# Capitolo 9

# Nona lezione

## 9.1 Matrici elementari

**Definizione-Proposizione 9.1.** `[DDD50]` *La matrice identità $I_n$ con le righe $i$-esima e $j$-esima scambiate si indica come $S_n^{ij}$. Data una matrice $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, la matrice $S_n^{ij} \cdot B$ è uguale alla matrice $B$ ma con le righe $i$-esima e $j$-esima scambiate.*

*Dimostrazione.* Dalle proprietà del prodotto matriciale. □

**Esempio 9.2.** `[DDD51]`

$$S_5^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*e*

$$\begin{aligned} S_5^{24} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Definizione-Proposizione 9.3.** `[DDD53]` *La matrice identità $I_n$ con le riga $i$-esima sostituita dalla riga $(I_n)_i + \lambda(I_n)_j$ (la somma della riga $i$-esima e della riga $j$-esima moltiplicata per $\lambda$) si indica come $G_n^{ij}(\lambda)$. Data una matrice $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, la matrice $G_n^{ij}(\lambda) \cdot B$ è uguale alla matrice $B$ ma con le riga $i$-esima $B_i$ sostituita da $B_i + \lambda B_j$.*

*Dimostrazione.* Dalle proprietà del prodotto matriciale. □

**Esempio 9.4.** [DDD54]

$$G_3^{21}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*e vediamo che moltiplicare a sinistra per* $G_3^{21}\left(-\frac{3}{2}\right)$ *l'opportuna matrice equivale a fare un operazione di Gauss*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad II^a \to II^a - \frac{3}{2}\, I^a$$

**Definizione 9.5.** [DDD57] *Le matrici del tipo* $I_n^{ij}$, $G_n^{ij}(\lambda)$ *si dicono matrici elementari.*

## 9.2 Matrici invertibili

Ricordiamo che il prodotto di matrici non è commutativo. Una matrice può avere inverso rispetto all' operazione di prodotto tra matrici, naturalmente.

**Definizione 9.6.** [EEE00] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Una matrice* $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *si dice* inversa moltiplicativa destra *di A, o semplicemente inversa destra, se* $A \cdot B = I_n$. *Si dice* inversa moltiplicativa sinistra *di A, o semplicemente inversa sinistra, se* $B \cdot A = I_n$. *Una matrice che sia sia inversa destra che sinistra di A si dice* inversa *di A e la scriviamo come* $A^{-1}$. **Ricordare: mai come** $\mathbf{\frac{1}{A}}$.

**Esempio 9.7.** [EEE01] *Troviamo l'inversa destra della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$$

*Soluzione.* Introduciamo la matrice di incognite

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$$

e risolviamo il sistema

$$A \cdot X = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

col metodo che abbiamo visto precedentemente, ovvero riducendo con Gauss la matrice

```
M:=Mat([[1,3,1,0],
        [2,2,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 3, 1, 0]
     2^a-2*1^a [0, -4, -2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-4
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 3, 1, 0]
     2^a*-1/4  [0, 1, 1/2, -1/4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot

   1^a*+3*2^a  [1, 0, -1/2, 3/4]
-------------- [0, 1, 1/2, -1/4]
```

La soluzione, e quindi l'inversa destra di $A$, è quindi

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dato che la soluzione del sistema è unica, l'inversa destra

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

è unica. □

**Osservazione 9.8.** [EEE02] *Dato che abbiamo fatto solo operazioni di Gauss, questo calcolo è indipendente dal campo, sarebbe stato lo stesso calcolo su* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}$*.....*

**Esempio 9.9.** [EEE03] *Troviamo l'inversa sinistra della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$$

*Soluzione.* Proviamo a vedere se l'inversa destra è anche inversa sinistra, ed effettivamente

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lasciamo per esercizio il verificare che questa inversa sinistra è unica, ovvero che

$$X \cdot A = I_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo si può fare risolvendolo esplicitamente il sistema $X \cdot A = I_2$ e vedendo che l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, oppure, piú rapidamente, che il sistema $X \cdot A = I_2$ ha un unica soluzione e quindi ha come unica soluzione $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. □

