Capitolo 10

Decima lezione - Determinante

10.1 Determinante

Vediamo cosa si può dire sulle matrici 2×2:

Esempio 10.1 (Matrici 2×2). [EEE05] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$*; vogliamo trovare tutte le matrici* $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ *tali che*

$$A \cdot X = I_2$$

Determiniamo l'inversa destra risolvendo il sistema $A \cdot X = I_2$

```
Use R::=Q[x,y,z,t,a,b,c,d];
M:=Mat([[a,b,1,0],
        [c,d,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
FACCIO A PARTE IL CASO a=0
POSSO SUPPORRE a<>0

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a,            b,    1, 0]
   2^a-c/a*1^a [0, (-bc + ad)/a, -c/a, 1]

CASO a<>0, bc - ad=0 TRATTO IL CASO A PARTE
POSSO SUPPORRE bc - ad<>0
Scala2DiagonaleVerbose(L);
     1^a*+1/a     [1, b/a,         1/a,            0]
2^a*-a/(bc - ad)  [0,   1, c/(bc - ad), -a/(bc - ad)]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot
 1^a-b/a*2^a   [1, 0, -d/(bc - ad), b/(bc - ad)]
-------------- [0, 1,  c/(bc - ad), -a/(bc - ad)]

CASO a=0
```

```
M:=Mat([[0,b,1,0],
        [c,d,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [c, d, 0, 1],
     [0, b, 1, 0]]

DEVO AVERE c<>0. SE a=0, c=0 TRATTO IL CASO A PARTE

DEVO AVERE b<>0. SE a=0, c<>0, b=0 TRATTO IL CASO A PARTE

PROSEGUO CON a=0, c<>0, b<>0

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*+1/c  [1, d/c, 0, 1/c]
     2^a*+1/b  [0, 1, 1/b, 0]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

 1^a-d/c*2^a   [1, 0, -d/(bc), 1/c]
-------------- [0, 1, 1/b, 0]
```

Esaminiamo i cinque casi

- $a \neq 0, bc - ad \neq 0$. *Soluzione*

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-d}{bc-ad} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ soluzione unica}$$

- $a \neq 0, bc - ad = 0$. *Il sistema diviene*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & -c/a & 1 \end{array}\right)$$

che è impossibile. Si vede facilmente dalla seconda riga, che con la seconda colonna dei termini noti mi dà $0z + 0t = 1$.

- $a = 0$, $b, c \neq 0$. *Il sistema diviene (usiamo la forma triangolare superiore)*

$$\begin{pmatrix} \frac{-d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{bc-ad} & \frac{b}{bc-ad} \\ \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix}_{a=0} = \left(\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)_{|a=0}$$

soluzione unica, e quindi questo caso è compreso nel primo, si tratta di uno di quei casi in cui le condizioni vengono dal processo di riduzione, non sono intrinseci.

- $a = 0, c = 0$. *Il sistema diviene*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} bz = 1 \\ bt = 0 \\ dz = 0 \\ dt = 1 \end{cases}$$

Dalla prima e quarta equazione, $z, d \neq 0$. Dalla terza $dz = 0$. Assurdo, il sistema è impossibile.

e

- $a = 0, c \neq 0, b = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La prima riga ci dice che il sistema è impossibile.

Possiamo quindi ricapitolare

- *Se $ad - bc \neq 0$ l'inversa destra, e quindi l'inversa, di A, esiste e precisamente $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*
- *Altrimenti, ovvero se $ad - bc = 0$ la matrice A non ha inversa destra, e quindi non è invertibile.*

Esempio 10.2. `[EEE50]` *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $ad - bc = 1 - 2 = -1$ e quindi la matrice è invertibile. Usiamo la formula

$$\frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 10.3. `[EEE51]` *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $ad - bc = 2 - 2 = 0$ e quindi la matrice non è invertibile.

