Capitolo 12

Dodicesima Lezione

Esempio 12.1. [LL35] *Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 2 \\ a & a+b & 2a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Dato che esiste un elemento numerico $2 \neq 0$ abbiamo che $rk\,A = 1$ oppure $rk\,A = 2$. Il rango è 1 se e solo se tutte le sottomatrici 2×2 i cui determinanti sono:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & a-1 \\ a & a+b \end{pmatrix} &= a(a+b) - a(a-1) \\ \det\begin{pmatrix} a & 2 \\ a & 2a \end{pmatrix} &= a \cdot 2a - 2a = 2a^2 - 2a \\ \det\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a+b & 2a \end{pmatrix} &= (a-1)2a - (a+b)2 \end{aligned}$$

hanno determinante nullo. Dato che in questo caso abbiamo solo 3 sottomatrici 2×2, possiamo provare ad uguagliare a zero i loro tre determinanti e a mettere a sistema. Si tratta di un sistema non lineare ma semplice da risolvere.

$$\begin{cases} a(a+b) - a(a-1) = 0 \\ a(a-1) = 0 \\ (a-1)2a - (a+b)2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(b+1) = 0 \\ \boxed{a(a-1) = 0} \\ 2a^2 - 4a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \boxed{a = 0} \\ 2b = 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} b+1 = 0 \\ \boxed{a = 1} \\ b+1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi due, $a = b = 0$ e $a = 1,\ b = -1$. Per queste due coppie di valori dei parametri a, b tutte le sottomatrici 2×2 hanno determinante nullo e quindi $rk\,A = 1$. Per tutti gli altri valori dei parametri, almeno una delle sottomatrici di ordine 2 ha determinante non nullo e quindi $rk\,A = 2$. □

12.1 Rango, Gauss e lineare indipendenza

Il rango ed il numero di righe e colonne linearmente indipendenti sono particolarmente semplici da determinare per una matrice a scala, e sono tutti uguali.

Proposizione 12.2. [FFQ11] *Sia $S \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala con esattamente r pivot, in posizione $(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)$. Allora*

1. *$rk(S) = r$.*
2. *Il numero di righe linearmente indipendenti è r, e sono le righe con i pivot..*
3. *Il numero di colonne linearmente indipendenti è r, e sono le colonne coi pivot.*

Dimostrazione. Immediata dalla struttura della matrice a scala e dalle definizioni. Le righe e le colonne indipendenti sono quelle coi pivot, e la sottomatrice non singolare di ordine massimo è quella che raggruppa le righe e le colonne dei pivot.

1. La sottomatrice $S_{(1,\dots,r);(j_1,\dots,j_r)}$, quadrata, di ordine r, è triangolare superiore, con r pivot per costruzione. È quindi non singolare. Ogni sottomatrice quadrata di ordine maggiore di r include righe nulle, e quindi è singolare. Quindi $rk(S) = r$.
2. Le righe non nulle di S sono $S_1, \dots, S_r$. Ciascuna, per esempio S_k, ha tutte le componenti nulle prima della componente del pivot j_k. Grazie a questa proprietà, il sistema omogeneo
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i S_{i_k} = \underline{0}$$
che ha r equazioni ed r incognite, è trangolare superiore con r pivot. Ha quindi un unica soluzione, quella nulla e le righe $S_1, \dots, S_r$ sono linearmente indipendenti.
3. La dimostrazione per le colonne è analoga a quella per le righe.

□

Esempio 12.3. [FFQ12] *Data la matrice*
$$S = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Le posizioni dei pivot sono $(1, 2), (2, 4), (3, 6)$. Si vede facilmente che le righe $1, 2, 3$ sono linearmente indipendenti, e non ce ne sono altre, le colonne $2, 4, 6$ sono linearmente indipendenti, e non ce ne sono altre. Dato che la matrice
$$S_{(1,2,3);(2,4,6)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$
è non singolare, ed ogni matrice quadrata di ordine maggione di 3 contiene forzatamente una riga nulla, e ha quindi determinante nullo, $rk(S) = 3$

Vogliamo ridurre il calcolo del rango di una matrice generica ad il calcolo del rango di una matrice a scala.

