Appendice D

Matrici simmetriche e basi ortonormali

In questo capitolo ogni spazio vettoriale V od affine W sarà sempre preso come sottospazio di $\mathbb{K}^n$. A meno che non sia affermato esplicitamente il contrario, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definizione D.1. `[NNN13]` *Un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon V \to V$ tale che*

$$\forall v_1,\ \underline{v}_2 \in V \quad T(\underline{v}_1) \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \cdot T(\underline{v}_2)$$

si dice endomorfismo simmetrico. per cui esista una base $\mathcal{B}$ tale che $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia simmetrica si dice simmetrico.

Proposizione D.2. `[NNN13]` *Un endomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon V \to V$ è simmetrico se e solo se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $(M_T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ sia simmetrica.*

Definizione D.3. `[NNQ13]` *Due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$ si dicono ortogonali se $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ e si scrive $\underline{v} \perp \underline{w}$.*

Proposizione D.4. `[NNZ13]` *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio di dimensione finita n e $W \underset{SSP}{\subseteq} V$. Allora $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \forall\, \underline{w} \in W\ \underline{w} \perp$ è un sottospazio di V. Per di più, se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ abbiamo che la somma di W, $W^\perp$ è diretta e $V = W \oplus W^\perp$.*

Dimostrazione.

1. $W^\perp \underset{SSP}{\subseteq} V$. Infatti se $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W^\perp$ e $a, b \in \mathbb{K}$ e $\underline{w} \in W$

   $$(a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2) \cdot \underline{w} = a\underline{v}_1 \cdot \underline{w} + b\underline{v}_2 \cdot \underline{w} = 0 + 0 = 0$$

   dato che $\underline{v}_i \in W^\perp \Leftrightarrow \underline{w}_i \cdot \underline{w} = 0\ \forall\ \underline{w} \in W$.

2. Dimostriamo che $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$. Sia $\underline{v} \in W \cap W^\perp$ allora

   $$\underline{v} \in W^\perp \text{ e } \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{v} \Rightarrow \underline{v} \cdot \underline{v} = 0$$

   Quindi se $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$

   $$\underline{v} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 0 \Rightarrow \forall\ i\ v_i = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

3. Basta dimostrare che se $\dim W = p$ allora $\dim W^\perp = n - p$. Questo ci dà $\dim W \oplus W^\perp = p + n - p = n$ e quindi $V = W \oplus W^\perp$. Data la base $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p$ di W onsideriamo l'applicazione

   $$\begin{array}{rccc} T\colon & V & \to & V \\ & \underline{v} & \mapsto & (\underline{v} \cdot \underline{v}_1)\underline{v}_1 + \ldots + (\underline{v} \cdot \underline{v}_p)\underline{v}_p \end{array}$$

   È facile dimostrare che si tratta di un endomorfismo, che la dimensione dell'immagine è p e che $\ker T = W^\perp$. Quindi per il teorema della dimensione $\dim W^\perp = n - p$.

□

Osservazione D.5. [NNZ15] *Nelle ipotesi della proposizione precedente, se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *non necessariamente abbiamo* $W \oplus W^\perp$*. Infatti se* $W = \operatorname{Span}((1,i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^2$*, abbiamo*

$$(1,i) \cdot (1,i) = 1 + i^2 = 0 \Rightarrow (1,i) \in W \cap W^\perp$$

Definizione D.6. [NNN14] *Sia* $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$*. Allora* $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ *si dice normale se e solo se ha* norma *uguale ad* 1*, ovvero*

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = 1$$

Definizione D.7. [NNN15] *Sia* $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ *una base di* $\mathbb{R}^n$*. La base* $\mathcal{B}$ *si dice*

- ortogonale *se* $v_i \perp v_j \Leftrightarrow i \neq j$
- ortonormale *se i suoi vettori sono anche tutti normali.*

Esempio D.8. [NNN61]

1. *Le basi* E_n *sono tutte ortonormali.*
2. *La base* $B = (1,1), (1,0)$ *non è nè ortogonale è normale.*
3. *La base* $B = (2,0), (0,2)$ *è ortogonale ma non normale.*
4. *La base* $B = (2,1), (5,-10)$ *è ortogonale ma non normale.*
5. *La base* $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1)$ *è normale ma non ortogonale.*
6. *La base* $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *è ortonormale.*

Teorema D.9 (Teorema spettrale)**.** [NNN16] *Sia* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un endormorfismo di* $\mathbb{R}$*-spazi. Allora esiste una base ortonormale di* V *composta da autovettori di* T *se e solo se* T *è simmetrico.*

Osservazione D.10. [NNN70] *Questo non vuol dire che tutte la basi di autovettori di* T *siano ortonormali, solo che ne esiste una ortonormale.*

Esercizio D.11. [NNA61] *Determinare una base degli spazi*

1. $\operatorname{Span}((1,1))^\perp$.
2. $\operatorname{Span}((1,1),(2,1))^\perp$.
3. $\operatorname{Span}((1,1,0,1),(2,0,2,1))^\perp$.
4. $\operatorname{Span}((1,1,0,1),(2,0,2,1),(9,0,2,3))^\perp$.
5. $\operatorname{Span}((1,0,0,0),(0,1,0,0))^\perp$.
6. $\{(x,y,z,t) \mid x+y-t=0 \text{ e } 2x-3y+4t=0\}^\perp$.
7. $\{(2x+y, x-y, x+y, 0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}^\perp$.

Esercizio D.12. [NNA62] *Trovare una base ortonormale di* $B = \operatorname{Span}((1,0,1),(1,2,0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$