Definizione 10.4. `[EEE60]` *Data una matrice quadrata $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ e due interi i, j tali che $1 \leq i, j \leq n$, definiamo* minore (i, j) di A, *e scriviamo $A_{i,j}$ la matrice appartenente a $\mathrm{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ ottenuta dalla cancellazione della i-esima riga e della j-eseima colonna di A.*

Esempio 10.5. `[EEE61]` *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ allora } A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Usiamo la solita convenzione per cui le righe della matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono indicate come $A_1, \ldots, A_n$ e le colonne come $A^1, \ldots, A^n$.

Teorema 10.6 (Determinante)**.** `[EEE64]` *Esiste un unica applicazione*

$$\det\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

tale che date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$

1. *Se* $A = (a_{11}) \in \mathrm{Mat}_{1\times 1}(\mathbb{K})$*,* $\det(A) = a_{11}$*.*

2. *Sviluppo di Laplace sulla riga i-esima,* $i : 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \qquad \textit{N.B. } i \textit{ è fissato}$$

3. *Sviluppo di Laplace sulla colonna j-esima,* $j : 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \qquad \textit{N.B. } j \textit{ è fissato}$$

4. *Teorema di Binet* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$*.*

Dimostrazione. Non è richiesta la dimostrazione. Per i dettagli, [Abate] capitolo 9. □

Vediamo ora alcune proprietà del determinante. Nelle ipotesi del teorema precedente:

Corollario 10.7. `[EEE67]` $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Dimostrazione. Basta sviluppare per una riga o colonna qualunque. □

Esempio 10.8. `[EEE79]` *Calcoliamo il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Soluzione. Sviluppiamo per la seconda riga

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 5(1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 6(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) \\
&= 24 - 60 + 36 = 0
\end{aligned}$$

□

Esempio 10.9. `[EEE80]` *Calcoliamo il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione. Sviluppiamo per la seconda colonna

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&2\\1&3&1\end{pmatrix} &= (-1)^3\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+(-1)^4\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+(-1)^5\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\\ &= (-1)\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 1\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot 0\\ &= 0-1-0=-1\end{aligned}$$

□

Corollario 10.10. [EEE65] $\det(0_n) = 0$ *e* $\det(I_n) = 1$.

Dimostrazione. La prima uguaglianza è immediata. La seconda segue immediatamente dalla definizione sviluppando per una riga qualunque ed usando l'induzione, ma la matrice identica è un caso particolare di matrice diagonale, quindi ci rifacciamo alla dimostrazione del determinante di matrici diagonali. □

Corollario 10.11. [EEE68] *Se una riga (o una colonna) di A è nulla ho* $\det(A) = 0$.

Dimostrazione. Basta calcolare il determinante sviluppando per quella riga (o colonna). □

Corollario 10.12. [EEE88] *Il determinante di una matrice diagonale D è il prodotto degli elementi sulla diagonale, ovvero*

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

In particolare, è non nullo se e solo se tutti gli elementi sulla diagonale sono non nulli.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione sull'ordine della matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(d_{11},\dots,d_{nn}) = \left(\begin{array}{c|cccc} d_{11} & 0 & \dots & \dots & 0\\ \hline 0 & d_{22} & 0 & \dots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn}\end{array}\right)$$

- Base: $n = 1$ Ovvio.
- Passo induttivo: possiamo suppore, per l'ipotesi induttiva, che la tesi sia vera per tutte le matrici diagonali di ordine $n-1$, e quindi per il blocco in basso a destra, il minore A_{11}, che è diagonale di ordine $n-1$. Sviluppiamo secondo la prima riga.

  $$\det(D) = d_{11}\det A_{11} = d_{11}\prod_{i=2}^{n} d_{ii} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

  ed abbiamo concluso.