Proposizione 12.4. [FFW44] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e S la matrice ottenuta con uno scambio di riga o un passo di riduzione di Gauss $A_j \longrightarrow A_j + \lambda A_i$, ovvero $S_j = A_j + \lambda A_i$. Allora le righe di A sono linearmente indipendenti se e solo se le righe di S sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Ovvio per lo scambio di riga. Per il passo di riduzione

- "$\Rightarrow$": proviamo che se le righe di A sono linearmente indipendenti, le righe di S sono linearmente indipendenti. Dobbiamo dimostrare che $\sum_{k=1}^m \alpha_k S_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \alpha_k S_k &= \underline{0}\\
\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^m \alpha_k S_k + \alpha_i S_i + \alpha_j S_j &= \underline{0}\\
\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^m \alpha_k A_k + \alpha_i A_i + \alpha_j (A_j + \lambda A_i) &= \underline{0}\\
\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^m \alpha_k A_k + \alpha_j A_j + (\alpha_i + \alpha_j\lambda) A_i &= \underline{0}\\
\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^m \alpha_k A_k + (\alpha_i + \alpha_j\lambda) A_i &= \underline{0}
\end{aligned}$$

  Per la lineare indipendenza degli A_k, otteniamo che tutti i coefficenti di questa combinazione lineare sono nulli, quindi $\alpha_k = 0$ per $k \neq i$ e
$$\alpha_i + \alpha_j\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$
  e quindi $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e la tesi.

- "$\Leftarrow$": procedimento analogo, sfruttando sempre la relazione $S_j = A_j + \lambda A_i$.

□

Questa proposizione ha diversi utili corollari.

Corollario 12.5. [FFW66] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e S la sua riduzione a scala. Allora il numero di righe linearmente indipendenti di A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti di S.*

Proposizione 12.6. [FFQ66] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ed S una sua riduzione con p passi di Gauss senza scambi di riga che coinvolgano le righe di indice maggiore od uguale ad i. Allora S_i è combinazione lineare di $A_1, \dots, A_i$.*

Dimostrazione. Lasciato per esercizio. Hint: usare induzione sul numero di operazioni di Gauss che non siano scambi di riga. Vedere l'esempio sucessivo. □

Esempio 12.7. [FFS66] *Abbiamo la matrice A ed operiamo in ordine le seguenti operazioni di Gauss per arrivare ad S*

- $A_2 \to A_2 - 3A_1$.

- $A_3 \to A_3 - A_1$.
- $A_3 \to A_3 - 5A_2$.

Abbiamo

$$A_3 \to A_3 - A_1 \to A_3 - 5A_2 - A_1 \to A_3 - 5(A_2 - 3A_1) - A_1 = A_3 - 5A_2 + 14A_1 = S_3$$

Corollario 12.8. [FFE66] *Nelle ipotesi della proposizione precedente, se $S_i = \underline{0}$ allora le righe $A_1, \ldots, A_i$ sono linearmente dipendenti ed in particolare A_i è combinazione lineare di $A_1, \ldots, A_{i-1}$.*

Dimostrazione. Se $\underline{0} = S_i = \alpha_1 A_1 + +\alpha_i A_i$, le righe $A_1, \ldots, A_i$ sono linearmente dipendenti. In particolare, il coefficente di A_1 rimane 1 nel processo di riduzione. □

Corollario 12.9. [FFW48] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ed S una sua riduzione a scala senza scambi di riga che coinvolgano le righe di indice maggiore od uguale ad i. Allora A_i è linearmente dipendente dalle righe precedenti se e solo se S_i è nulla.*

Possiamo determinare anche *quali* righe/colonne di A sono linearmente indipendenti considerando una riduzione a scala di A.

Proposizione 12.10. [FFQ03] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala senza scambi di colonne. Se le posizioni dei pivot di S sono $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ le righe di indice $i_1, \ldots, i_k$ (considerando gli scambi di riga) e le colonne di indice $j_1, \ldots, j_k$ di A sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Per le righe, dal Corollario 12.9, una riga di A è lineramente indipendente dalle precedenti (considerato gli scambi di riga) se e solo se ha un pivot.

Per le colonne: dimostriamo che le colonne $A^{i_1}, \ldots, A^{i_k}$ sono linearmente indipendenti, ovvero che il sistema lineare

$$\alpha_1 A^{i_1} + \ldots + \alpha_k A^{i_k} = \underline{0}$$

ammette solo la soluzione $\underline{\alpha} = \underline{0}$. Possiamo applicare a questo sistema la stessa riduzione di Gauss che ha trasformato A in S, ottenendo il sistema equivalente

$$\alpha_1 S^{i_1} + \ldots + \alpha_k S^{i_k} = \underline{0}$$

Ma $S^{i_1}, \ldots, S^{i_k}$ sono linearmente indipendenti, e quindi $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e anche $A^{i_1}, \ldots, A^{i_k}$ lo sono.

□

Servirà la seguente proposizione sulle realazioni tra sottomatrici non singolari e righe/colonne linearmente indipendenti.

Proposizione 12.11. [FFW32] *Sia data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$*

1. *Se A ha r righe linearmente indipendenti $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ esistono r colonne $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ tali che la sottomatrice $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ sia non singolare.*
2. *Se A ha r colonne linearmente indipendenti $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ esistono esistono r righe $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ tali che la sottomatrice $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ sia non singolare.*
3. *Se A ha una sottomatrice quadrata $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ non singolare, le righe $A_{i_1}, \ldots, Ai_r$ e le colonne $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ di A sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione.