**Problema 9.10.** [EEE04]

1. *L'inversa destra è sempre uguale all'inversa sinistra?*
2. *L'inversa è sempre unica?*
3. *Trovare un metodo efficente per calcolare l'inversa.*
4. *Determinare se una matrice è invertibile senza calcolare esplicitamente l'inversa.*

Per i primi tre problemi, possiamo dare una risposta immediata:

**Proposizione 9.11.** [EEX04] *Se esistono inverse destra e sinistra di una matrice quadrata, sono uguali.*

*Dimostrazione.* Data $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, siano $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ le sue inverse destre e sinistre rispettivamente. Dobbiamo dimostrare che $X = Y$.

Per ipotesi abbiamo

$$AX = I_n \qquad YA = I_n$$

Allora

$$Y \cdot A = I_2 \Rightarrow (Y \cdot A) \cdot X = I_2 \cdot X \Leftrightarrow Y \cdot (A \cdot X) = X \Leftrightarrow Y \cdot I_2 = X \Leftrightarrow Y = X$$

□

**Proposizione 9.12.** `[EEY04]` *L'inversa se esiste è unica*

*Dimostrazione.* Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, siano $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sue inverse. Dobbiamo dimostrare che $X = Y$.

Per ipotesi abbiamo
$$AX = I_n \qquad AY = I_n$$
Allora
$$\begin{aligned} AX = AY &\Leftrightarrow AX - AY = 0_n \\ &\Leftrightarrow A(X-Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow XA(X-Y) = X0_n \\ &\Leftrightarrow I_n(X-Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow (X-Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow X = Y \end{aligned}$$

□

**Esercizio 9.13** (Trasposta e inversa)**.** `[EER17]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che $A$ invertibile se e solo se $A^T$ invertibile, ed abbiamo*
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**Definizione 9.14.** `[FFF24]` *Il vettore di $\mathbb{K}^n$ che ha tutte le componenti nulle tranne la $i$-esima si indica come $e_i$ o* vettore canonico $i$-esimo.

$$\begin{aligned} (0,0,1,0,0) =& \underline{e}_3 \in \mathbb{K}^5 \\ (1,0,0,0) =& \underline{e}_1 \in \mathbb{K}^4 \end{aligned}$$

*Con abuso di notazione, ometteremo quando non necessario l'indicazione precisa della dimensione dello spazio di riferimento, per evitare notazioni tipo $\underline{e}_3^4$ per indicare $(0,0,1,0)$.*

**Osservazione 9.15.** `[EEQ05]` *Possiamo scrivere la matrice $I_n$ come $[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n]$, intendendo sia le righe che le colonne. Più formalmente*
$$(I_n)_i = \underline{e}_i \qquad (I_n)^i = \underline{e}_i$$

**Osservazione 9.16.** `[EEZ04]` *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, posso calcolare l'inversa destra risolvendo il sistema matriciale*
$$AX = I_n$$
*ovvero gli $n$ sistemi lineari*
$$A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \underline{e}_1, \ldots, A\begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \underline{e}_n$$
*Notiamo che questo è equivalente a mettere la matrice $A$ in forma normale a, e verificare se ci sono righe nulle.*

- *Se ci sono righe nulle, il sistema non ha un unica soluzione per la Proposizione 6.42, e la matrice $A$ non ha inversa destra e quindi non è invertibile.*