□

Corollario 10.13. [EEE91] *Sia A una matrice triangolare superiore. Allora*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. [Hint: ricalcare la dimostrazione per le matrici diagonali vista al corollario precedente]. □

Corollario 10.14. [EEE69] *Abbiamo* $\det(A^T) = \det(A)$

Dimostrazione. Posso calcolare il determinante sviluppando sia per riga che per colonna, e le righe di A sono le colonne di A^T e viceversa. □

10.2 Operazioni di Gauss e determinante

Moltiplicazione di una riga/colonna per uno scalare

Definizione-Proposizione 10.15. [EEW76] *Data* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, l'operazione di moltiplicazione della riga* $i-$*esima di* A *per* $\lambda \in \mathbb{K}$ *si può effettuare mediante la sua moltiplicazione a sinistra per la matrice*

$$S_n^i(\lambda) = [\underline{e}_1, , \underline{e}_{i-1}, \lambda\underline{e}_i, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n]$$

Analogamente per le colonne, con moltiplicazione a destra.

Proposizione 10.16. [EEE78] *Data* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, moltiplicare una riga (colonna) di* A *per uno scalare* λ *moltiplica il determinante per* λ*.*

Dimostrazione. Si vede immediatamente sviluppando il determinante con Laplace secondo la i-esima riga e raccogliendo λ tra tutti gli addendi. Analogamente per le colonne.

La dimostrazione può anche essere dedotta, immediatamente, dal teorema di Binet. □

Esempio 10.17. [EEW02]

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&0&3&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} &= \det\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right)\\
&= \det\left(S_5^2(3)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right)\\
&= \det S_5^2(3)\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

Esempio 10.18. [EEW03]

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 3 & 3 & 6\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix} &= 3\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\\
&= 3\cdot 2\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= 12\cdot\left(1\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 5\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= 12(1\cdot 1 - 5\cdot 0 + 0\cdot(-1)) = 12
\end{aligned}$$

Abbiamo raccolto 3 *dalla seconda riga,* 2 *dalla terza colonna,* 2 *dalla terza riga. Abbiamo poi sviluppato con Laplace per la prima riga.*

Scambio di righe e colonne

Osservazione 10.19. [EEU71] *Ricordiamo che S_n^{ij} è la matrice elementare uguale alla matrice identità tranne che ha le righe i, j scambiate.*

Esempio 10.20. [EEY71]

$$S_5^{1,4} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Proposizione 10.21. [EEW71] *Abbiamo che* $\det S_n^{ij} = -1$

Dimostrazione. Sviluppiamo il determinante ed i determinanti dei minori sucessivi per le righe non scambiate ottenendo che

$$\det(S^n_{ij}) = \det(S^{n-1}_{ij}) = \ldots = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1$$

□

[Proposto: formalizzare la dimostrazione con un procedimento di induzione]

Esempio 10.22. [EEW01] *Vediamo che* $\det S_5^{1,4} = -1$

$$\det S_5^{1,4} = \det\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1$$

Abbiamo sviluppato rispettivamente per la seconda riga, per la seconda riga, per la terza riga.

Corollario 10.23. `[EEE71]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ e B^{ij} la matrice ottenuta da A scambiando le righe i e j. Allora*

$$\det B^{ij} = -\det(A)$$

Dimostrazione. Dato che $B^{ij} = S^{ij} \cdot A$ e che $\det S^{ij} = -1$, per il teorema di Binet, consegue che

$$\det(B_{ij}) = \det(S_n^{ij} A) = \det(S_n^{ij}) \det(A) = \cdots = -\det(A)$$

Analogamente per le colonne, moltiplicando la matrice A per S_n^{ij} a destra. □

Passo di riduzione di Gauss

Osservazione 10.24. `[EEV71]` *Ricordiamo che $G_n^{ij}(\lambda)$ è la matrice identità con al posto della riga j-esima (e_j) la riga $e_j + \lambda e_i$.*

Esempio 10.25. `[EET71]`

$$G_5^{23}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 10.26. `[EEG71]` *Abbiamo che $\det G_n^{ij}(\lambda) = 1$*