1. Applichiamo la Proposizione 12.10 alla sottomatrice $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$.

2. Dalla Proposizione 12.10 considerando la trasposta di A..

3. Abbiamo la sottomatrice $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ non singolare. Vogliamo provare che le righe $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ della matrice A sono linearmente indipendenti, ovvero che

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k A_{i_k} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$$

Per ogni riga A_{i_k} consideriamo la riga A'_{i_k} della sottomatrice. Abbiamo dalla relazione precedente

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k A'_{i_k} = \underline{0}$$

dato che l'uguaglianza a zero di un vettore è data dall'uguaglianza a zero di tutte le sue componenti.Le righe della sottomatrice sono linearmente indipendenti per ipotesi, quindi $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e quindi anche le righe di A sono linearmente indipendenti. Possiamo procedere analogamente per le colonne.

□

Possiamo infine enunciare il

Teorema 12.12. `[FFX11]`*[Del rango] Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala. Allora i numeri seguenti sono uguali*

1. *il numero di righe linearmente indipendenti di A, S*
2. *il numero di colonne linearmente indipendenti di A, S.*
3. *$rk(A)$ e $rk(S)$*
4. *Il numero di pivot di S*

Dimostrazione.

$$\begin{array}{rcl} rk(A) & \overset{\boxed{12.11}}{=} & \#\text{righe l.indip. di } A \\ \#\text{righe l.indip. di } A & \overset{\boxed{12.4}}{=} & \#\text{righe l.indip. di } S \\ \#\text{righe l.indip. di } S & \overset{\boxed{12.2}}{=} & \#\text{colonne l.indip. di } S \\ \#\text{colonne l.indip. di } S & \overset{\boxed{12.10}}{\leq} & \#\text{colonne l.indip. di } A \\ \#\text{colonne l.indip. di } A & \overset{\boxed{12.11}}{=} & rk(A) \end{array}$$

E concludiamo dato che

$$rk(S) = \#\text{colonne l.indip. di } S = \#\text{righe l.indip. di } S = rk(A)$$

□

Ricapitolando

Corollario 12.13. `[FFQ89]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala senza scambi di riga o di colonna. Se le posizioni dei pivot di S sono $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$ il rango di A è r e le colonne di A di indice $j_1, \ldots, j_r$ e le righe di A di indice $i_1, \ldots, i_r$ sono linearmente indipendenti. Se effettuo scambi di riga o di colonna, devo ricordarmene quando determino le righe o le colonne linearmente indipendenti.*

Ho due utili strumenti per discutere dell'indipendenza lineare in un insieme di vettori.

Osservazione 12.14. `[FFW55]` *Posso discutere l'indipendenza lineare dei vettori $v_1, \ldots, \underline{v}_m$ di $\mathbb{K}^n$ considerando le sottomatrici non singolari nella matrice per righe $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m]$*

Osservazione 12.15. `[FFW27]` *Siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in \mathbb{K}^n$. Posso vedere quali vettori sono linearmente indipendenti riducendo la matrice per righe $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m]$. Le righe che non si sono ridotte a zero mi danno i vettori indipendenti, tenendo conto di eventuali scambi di righe.*

Osservazione 12.16. `[FFQ09]` *Notiamo che data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ed una sua sottomatrice quadrata $A_{(i_1,\ldots,i_s);(j_1,\ldots,j_s)}$, può succedere che $A_{(i_1,\ldots,i_s);(j_1,\ldots,j_s)}$ sia singolare ma le righe $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ e le colonne $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ siano linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Basta prendere la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice

$$A_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è singolare ma le righe A_1, A_2 e le colonne A^1, A^2 sono linearmente indipendenti. □

Esempio 12.17. `[FFQ82]` *I vettori $(1, 2, 3, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti? Si, dato che la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha sottomatrice

$$A_{(1,2,3);(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante $2 \neq 0$.

Esempio 12.18. `[FFQ23]` *I vettori $(1, 2, 3, 1, 4), (4, 2, 5, 2, 2), (5, -2, 1, 1, -8)$ non sono linearmente indipendenti, dato che che la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

ha tutte le sottomatrici 3×3 singolari. (Fare i conti per esercizio, ci sono 10 sottomatrici 3×3). Che i tre vettori siano linearmente dipendenti si può vedere anche notando che

$$-3(1, 2, 3, 1, 4) + 2(4, 2, 5, 2, 2) = (5, -2, 1, 1, -8)$$

In questo caso è molto più efficace usare la riduzione di Gauss

Esempio 12.19. [FFQ77] *I vettori* $(1,2,3,1,4),(4,2,5,2,2),(5,-2,1,1,-8)$ *non sono linearmente indipendenti,*

```
A:=Mat([[1,2,3,1,4],
        [4,2,5,2,2],
        [5, -2, 1, 1, -8]]);
RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 4]
     2^a-4*1^a [0, -6, -7, -2, -14]
     3^a-5*1^a [0, -12, -14, -4, -28]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-6
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 4]
-------------- [0, -6, -7, -2, -14]
     3^a-2*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
```

La prima e seconda riga sono linearmente indipendenti. La prima, seconda e terza riga sono linearmente dipendenti.