- *Se non ci sono righe nulle, la forma normale è*

$$[I_n \mid X]$$

*e leggo l'inversa destra direttamente dalla matrice, $A^{-1} = X$*

**Esempio 9.17.** `[EEE47]` *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat([[1,2,3,1,0,0],
        [4,5,6,0,1,0],
        [7,8,9,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
     2^a-4*1^a [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-7*1^a [0, -6, -12, -7, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
-------------- [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-2*2^a [0, 0, 0, 1, -2, 1]
```

*SISTEMA IMPOSSIBILE MATRICE NON INVERTIBILE*

**Esempio 9.18.** `[EEE40]` *calcolare se possibile l'inversa destra della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat([[1,2,3,1,0,0],
        [4,5,6,0,1,0],
        [7,8,8,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
     2^a-4*1^a [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-7*1^a [0, -6, -13, -7, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
-------------- [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-2*2^a [0, 0, -1, 1, -2, 1]
     Scala2DiagonaleVerbose(L);
```

```
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
     2^a*-1/3  [0, 1, 2, 4/3, -1/3, 0]
       3^a*-1  [0, 0, 1, -1, 2, -1]

Cancello la colonna sopra il 3 pivot

   1^a*+3*3^a  [1, 2, 0, 4, -6, 3]
   2^a*+2*3^a  [0, 1, 0, 10/3, -13/3, 2]
-------------- [0, 0, 1, -1, 2, -1]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

   1^a*+2*2^a  [1, 0, 0, -8/3,   8/3,  -1]
-------------- [0, 1, 0, 10/3, -13/3,   2]
-------------- [0, 0, 1,   -1,     2,  -1]
```

*L'inversa è quindi*

$$\begin{pmatrix} -8/3 & 8/3 & -1 \\ 10/3 & -13/3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Osservazione 9.19.** [EEE13] *Diciamo che una matrice non necessariamente quadrata $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}(\mathbb{K})$ ha inversa destra $X \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}(\mathbb{K})$ se $A \cdot X = I_m$. Analogamente, diciamo che ha inversa sinistra $Y \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}(\mathbb{K})$ se $Y \cdot A = I_n$. Le due inverse non possono essere uguali per semplici ragioni di ordine se la matrice non è quadrata.*

**Esercizio 9.20.** [EEE14] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*determinare una sua inversa destra ed una sua inversa sinistra.*

**Proposizione 9.21.** [EEE08] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora le seguenti condizioni sono ecquivalenti*

1. *$A$ ha inversa destra.*
2. *$A$ ha inversa sinistra.*
3. *$A$ è invertibile.*
4. *Il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha unica soluzione $\underline{x} = \underline{0}$.*
5. *Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha unica soluzione.*

*Dimostrazione.*

- Dimostreremo in seguito, usando il determinante, che le prime due condizioni sono equivalenti. Per la Proposizione 9.11, la terza condizione è equivalente alle prime due.
- Le condizioni 4 e 5 sono equivalenti, dato che il numero di soluzioni si decide, facendo una riduzione di Gauss, guardando solo la matrice incompleta.
- La condizione 3 implica la 4, dato che

$$A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{0} \Rightarrow I_2\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

.

- La condizione 5 implica la 1, dato che se il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha un unica soluzione per ogni $\underline{b}$ anche il sistema
$$A \cdot [\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n] = [\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n] \Leftrightarrow AX = B$$
ha unica soluzione e quindi $A$ è invertibile.

$\square$

**Proposizione 9.22.** `[EEE11]` *Date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che $A \cdot B$ è invertibile se e solo se $A, B$ sono invertibili e in questo caso $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$*

*Dimostrazione.* Vediamo che se $A, B$ sono invertibili $A \cdot B$ è invertibile e la sua inversa è proprio $B^{-1} \cdot A^{-1}$
$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_2$$
e quindi la matrice $(A \cdot B)^{-1}$ è l'inversa di $A \cdot B$.