Dimostrazione. Dato che una matrice $G_n^{ij}(\lambda)$ è triangolare superiore od inferiore (a seconda se $i > j$ o $i < j$), e gli elementi sulla diagonale sono tutti uguali ad 1, il determinante è 1. □

Osservazione 10.27. `[EEX71]` *Ricordiamo che data $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, la matrice*

$$B = [A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j + \lambda A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n]$$

risultato dell'operazione di Gauss

$$A_j \longrightarrow A_j + \lambda A_i$$

si può ottenere come

$$B = G_n^{ij}(\lambda) \cdot A$$

Notiamo che, per il teorema di Binet,

$$\det B = \det(G_n^{ij}(\lambda) \cdot A) = \det G_n^{ij}(\lambda) \det A = 1 \cdot \det A = \det A$$

Abbiamo visto l'effetto che le operazioni di Gauss hanno sul determinante della matrice. Vediamo quindi cosa succede riducendo con Gauss una matrice a scala, in forma standard, in forma normale

Corollario 10.28. `[EEC99]` *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, l'operazione sulle colonne $C_j \longrightarrow C_j + \lambda C_i$ (sosituire la colonna j-esima con la somma della colonna j-esima per la colonna i-esima moltiplicata per lo scalare λ) lascia invariato il determinante.*

Dimostrazione. L'operazione sulle righe lascia il determinante invariato, ed il determinante di A è uguale al determinante di A^T, le cui righe sono le colonne di A e su cui l'operazione $C_j \longrightarrow C_j + \lambda C_i$ diviene $R_j \longrightarrow R_j + \lambda R_i$, che sappiamo non cambiare il determinante. □

Possiamo riassumere quanto visto con i seguenti enunciati:

Proposizione 10.29. `[EEF99]` *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, ed usando la notazione A_i per le righe e A^i per le colonne, abbiamo che*

1. *L'operazione* $A_j \longrightarrow \alpha A_j + \beta A_i$, *che si può realizzare moltiplicando a sinistra* A *per la matrice*
$$[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{j-1}, \alpha \underline{e}_j + \beta \underline{e}_i, \underline{e}_{j+1}, \ldots, \underline{e}_n]$$
ottenendo la matrice
$$[A_1, \ldots, A_{j-1}, \alpha A_j + \beta A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n]$$
moltiplica il determinante per α.

2. *L'operazione* $A^j \longrightarrow \alpha A^j + \beta A^i$, *che si può realizzare moltiplicando a destra* A *per la matrice*
$$[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{j-1}, \alpha \underline{e}_j + \beta \underline{e}_i, \underline{e}_{j+1}, \ldots, \underline{e}_n]$$
ottenendo la matrice
$$[A^1, \ldots, A^{j-1}, \alpha A^j + \beta A^i, A^{j+1}, \ldots, A^n]$$
moltiplica il determinante per α.

Dimostrazione. Dalle proposizioni precedenti, oppure possiamo notare che in ambedue i casi il determinante della matrice per cui moltiplichiamo A è uguale ad α e la tesi segue per il teorema di Binet. □

Osservazione 10.30. `[EEA98]` *Nel caso precedente, se* $i > j$ *abbiamo una matrice triangolare inferiore, se* $i < j$ *triangolare superiore per le righe. Viceversa per le colonne.*

Esempio 10.31. `[EEZ32]` *Effettuamo l'operazione* $A_3 \longrightarrow 2A_3 - 5A_4$ *(operiamo sulle righe di* A*) sulla matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Abbiamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} I^a \\ II^a \\ 2 \cdot III^a - 5 \cdot IV^a \\ IV^a \end{array}$$
Questo equivale alla moltiplicazione
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
La matrice per cui moltiplichiamo $A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ *a sinistra può essere scritta come*
$$[\underline{e}_1, \underline{e}_2, 2\underline{e}_3 - 5\underline{e}_4, \underline{e}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ed il risultato come
$$[A_1, A_2, 2A_3 - 5A_4, A_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 10.32. [EEZ37] *Effettuamo l'operazione* $A^3 \longrightarrow 3A^3 + 7A^2$ *(operiamo sulle colonne di A) sulla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$3A^3 + 7A^2 = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Questo equivale alla moltiplicazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 2 & 20 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice per cui moltiplichiamo $A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ *a destra può essere scritta come*