12.1.1 Calcolo del rango con la definizione - semplificazioni

Un primo passo è la seguente

Proposizione 12.20. [FFF30] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *tale che*

1. *Esiste una sottomatrice quadrata di ordine* r *di* A *non singolare.*
2. *Tutte le sottomatrici quadrate di ordine* $r+1$ *di* A *sono singolari.*

Allora $rk(A) = r$.

Idea della dimostrazione. Le sottomatrici di ordine $r+1$ sono singolari per ipotesi. Sia S una sottomatrice di ordine s, $s > r+1$. Vogliamo dimostrare che $\det(S) = 0$. Sviluppando il determinante di S con Laplace abbiamo una combinazione lineare di determinanti di matrici di ordine $s-1$, i cui determinanti, sempre sviluppando con Laplace, sono combinazioni lineari di determinanti di sottomatrici di ordine via via minore, $s-2,\ldots,r+1$. Quando arriviamo alle sottomatrici di ordine $r+1$, queste sono tutte singolari, e quindi il determinante di S è zero. □

Teorema 12.21 (Orlati)**.** [FFF43] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ *una sua sottomatrice non singolare di ordine* r. *Allora* $rk(A) = r$ *se e solo se tutte le sottomatrici*

$$A_{(i_1,\ldots,i_r,i_{r+1});(j_1,\ldots,j_r,j_{r+1})}$$

sono singolari.

Si tratta delle sottomatrici quadrate ottenute "orlando" $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ con una riga ed una colonna.

Dimostrazione.

- Se $rk(A) = r$ allora per definizione tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ sono singolari, comprese le matrici ottenute orlando $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$.

- Abbiamo che tutte le sottomatrici ottenute orlando $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ sono singolari. Vogliamo dimostrare che $rk(A) = r$. Per la Proposizione 12.20, basta dimostrare che tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ sono singolari.

  Vogliamo dimostrare che ogni sottomatrice quadrata $A_{(i'_1,\ldots,i'_{r+1});(j'_1,\ldots,j'_{r+1})}$ di ordine $r+1$ è singolare.

  Cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\beta_1 A_{i'_1} + \cdots + \beta_{r+1} A_{i'_{r+1}} = \underline{0}$$

  Claim: Ogni riga di $A_{(i'_1,\ldots,i'_{r+1});(j'_1,\ldots,j'_{r+1})}$ è combinazione lineare delle righe $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$

  Quindi

$$\begin{array}{rcl} A_{i'_1} & = & \alpha_{11} A_{i_1} + \cdots + \alpha_{1r} A_{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i'_{r+1}} & = & \alpha_{r+11} A_{i_1} + \cdots + \alpha_{r+1r} A_{i_r} \end{array}$$

  con parametri $\underline{\alpha}$. Sostituendo ogni $A_{i'_j}$ con la sua rappresentazione mediante $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ otteniamo il sistema

$$\beta_1(\alpha_{11} A_{i_1} + \cdots + \alpha_{1r} A_{i_r}) + \cdots + \beta_{r+1}(\alpha_{r+11} A_{i_1} + \cdots + \alpha_{r+1r} A_{i_r}) \quad = \quad \underline{0}$$

  e raggruppando le righe otteniamo

$$(\beta_1 \alpha_{11} + \cdots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,1}) A_{i_1} + \cdots + (\beta_1 \alpha_{1r} + \cdots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,r}) A_{i_r} \quad = \quad \underline{0}$$

  Dato che $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} (\beta_1 \alpha_{11} + \cdots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,1}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ (\beta_1 \alpha_{1r} + \cdots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,r}) & = & 0 \end{array}$$

  e questo è un sistema omogeneo con r incognite $\beta_1, \ldots, \beta_{r+1}$ ed r equazioni, che quindi ha infinite soluzioni, e non solo $\underline{\beta} = \underline{0}$.

  Dimostrazione del Claim: Ogni riga di $A_{(i'_1,\ldots,i'_{r+1});(j'_1,\ldots,j'_{r+1})}$ è combinazione lineare delle righe $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$

  Prendiamo una riga di indice i con $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$, una colonna di indice $j \in \{j_1, \ldots, j_r\}$ ed orliamo la matrice $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ con esse , ottenendo la matrice quadrata $A_{(i_1,\ldots,i_r,i);(j_1,\ldots,j_r,j)}$. Questa matrice è ottenuta orlando $A_{(i_1,\ldots,i_r);(j_1,\ldots,j_r)}$ e quindi è singolare.