Vediamo ora l'altra implicazione. Supponiamo che $A \cdot B$ sia invertibile e dimostriamo che $A, B$ sono invertibili.
$$\begin{aligned} &(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I_n && \text{Dato che } A \cdot B \text{ è invertibile} \\ &A \cdot \left[B \cdot (A \cdot B)^{-1}\right] = I_n && \end{aligned}$$

e questo mi dice che il prodotto di $A$ per la matrice $B \cdot (A \cdot B)^{-1}$ è $I_n$, e quindi $A$ ha inversa destra, quindi è invertibile. Posso fare lo stesso ragionamento su $B$ ed ho quindi la tesi. $\square$

**Corollario 9.23.** `[EEE12]` *Abbiamo che $(\{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \exists\ A^{-1}\}, \cdot)$ è un gruppo rispetto al prodotto di matrici $\cdot$ con neutro $I_n$.*

*Dimostrazione.* L'insieme è chiuso rispetto al prodotto e soddisfa tutte le condizioni di gruppo. $\square$

**Osservazione 9.24.** `[EEE52]` *Ricordiamo che nell'anello delle matrici, per la presenza di zero divisori, non sempre vale la legge di cancellazione*
$$AB = AC \Rightarrow B = C$$
*Ma in ogni caso*
$$B = C \Rightarrow AB = AC$$

**Esercizio 9.25** (Proposto). `[EEE53]` *Dimostrare che la legge di cancellazione , con la notazione della precedente Osservazione 9.24 vale se $A$ è invertibile.*

## 9.3 Esercizi svolti

**Esercizio 9.26.** `[DDW22]` *Date*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*calcolare*

1. *Calcolare* $A \cdot B$, $(A + B) \cdot C$, $(3A + 2C) \cdot (A - C)$.
2. *Un inversa destra di* $A$. *Un inversa sinistra di* $A$. *Se esistono.*
3. *Un inversa destra di* $B$. *Un inversa sinistra di* $B$. *Se esistono.*
4. *Un inversa destra di* $C$. *Un inversa sinistra di* $C$. *Se esistono.*
5. *Risolvere le equazioni* $AX = C$, $XA = C$, $AX + BX + CX = 0$

**Esercizio 9.27.** `[DDD22]` *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*dire se* $A$ *è nilpotente.*

*Soluzione.* Svolgiamo i conti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $A^2 \neq 0$. Vediamo $A^3 = A \cdot A^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Quindi $A^3 = 0_3$ e $A$ è nilpotente. □

**Esercizio 9.28.** `[DDA24]` *Determinare una matrice* $X$ *in* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *tale che*

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

*Soluzione.* Procediamo con la forza bruta: costruiamo la matrice di incognite

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \qquad x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

e vediamo quando

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+zt & yz+t^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt-1 \\ xz+zt & yz+t^2+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{cases} x^2+yz=0 \\ xy+yt-1=0 \\ xz+zt=0 \\ yz+t^2+1=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il sistema è complesso, e a noi è richiesta solo una soluzione. Proviamo a dare dei valori opportuni ad una variabile per semplificare il sistema, sperando che il sistema semplificato abbia soluzioni. Poniamo $t=i$ l'ultima equazione che diviene $yz=0$. Scegliamo $z=0$. Il sistema diviene quindi

$$\begin{cases} x^2=0 \\ xy+yi-1=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ z=0 \\ t=i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ yi-1=0 \\ z=0 \\ t=i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{i}=-i \\ z=0 \\ t=i \end{cases}$$

Quindi una soluzione è

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

□

**Esercizio 9.29.** `[MM56]` *Data la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R})$$

*determinare, se esiste, l'inversa di A.*

*Soluzione.* Proviamo a calcolare l'inversa per forza bruta, visto il numero di zeri presenti in $A$. Stiamo quindi cercando una matrice incognita $X \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tale che

$$A \cdot X = I_4$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1\,1} & x_{1\,2} & x_{1\,3} & x_{1\,4} \\ x_{2\,1} & x_{2\,2} & x_{2\,3} & x_{2\,4} \\ x_{3\,1} & x_{3\,2} & x_{3\,3} & x_{3\,4} \\ x_{4\,1} & x_{4\,2} & x_{4\,3} & x_{4\,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_{1\,1} + x_{3\,1} - 1 & 3x_{1\,2} + x_{3\,2} & 3x_{1\,3} + x_{3\,3} & 3x_{1\,4} + x_{3\,4} \\ x_{1\,1} & x_{1\,2} - 1 & x_{1\,3} & x_{1\,4} \\ x_{2\,1} & x_{2\,2} & x_{2\,3} - 1 & x_{2\,4} \\ 2x_{3\,1} + x_{4\,1} & 2x_{3\,2} + x_{4\,2} & 2x_{3\,3} + x_{4\,3} & 2x_{3\,4} + x_{4\,4} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

