'' + 2x_2'' + 3x_3'' \end{pmatrix}$$

Osservazione 8.12. `[DDC60]` *In genere indicheremo il prodotto di matrici* $A \odot B$ *come* $A \cdot B$ *o anche* AB

Esempio 8.13. `[DDD13]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \\ (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Esempio 8.14. [DDD11]

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} & (1,0,0)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} & (1,0,0)\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\\ (0,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} & (0,0,1)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} & (0,0,1)\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\\ (1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} & (1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} & (1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&4&7\\3&6&9\\6&15&24\end{pmatrix}$$

$$\textit{oppure} = \begin{pmatrix}1(1,4,7)+0(2,5,8)+0(3,6,9)\\0(1,4,7)+0(2,5,8)+1(3,6,9)\\1(1,4,7)+1(2,5,8)+1(3,6,9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\3&6&9\\6&15&24\end{pmatrix}$$

Corollario 8.15. [DDD81] *Il risultato della moltiplicazione di una matrice A a sinistra per una matrice M è una matrice la cui riga i-esima è la combinazione lineare delle righe di A a coefficenti le componenti della riga i-esima di M.*

Analogamente

Osservazione 8.16. [DDD82] *Il risultato della moltiplicazione di una matrice A a destra per una matrice M è una matrice la cui colonna j-esima è la combinazione lineare delle colonne di A a coefficenti le componenti della colonna j-esima di M.*

Esempio 8.17. [DDD83] *Riprendendo l'esercizio 8.13, vediamo che seguendo l'osservazione 8.16 sopra,*

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (1,0)\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\\ (2,3)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (2,3)\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\left(1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\11&16\end{pmatrix}$$

8.5 Anello delle matrici

Studiamo le proprietà di alcune operazioni sulle matrici: somma, prodotto esterno, prodotto interno

Osservazione 8.18. [DDD05] *Ricordiamo che due matrici* $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij})$ *appartenenti a* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *sono uguali se e solo se*

$$\forall\ i,j : 1 \dots n, \qquad a_{ij} = b_{ij}$$

Osservazione 8.19. [DDD06] *Ricordiamo che 'operazione*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \\ & (a_{ij}, b_{ij}) & \mapsto & (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$

si dice somma di matrici.

Osservazione-Definizione 8.20. [DDD77] *Ricordiamo che l'insieme* $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), +)$ *è un gruppo commutativo con neutro* 0_n*, la matrice* $n \times n$ *con entrate tutte nulle.*

Definizione-Proposizione 8.21. [DDD08] *L'operazione*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n} \\ & (\lambda, a_{ij}) & \mapsto & (\lambda a_{ij}) \end{array}$$

si dice prodotto esterno o prodotto per uno scalare *ed ha tutte le solite proprietà del prodotto esterno.*

Esempio 8.22. [DDS08] *Le matrici in* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$*?*

Soluzione. Dato che abbiamo la somma ed il prodotto esterno, possiamo usare l'usuale definizione di indipendenza lineare. La domanda si traduce nella domanda: l'equazione matriciale nelle variabili x, y, z

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2$$

ha solo la soluzione nulla 0_2?

$$\begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & 2x + y + z \\ 3x + y & 4x + z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

E le tre matrici sono quindi linearmente indipendenti □

Proposizione 8.23. [DDD07] *L'insieme* $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *è un anello non commutativo con neutro additivo* 0_n *e neutro moltiplicativo* I_n*.*

Dimostrazione. È facile verificare tutte le proprietà. In particolare, date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$

- $I_n \cdot A = A \cdot I_n$ per ogni $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$. Segue immediatamente dalla definizione.

- Per vedere che il prodotto di matrici è in genere non commutativo, basta vedere che esistono $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Abbiamo già visto che
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$
Verifichiamo che
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

□

Notiamo che, essendo l'anello non commutativo, valgono tutte e due le proprietà distributive, destra e sinistra.
$$\forall\ A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \qquad \begin{array}{l} (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \\ C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B \end{array}$$
Vale anche le proprietà di omogeneità
$$\forall\ A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda(A\cdot B) = (\lambda A)\cdot B) = A\cdot(\lambda B)$$

Esempio 8.24. `[DDD15]` *Notiamo che in generale per due matrici $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ abbiamo che*
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$
Se le due matrici commutano (se $AB = BA$) allora ritroviamo la formula usuale
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Spesso indicheremo le matrici $I_n,\ 0_n$ come $I,\ 0$.