  La riga A_i è quindi combinazione lineare delle righe $i_1, \ldots, i_r$. Abbiamo dimostrato che ogni riga di A è combinazione lineare delle righe $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$

□

Corollario 12.22. [FFW41] *Dalla dimostrazione del teorema precedente segue che se i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s$ sono combinazione lineare dei vettori linearmente indipendenti $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_t$, e $s > t$, non è possibile che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s$ siano linearmente indipendenti.*

Esempio 12.23. `[FFF41]` *Determiniamo il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & 2 & 2i \\ 3 & -10 & -5 & i \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 3 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{C})$$

Notiamo che la sottomatrice

$$A_{(1,3);(1,2)} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

è non singolare. Quindi $2 \leq rk(A) \leq 3$. *Dato che le matrici*

$$A_{(1,3,2);(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & 2 \\ 3 & -10 & -5 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{(1,3,2);(1,2,4)} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & 2i \\ 3 & -10 & i \\ \boxed{1} & \boxed{4} & i \end{pmatrix}$$

sono singolari, come si vede calcolandone il determinante, per il teorema degli orlati $rk(A) = 2$.

Infatti

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & 2 \\ 3 & -10 & -5 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & 2i \\ 3 & -10 & i \\ \boxed{1} & \boxed{4} & i \end{pmatrix} = 0$$

12.2 Il teorema di Rouchè-Capelli

Teorema 12.24 (Rouchè-Capelli)**.** `[FFF39]` *Dato il sistema* $A\underline{x} = \underline{b}$, *con* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *abbiamo che*

1. *Se* $rk([A|\underline{b}]) \neq rk(A)$ *il sistema non ha soluzioni.*
2. *Se* $rk([A|\underline{b}]) = rk(A)$ *il sistema ha* $\infty^{n-rk(A)}$ *soluzioni.*

Dimostrazione. La dimostrazione viene rimandata a quando avremo a disposizione la teoria degli spazi vettoriali. □

Osservazione 12.25. `[FFQ5]` *La notazione* ∞^m *vuol dire che il numero minimo di parametri necessari per descrivere le soluzioni del sistema è* m, *è solo una notazione e non ha un significato analitico. Sempre per notazione* ∞^0 *vuol dire che la soluzione è unica.*

Corollario 12.26. `[FFF65]` *Nelle ipotesi del teorema di Rouchè-Capelli, il sistema* $A\underline{x} = \underline{b}$ *ha soluzione unica se e solo se* $rk([A|\underline{b}]) = rk(A) = n$

12.3 Righe/colonne - combinazione lineare

Problema 12.27. `[FFF03]` *Come faccio a trovare una relazione lineare esplicita di dipendenza lineare tra le colonne o righe della matrice A? Se la combinazione esiste (i coefficienti non sono tutti nulli) le colonne/righe sono linearmente dipendenti.*

Richiamo 12.28. [FFF00] *Siano dati* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{K}^n$. *È immediato che i vettori* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ *sono linearmente dipendenti se e solo se uno è esprimibile come combinazione lineare degli altri. Quindi* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ *sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di loro è esprimibile come combinazione lineare degli altri.*

Esempio 12.29. [FFF05] *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *ha determinante nullo (facile verifica, ma lo vederemo nel prosieguo) e le sue righe sono quindi linearmente dipendenti. Vogliamo determinare i coefficienti* α, β, γ *di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficenti che danno una loro combinazione lineare nulla).*

Procediamo esattamente come sopra solo non per le colonne ma per le righe

$$\underline{u}_1 = (1,1,1) \quad \underline{u}_2 = (1,2,3) \quad \underline{u}_3 = (4,5,6)$$

Per definizione di dipendenza lineare, cerchiamo una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo

$$\begin{aligned} \alpha\underline{u}_1 + \beta\underline{u}_2 + \gamma\underline{u}_3 = \underline{0} &\Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(4,5,6) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 6\gamma \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \underline{0} \end{aligned}$$

Notiamo che la matrice associata è A^T, *e troviamo facilmente una soluzione con Gauss*

```
M:=Mat([[1, 1, 4],
        [1, 2, 5],
        [1, 3, 6]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 4]
     2^a-1*1^a [0, 1, 1]
     3^a-1*1^a [0, 2, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 4]
-------------- [0, 1, 1]
     3^a-2*2^a [0, 0, 0]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 4]
-------------- [0, 1, 1]
-------------- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2  pivot
```

```
   1^a-1*2^a  [1, 0, 3]
--------------[0, 1, 1]
--------------[0, 0, 0]
```

Dato che c'è una riga nulla, il determinante della matrice è nullo. Dato che si tratta della trasposta di A, è nullo anche il determinante di A. Abbiamo che le soluzioni del sistema sono $\alpha = -3\gamma$, $\beta = -\gamma$, *o se preferiamo* $\{(-3\gamma, -\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. *Le relazioni di dipendenza lineare tra* $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ *sono date da*

$$-3\gamma\underline{u}_1 - \gamma\underline{u}_2 + \gamma\underline{u}_3 = 0 \qquad \gamma \neq 0$$

ed essenzialmente da

$$-3\underline{u}_1 - \underline{u}_2 + \underline{u}_3 = 0$$

Dato che tutti i coefficienti della relazione sono non nulli, possiamo esplicitare ogni vettore in funzione degli altri due.