ed otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3x_{1\,1} + x_{3\,1} = 1 \\ 3x_{1\,2} + x_{3\,2} = 0 \\ 3x_{1\,3} + x_{3\,3} = 0 \\ 3x_{1\,4} + x_{3\,4} = 0 \\ x_{1\,1} = 0 \\ x_{1\,2} = 1 \\ x_{1\,3} = 0 \\ x_{1\,4} = 0 \\ x_{2\,1} = 0 \\ x_{2\,2} = 0 \\ x_{2\,3} = 1 \\ x_{2\,4} = 0 \\ 2x_{3\,1} + x_{4\,1} = 0 \\ 2x_{3\,2} + x_{4\,2} = 0 \\ 2x_{3\,3} + x_{4\,3} = 0 \\ 2x_{3\,4} + x_{4\,4} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{1\,1} = 0 \\ x_{1\,2} = 1 \\ x_{1\,3} = 0 \\ x_{1\,4} = 0 \\ x_{2\,1} = 0 \\ x_{2\,2} = 0 \\ x_{2\,3} = 1 \\ x_{2\,4} = 0 \\ x_{3\,1} = 1 \\ x_{3\,2} = -3 \\ x_{3\,3} = 0 \\ x_{3\,4} = 0 \\ x_{4\,1} = -2 \\ x_{4\,2} = 6 \\ x_{4\,3} = 0 \\ x_{4\,4} = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Esercizio 9.30.** `[MM25]` *Calcolare, se esiste, l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

*Soluzione.* Procediamo col calcolo mediante l'aggiunta dell'identità. Costruiamo la matrice

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e riduciamola in forma diagonale mediante il procedimento di Gauss.

```
AI3:=Mat[[2,  3,  1, 1, 0, 0],
         [-1, 2,  2, 0, 1, 0],
         [6,  2, -2, 0, 0, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI3);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1, 1, 0, 0]
2^a+1/2*1^a    [0, 7/2, 5/2, 1/2, 1, 0]
3^a-3*1^a      [0, -7, -5, -3, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=7/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1, 1, 0, 0]
-------------- [0, 7/2, 5/2, 1/2, 1, 0]
3^a+2*2^a      [0, 0, 0, -2, 2, 1]
```

La terza riga della matrice incompleta è nulla quindi $A$ non è invertibile. □

## 9.4 Esercizi proposti

**Esercizio 9.31.** `[FFE01]` *Il vettore* $(1, 2, 3, 1, 3, 4, 4)$ *può essere combinazione lineare dei vettori* $(4, 2, 1, 0, 1, -4, , 4)$, $(3, 2, -1, 0, 3, 2, 1)$, $(6, 2, 4, 0, 3, 3, 4)$*?*

*Sol: No*

**Esercizio 9.32.** `[FFE02]` *Determinare delle relazioni lineari tra le righe della matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -11 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

*Sol:* $-2A_1 + A_2 + 3A_3 = 0$, $-5A_1 - 2A_2 + 3A_4 = 0$

**Esercizio 9.33.** `[FFE03]` *Determinare due colonne linearmente indipendenti tra quelle di*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -11 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

*e le relazioni di dipendenza lineare per le altre due.*

*Sol: Le ultime due colonne sono combinazione lineare delle prime due. Le relazioni sono* $-4A^1 + 3A^2 + 3A^4 = 0$, $-11A^1 + 9A^1 + 3A^3 = 0$

**Esercizio 9.34.** `[FFE04]` *Determinare combinazioni lineari di* $\underline{v}_1 = (1, 3)$, $\underline{v}_2 = (-1, 2)$ *che mi diano* $\underline{u}_3 = (1, 1)$, $\underline{u}_4 = (2, 5)$, $\underline{u}_5 = (0, 3)$.