Richiamo 8.25. `[DDD99]` *Una matrice non nulla $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è detta zero-divisore se esiste una matrice non nulla $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tale che*
$$A \cdot B = 0$$

Esempio 8.26. `[DDD78]`
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$
Queste matrici sono zero divisori.

Esempio 8.27. `[DDD32]` *Vediamo che*
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Definizione 8.28. `[DDD14]` *Una matrice non nulla $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è detta* nipotente *se esiste $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che*
$$A^k = 0$$

Esercizio 8.29. `[DDD30]` *Determinare delle radici quadrate di I_n, ovvero delle matrici $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tali che $A^2 = I_n$.*

Soluzione. Scegliamo per semplicità $n = 2$. Per le matrici
$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$$
vale $A_x^2 = I_2$ □

Esempio 8.30. [DDD24] *Per il prodotto di matrici non vale la legge di cancellazione del prodotto ovvero, per* $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *non vale necessariamente*

$$AB + AC = 0 \Rightarrow B + C = 0$$

Soluzione. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} A \cdot B + A \cdot C &= A \cdot (B + C) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} B + C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

□

Esercizio 8.31. [DDA32] *Dimostrare che se* $(A, +, \cdot)$ *è un anello, allora* A *non ha con zero divisori se e solo se vale in* A *la legge di cancellazione del prodotto. Un anello senza zero-divisori si dice* integro.

8.6 Prodotto per matrici non quadrate

Possiamo facilmente generalizzare il prodotto matriciale $A \cdot B$ a matrici non quadrate, avendo cura che sia possibile fare i prodotti scalari, ovvero che il numero delle colonne di A sia uguale al numero di righe di B.

Definizione 8.32. [DDD04] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$. *Allora la matrice* $A \cdot B \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{K})$ *così definita*

$$A \cdot B = \left(A_i \cdot B^j\right)_{i,j} \text{ con } i : 1 \ldots m,\ j : 1 \ldots k$$

si dice prodotto matriciale di A, B.

Notiamo che il numero delle colonne di A *è uguale al numero di righe di* B. *I prodotti* $A_i \cdot B^j$ *hanno quindi senso*

Valgono tutte le osservazioni e le definizioni che abbiamo visto sul prodotto di matrici quadrate, adattate naturalmente a questo caso. Le matrici non quadrate non formano un anello, visto che non è possibile definire un prodotto interno per matrici in $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *con* $m \neq n$.

Esempio 8.33. [DDD12]

1. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 2×3 *e* 3×2 *ha dimensioni* 2×2

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [4,5,6]]);

B:=Mat([[1,2],
        [4,5],
        [1,1]]);
A*B;
Mat[[12, 15],
    [30, 39]];
```

2. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 1×3 *e* 3×1 *ha dimensioni* 1×1

```
A:=Mat([[1,2,3]]);
B:=Mat([[1],
        [4],
        [1]]);
A*B;
Mat[[12]]
```

Si tratta in effetti, in questo caso, di un prodotto scalare

3. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 4×1 *e* 1×4 *ha dimensioni* 4×4

```
A:=Mat([[1],
        [4],
        [1],
        [0]]);
B:=Mat([[1,2,0,3]]);
A*B;
Mat[ [1, 2, 0, 3],
     [4, 8, 0, 12],
     [1, 2, 0, 3],
     [0, 0, 0, 0]]
```

4. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 3×2 *e* 2×4 *ha dimensioni* 3×4