$$\begin{array}{rcl} \underline{u}_1 & = & -\frac{1}{3}\underline{u}_2 + \frac{1}{3}\underline{u}_3 \\ \underline{u}_2 & = & -3\underline{u}_1 + \underline{u}_3 \\ \underline{u}_3 & = & 3\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \end{array}$$

Proposizione 12.30 (Tag variable Gauss). `[FFF11]` *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *una matrice di righe* $A_1, \ldots, A_m$, $v_1, \ldots, v_m$ *variabili, B la matrice*

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \underline{w}_1 & p_1(v_1, \ldots, v_m) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{w}_m & p_m(v_1, \ldots, v_m) \end{array}\right)$$

con $p_i(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{K}[v_1, \ldots, v_m]$ *omogeneo di grado 1 tale che per ogni* $i : 1, \ldots, m$

$$B_i = (\underline{w}_i, p_1(v_1, \ldots, v_m)) \text{ e } p_i(A_1, \ldots, A_m) = \underline{w}_i \in \mathbb{K}^n$$

ed S ottenuta da B con uno scambio di riga o un operazione $S_j = B_j + \lambda B_i$

Allora ogni riga S_i *di S,* $i : 1, \ldots, m$, *si può scrivere nella forma*

$$S_i = (\underline{w}'_i, p'_i(v_1, \ldots, v_m)) \tag{12.1}$$

con $p'_i(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{K}[v_1, \ldots, v_m]$ *omogeneo di grado 1 tale che*

$$p'_i(A_1, \ldots, A_m) = w'_i \in \mathbb{K}^n \tag{12.2}$$

Dimostrazione. La prima e seconda proprietà, 12.1,12.2 sono ovvie per uno scambio di righe.

Dopo un passo di riduzione $S_j = B_j + \lambda B_i$: sia la prima che la seconda proprietà valgono per tutte le righe diverse dalla riga j-esima, S_j che rimangono invariate.

Dimostriamo che continuano a valere per la riga S_j: abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} S_j & = & B_j + \lambda B_i \\ & = & (\underline{w}_j, p_j(v_1, \ldots, v_m)) + \lambda(\underline{w}_i, p_i(v_1, \ldots, v_m)) \\ & = & (\underline{w}_j + \lambda\underline{w}_i, p_j(v_1, \ldots, v_m) + \lambda p_i(v_1, \ldots, v_m)) \end{array}$$

e sostituendo le A_s alle v_s

$$= (\underline{w}_j + \lambda\underline{w}_i, p_j(A_1, \ldots, A_m) + \lambda p_i(A_1, \ldots, A_m))$$

Ma per ipotesi ho $p_j(A_1,\dots,A_m) = \underline{w}_j$ e $p_i(A_1,\dots,A_m) = \underline{w}_i$ quindi

$$p_j(A_1,\dots,A_m) + \lambda p_i(A_1,\dots,A_m) = \underline{w}_j + \lambda \underline{w}_i$$

Abbiamo quindi che $p'_j(v_1,\dots,v_m) = p_j(v_1,\dots,v_m) + \lambda p_i(v_1,\dots,v_m)$, che è un polinomio omogeno di grado 1 perchè lo sono $p_i(v_1,\dots,v_m)$ e $p_j(v_1,\dots,v_m)$ ha la proprietà cercata ($p'_j(A_1,\dots,A_m) = \underline{w}'_j$). Infatti

$$\underline{w}'_j = \underline{w}_j + \lambda \underline{w}_i = p_j(A_1,\dots,A_m) + \lambda p_i(A_1,\dots,A_m) = p'_j(A_1,\dots,A_m)$$

e questo coinclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 12.31. [FFQ21] *Dato che abbiamo dimostrato questa proprietà per un passo di riduzione di Gauss (scambio riga o riduzione), e che vale per il caso iniziale*

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_m & v_m \end{array}\right)$$

(è un caso particolare della dimostrazione precedente), la tesi vale per S risultato di una riduzione a scala di B come sopra, ovvero se B si riduce ad S a scala.