*Sol:* $3/5\underline{v}_1 - 2/5\underline{v}_2 = \underline{u}_1$, $9/5\underline{v}_1 - 1/5\underline{v}_2 = \underline{u}_2$, $3/5\underline{v}_1 + 3/5\underline{v}_2 = \underline{u}_3$.

**Esercizio 9.35.** `[DDA21]` *Svolgere le seguenti moltiplicazioni di matrici*

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Soluzione} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Soluzione} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Soluzione} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Soluzione} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Soluzione} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

6.

**Esercizio 9.36.** `[DDA11]` *Dimostrare che il prodotto di matrici diagonali è ancora diagonale.*

**Esercizio 9.37.** `[DDA12]` *Dimostrare che tutte la matrici diagonali con gli elementi sulla diagonale non nulli hanno inversa e determinare tale inversa.*

**Esercizio 9.38.** `[DDA17]` *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Trovare se possibile una matrice non nulla $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = 0_2$*

*Soluzione.* Non è possibile. □

**Esercizio 9.39.** `[DDD17]` *Data*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

*Trovare se possibile due matrici diverse, non nulle $B_1, B_2 \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $A \cdot B_1 = 0_2 = A \cdot B_2$.*

*Soluzione.* Una possibile soluzione è

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

**Esercizio 9.40.** [DDD80] *Determinare* 302 *matrici radici quadrate di* $I_2$, *ovvero* 302 *matrici* $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tali che* $A^2 = I_n$.

**Esercizio 9.41.** [DDD18] *Trovare tutte le matrici in* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *nilpotenti. [Difficile]*

**Esercizio 9.42.** [DDD20] *Trovare due matrici in* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *nilpotenti con* $a_{11} = 0$

**Esercizio 9.43.** [DDX80] *Determinare* 302 *matrici radici quadrate di* $-I_2$, *ovvero* 302 *matrici* $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tali che* $A^2 = -I_n$.

*Soluzione.*
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \{1, 2, 3. \dots, 302\}$$
□

**Esercizio 9.44.** [DDD95] *Data*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
*Trovare se possibile una matrice non banale (non nulla, non l'identità)* $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tale che* $A \cdot B = B \cdot A$

*Soluzione.* $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ □

**Esercizio 9.45.** [DDD88] *Data*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
*Trovare tutte le matrici* $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ *tali che* $A \cdot B = B \cdot A$

*Soluzione.* $B = \begin{pmatrix} y+t & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{K}$ □

**Esercizio 9.46.** [DDD96] *Dimostrare che il prodotto di matrici quadrate triangolari superiori dello stesso ordine è ancora triangolare superiore. [Hint: usare l'induzione]*

**Esercizio 9.47.** [DDA96] *Una matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *diversa dalla matrice identica si dice idempotente di indice* $n$ *se esiste un intero* $n > 1$ *tale che* $A^n = I$.

1. *Determinare una matrice idempotente non banale in* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. *Determinare una matrice idempotente non banale in* $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
3. *Determinare una matrice idempotente non banale in* $\mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.
4. *Determinare tutte le matrici idempotenti di indice* 2 *in* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 9.48.** [EEA18] *Dimostrare che il prodotto di matrici triangolari superiori è triangolare superiore*

**Esercizio 9.49.** [EEQ18] *Calcolare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:*

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 27 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

*3.* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Esercizio 9.50.** `[EEW18]` *Risolvere la seguente equazione matriciale per l'incognita $X$*

$$X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.51.** `[EES18]` *Risolvere la seguente equazione matriciale per l'incognita $X$*

$$3X \cdot \left( 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.52.** `[EER21]` *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*Risolvere $(3X + A)(A + 2I) = 0$ per l'incognita $X$.*

**Esercizio 9.53.** `[EES19]` *determinare se possibile quattro matrici $X$ tali che*

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 9.54.** `[EES20]` *determinare se possibile quattro matrici $X$ tali che*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$