```
A:=Mat([[1,2],
        [4,1],
        [1,0]]);
B:=Mat([[1,2,0,3],
        [0,2,1,1]]);
A*B;
Mat([[1, 6, 2, 5],
     [4, 10, 1, 13],
     [1, 2, 0, 3]])
```

Esempio 8.34. `[DDD23]` *Il prodotto matriciale di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = B$$

non è definito perchè il numero di colonne di $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ *è diverso dal numero di righe di* $B \in \mathrm{Mat}_{\times 3}(2)\,\mathbb{K}$. *Infatti non è possibile fare, per esempio, il prodotto scalare*

$$(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Osservazione 8.35. [DDD79] *Segue immediatamente dalla definizione di prodotto di matrici che per* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathrm{Mat}_{n\times s}(\mathbb{K})$ *si ha*

$$(A \cdot B)_{ij} = (A_i \cdot B^j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

con $i : 1 \dots m,\ j : 1 \dots s$.

8.7 Prodotto a blocchi

Proposizione 8.36. [EEE41] *Date matrici* A_1, A_2, B_1, B_2 *di opportune dimensioni sullo stesso campo,*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2$$

Proposizione 8.37. [EEE42] *Prodotto a blocchi*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Quando gli ordini delle matrici, sullo stesso campo, rendono possibile fare i vari prodotti

Esempio 8.38. [EEE43] *Vediamo le potenze di una matrice a blocchi:*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^2 &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} I_3 \cdot I_3 + \underline{v} \cdot \underline{0} & I_3 \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot 1 \\ \hline \underline{0} \cdot I_3 + 1 \cdot \underline{0} & \underline{0} \cdot \underline{v} + 1 \cdot 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & I_3 \cdot \underline{v} + \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^3 &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 3\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Abbiamo calcolato A^2, A^3. Supponiamo che valga

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)^k = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)$$

e dimostriamolo per induzione sull'esponente della matrice, k.

Dimostrazione.

- Base. $k = 3$. Già fatto.
- Passo induttivo. Supponiamo che valga

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)^k = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)$$

e dimostriamo che vale

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)^{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & (k+1)\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)^{k+1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right)^k \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & (k+1)\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

□

8.8 Matrice trasposta

Definizione 8.39. [EEE20] *Data una matrice*

$$A = (a_{ij})_{ij} \quad i : 1 \dots m,\ j : 1 \dots n$$

la matrice

$$(a_{ji})_{ij} \quad i : 1 \dots m,\ j : 1 \dots n$$

è detta matrice trasposta *di A e si scrive A^T. Trasporre una matrice lascia invariata la diagonale e scambia gli elementi sopra di essa con i corrispondenti elementi al di sotto. Da un altro punto di vista, trasporre una matrice ne scambia le righe con le colonne.*

Osservazione 8.40. [EEX20] *Notiamo che l'operazione di trasposizione di una matrice* $(a_{ij})_{ij}$ *si può definire anche come*

$$((a_{ij})^T)_{ij} = (a_{ji})_{ij}$$

Esempio 8.41. [EEE48]

```
M:=Mat([[1,1,1],
        [2,2,2],
        [3,3,3]]);

Transposed(M);

Mat[ [1, 2, 3],
     [1, 2, 3],
     [1, 2, 3]]
```

Esempio 8.42. [EEW48]

```
M:=Mat([[1,2,3],
        [4,5,6],
        [7,8,8]]);

Transposed(M);
Mat[ [1, 4, 7],
     [2, 5, 8],
     [3, 6, 8] ]
```

Proposizione 8.43 (Proprietà della trasposta)**.** [EEE17] *Siano* $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Allora*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $\forall\ t \in \mathbb{K} \qquad (tA)^T = tA^T$.
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Dimostrazione.

1. Immediata.
2. Immediata.
3. Immediata.
4. Vediamo che $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$\left((A\cdot B)^T\right)_{ij} = \left(\left(\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}\right)^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki}$$

$$(B^T\cdot A^T)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(B^T\right)_{ik}\left(A^T\right)_{kj}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk}$$

e dato che il prodotto di scalari è commutativo le due sommatorie sono uguali.

Notiamo che

- per la prima riga, la prima uguaglianza segue dalla definizione di prodotto di matrici

$$(a_{ij})_{ij} \cdot (b_{ls})_{ls} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{ij}$$

  e la seconda dalla definizione di trasposta $((a_{ij})^T)_{ij} = (a_{ji})_{ij}$.
- Analogamente per la seconda riga.

È lasciata per esercizio l'analisi dell'analogo per matrici non quadrate.

□

Esercizio 8.44. `[EEA17]` *Estendere se possibile il punto 4 della Proposzione 8.43 precedente al caso di matrici non quadrate di dimensioni compatibili.*

Esempio 8.45. `[EEE16]`

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [0,1,0],
        [1,1,1]]);

B:=Mat([[1,2,0],
        [1,2,0],
        [1,2,1]]);
A*B;
Mat[[6, 12, 3],
    [1, 2, 0],
    [3, 6, 1]]


Transposed(A*B);
Mat[[6, 1, 3],
    [12, 2, 6],
    [3, 0, 1]]

Transposed(B)*Transposed(A);
Mat[[6, 1, 3],
    [12, 2, 6],
    [3, 0, 1]]
```