Esempio 12.32. [FFX20] *Determinare le relazioni lineari tra i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1,2,3,2), \underline{v}_2 = (1,1,0,3), \underline{v}_3 = (3,4,3,8), \underline{v}_4 = (-1,1,6,-5),$$

Mettiamo i vettori per riga in una matrice, aggiungiamo una colonna di variabili tag e riduciamo.

```
Use R::=Q[v[1..4]];
M:=Mat([[ 1, 2, 3, 2,v[1]],
        [ 1, 1, 0, 3,v[2]],
        [ 3, 4, 3, 8,v[3]],
        [-1, 1, 6,-5,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, v[1]]
     2^a-1*1^a [0, -1, -3, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a-3*1^a [0, -2, -6, 2, -3v[1] + v[3]]
     4^a+1*1^a [0, 3, 9, -3, v[1] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, v[1]]
-------------- [0, -1, -3, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a-2*2^a [0, 0, 0, 0, -v[1] - 2v[2] + v[3]]
     4^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[4]]
```

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, gli altri due sono combinazioni lineari dei primi due e si esplicitano dalle relazioni lineari trovate

$$\begin{array}{rcl} -v[1] - 2v[2] + v[3] = 0 & \Rightarrow & v[3] = v[1] + 2v[2] \\ -2v[1] + 3v[2] + v[4] = 0 & \Rightarrow & v[4] = 2v[1] - 3v[2] \end{array}$$

12.4 Esercizi svolti

Esercizio 12.33. [FFF50] *Sia data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare il suo rango r e un insieme di r righe linearmente indipendenti. Dato che

$$A_{(1,4);(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare la prima e quarta riga sono linearmente indipendenti. La prima e terza colonna sono linearmente indipendenti. Avremmo potuto scegliere altre sottomatrici 2×2 non singolari, per esempio $A_{(1,2);(4,5)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dato che

$$A_{(2,3,4);(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, la seconda, terza e quarta riga sono linearmente indipendenti. La prima, seconda e terza colonna sono linearmente indipendenti.

Sappiamo che $3 \leq rk(A) \leq 4$. Determiniamo il rango attarverso una riduzione di Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1,4,0],
        [1,2,1,0,1],
        [0,1,1,2,0],
        [0,0,1,1,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 0]
     2^a-1*1^a [0, 1, 0, -4, 1]
  0 sotto pivot[0, 1, 1, 2, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, 1, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 0]
-------------- [0, 1, 0, -4, 1]
     3^a-1*2^a [0, 0, 1, 6, -1]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, 1, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 0]
-------------- [0, 1, 0, -4, 1]
-------------- [0, 0, 1, 6, -1]
     4^a-1*3^a [0, 0, 0, -5, 3]
```

Quindi $rkA = 4$; le righe e le prime quattro colonne sono linearmente indipendenti.

Esercizio 12.34. `[JJ37]` *Al variare di $x, y, z \in \mathbb{R}$ determinare il rango della matrice*

$$M := \begin{pmatrix} x & y & -1 & z \\ 1 & z & x-2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Dato che esiste un entrata della matrice diversa da zero, la matrice ha rango 1 o 2. Per avere rango 1 bisogna che tutti i 6 minori 2×2 di M siano singolari. Calcoliamo questi determinanti e mettiamo a sistema

$$\begin{cases} \det A_{(1,2);(1,2)} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = xz - y = 0 \\ \\ \det A_{(1,2);(1,3)} = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1 = 0 \\ \\ \det A_{(1,2);(1,4)} = \det \begin{pmatrix} x & z \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3x - z = 0 \\ \\ \det A_{(1,2);(2,3)} = \det \begin{pmatrix} y & -1 \\ z & x-2 \end{pmatrix} = y(x-2) + z = 0 \\ \\ \det A_{(1,2);(2,4)} = \det \begin{pmatrix} y & z \\ z & 3 \end{pmatrix} = 3y - z^2 = 0 \\ \\ \det A_{(1,2);(3,4)} = \det \begin{pmatrix} -1 & z \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} = -z(x-2) - 3 = 0 \\ \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $x = 1$, sostituiamo nel sistema

$$\begin{cases} z - y = 0 \\ 0 = 0 \\ 3 - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 3y - z^2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

ed otteniamo $z = y = 3$ che è soluzione a tutte le equazioni del sistema.

Quindi il rango di M è 1 se $x = 1$, $y = z = 3$, mentre il rango di M è 2 altrimenti.

□

Esercizio 12.35. `[LL04]` *Calcolare il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 10}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Consideriamo la sottomatrice quadrata 3×3 scegliendo la seconda, terza, quarta colonna e calcoliamone il determinante con lo sviluppo Laplace:

$$\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 6 & -1 & 0\end{pmatrix} = (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix} = 1\cdot(-2-6) = -8 \neq 0$$

quindi $rk\,A = 3$.

Notiamo che per esempio, scegliendo altre colonne e calcolandone il determinante:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 = 0$$

Questo non vuole dire nulla perchè il rango sia ≥ 3 basta che esista **una** sottomatrice con determinante non nullo di dimensione 3. Le altre possono avere determinante nullo o no, non importa. □

Esercizio 12.36. `[LL03]` *Calcolare il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2\\ 2 & 6 & -1 & 0 & 4 & 6\\ 1 & -2 & -3 & 0 & 7 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Soluzione. La matrice A è una matrice 4×6 pertanto abbiamo che $rk\,A \leq 4$. Consideriamo la sottomatrice

$$A_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

che ha determinante 2 quindi $rk\,A \geq 2$.

Si può verificare con un certo lavoro che tutte le sottomatrici di ordine 4 (che sono, per chi abbia fatto un pò di combinatorica, $\binom{4}{4}\cdot\binom{6}{4} = 1\cdot 6 = 6$) e tutte le sottomatrici di ordine 3 che sono $\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{3} = 4\cdot 20 = 80$ hanno determinante nullo. Ma sarebbe veramente un lavoro di calcolo enorme. Pertanto scegliamo di calcolare il rango con la riduzione a scala dato che il rango della matrice non cambia per operazioni di Gauss.

```
M:=Mat([[1,2,-1,0,3,2],
--------[0,2,1,0,-2,2],
--------[2,6,-1,0,4,6],
--------[1,-2,-3,0,7,-2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
--------------  [1, 2, -1, 0, 3, 2]
0 sotto pivot   [0, 2, 1, 0, -2, 2]
3^a-2*1^a ------[0, 2, 1, 0, -2, 2]
4^a-1*1^a ------[0, -4, -2, 0, 4, -4]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------  [1, 2, -1, 0, 3, 2]
--------------  [0, 2, 1, 0, -2, 2]
3^a-1*2^a ------[0, 0, 0, 0, 0, 0]
4^a+2*2^a ------[0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

La matrice ridotta con Gauss ha due righe nulle quindi rango $4-2=2$.

N.B. Tutte le sottomatrici 3×3 o 4×4 sono singolari dato che includono necessariamente almeno una riga nulla. □

12.5 Esercizi proposti

Dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 12.37. [EEE76] *[Riga/colonna somma di altre] Se* $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$*,*

$$\det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{v} + \underline{w}}_{i}, \dots, A_n)) = \det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{v}}_{i}, \dots A_n)) + \det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{w}}_{i}, \dots, A_n))$$

Esercizio 12.38. [GG25] *Al variare dei parametri* $a, b \in \mathbb{R}$ *calcolare il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 9 \\ a & b & b & 2 & -1 \\ a & b & b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: il rango della matrice se $ab \neq 0$ è 3 e se $ab = 0$ è 2. □

Esercizio 12.39. [GG06] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ x + y + z + t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \\ 3x + y + 5z + 7t + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema.

Soluzione. Esistono ∞^1 soluzioni. □

Esercizio 12.40. [GG07] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + 3z + 4t + v - 4 = 0 \\ 2x + y + 3z + u + v - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 9z + 4t + u - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t + u = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema e determinarne le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni. □

Esercizio 12.41. [GG80] *Dati* $a, b \in \mathbb{R}$ *ed il sistema*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} -x + 2z + a + b = 0 \\ x - y - z - a + 2 = 0 \\ x + y + z + a - 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni al variare di a, b*.*

Soluzione. Esiste un unica soluzione. □

Esercizio 12.42. [GG81] *Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2xk + 2yk + 2y + 2zk + 4z + 2k + 4 = 0 \\ xk + yk + y + zk + 2z + k + 2 = 0 \\ xk - zk + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k.

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema è impossibile; Se $k = -1$ ci sono ∞^2 soluzioni; Se $k \neq 0, -1$, ∞^1 soluzioni. □

Esercizio 12.43. [GGW81] *Al variare di $a, b, k \in \mathbb{R}$ determinare il rango delle matrici*

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol:}4$$

2.

*Sol:*4

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2a-1 & -a+1 & -a+7 & 12 & -2a+12 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol:}4$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol:}4$$

Esercizio 12.44. [GGW82] *Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare quattro colonne linearmente indipendenti nella matrice*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ a^2 & 0 & 2 & b & 3a-2b \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.45. [GGT83] *Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare due righe linearmente indipendenti nella matrice*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & (a+b)^2 & 3 \\ a-b & b & a^2 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 & a^2+1 & b \\ -3 & \pi & 6 & 12 & \sqrt{5} \\ a^2 & 0 & a+b & b & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.46. [GGW83] *È possibile trovare una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{K})$ che abbia rango tre se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e rango due se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?*

Esercizio 12.47. [GGW84] *È possibile trovare una matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{K})$ *con parametro* $a \in \mathbb{K}$ *che sia sempre non singolare se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ma possa essere singolare se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*?*

Esercizio 12.48. [GGW85] *È possibile trovare una matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{K})$ *con parametro* $a \in \mathbb{K}$ *che sia sempre singolare se* $a \in \mathbb{R}$ *ma possa essere non singolare se* $a \in \mathbb{C}$*?*

Esercizio 12.49. [GGW86] *È possibile trovare un sistema lineare* $A\underline{x} = \underline{b}$*, con* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$*,* $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ *che abbia soluzione unica se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ma non se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*?*