$$[\underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_3 + 7\underline{e}_2, \underline{e}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il risultato come

$$[A^1, A^2, 3A^3 + 7A^2, A^4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 2 & 20 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione 10.33. [EEZ99] *Nelle ipotesi della proposizione 10.29*

1. *Se* $\alpha = 1$ *abbiamo un passo di riduzione di Gauss.*
2. *Se* $\alpha = 0$, *il determinante della matrice risultato è* 0.
3. *Se* $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ *stiamo moltiplicando la riga (colonna)* j*-esima per* α *ed il determinante di* A *è il determinante della matrice risultato moltiplicato per* α.

Proposizione 10.34. [EEX99] *Per una matrice quadrata* A *e la sua riduzione in forma normale* N, *ottenuta con lo scambio di* k *righe ed* s *colonne e la moltiplicazione di righe per gli scalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ *abbiamo che*

$$\det(N) = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A$$

Dimostrazione. La riduzione in forma normale S si può ottenere da A mediante una serie di operazioni di scambio riga e/o colonna, riduzioni di Gauss e moltiplicazione di righe per scalare. Quindi $N = LAR$ dove L è il risultato del prodotto di k matrici del tipo S_n^{ij}, $G_n^{ij}(\lambda)$ e $S_n^i(\mu)$ (scambio colonne, riduzione, moltiplicazione riga per scalare) in un certo ordine,

- k matrici S_n^{ij}, (scambio riga).

- t matrici $S_n^i(\lambda)$, una per ogni pivot $p_i = \frac{1}{\lambda_i}$.
- Un certo numero di matrici $G_n^{ij}(\lambda)$.

e R è il risultato del prodotto di s matrici S_n^{ij} (scambio colonna), a destra.

Ricordando che

- $\det S_n^{ij} = -1$.
- $\det S_n^i(\lambda) = \lambda$.
- $\det G_n^{ij}(\lambda) = 1$.

Per il teorema di Binet

$$\begin{aligned} N &= L \cdot A \cdot R \\ \det(N) &= \det(L \cdot A \cdot R) \\ \det(N) &= \det(L)\det(A)\det(R) \\ \det(N) &= (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{t} \lambda_i\right) \det(A)(-1)^s \\ \det(N) &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A \end{aligned}$$

□

Corollario 10.35. `[EEX45]` *In particolare,*

- $\det A = 0$ *se e solo se c'e' almeno una riga di zeri in* N.
- *Se* $\det A \neq 0$, *ovvero se* $N = I_n$, *abbiamo* n *pivot* $p_1, \ldots, p_n$ *con* $p_i = \frac{1}{\lambda_i}$ *e*

$$\begin{aligned} \det(N) &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A \\ 1 = \det I_n &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \det A \end{aligned}$$

da cui

$$\det A = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Corollario 10.36. `[EEY47]` *Una matrice quadrata ha inversa destra se e solo ha determinante non nullo.*

Dimostrazione. Immediata dal corollario precedente. □

Proposizione 10.37. `[EEN99]` *Una matrice quadrata* A *è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione.

- Abbiamo che $\det A \neq 0$ se e solo se A ha inversa destra.

- Dimostriamo che $\det A \neq 0$ se e solo se A ha inversa sinistra.

  Infatti

$$\begin{aligned} A \text{ ha inversa sinistra } &\Leftrightarrow X \cdot A = I_n \text{ per opportuna } X \\ &\Leftrightarrow (X \cdot A)^T = (I_n)^T \\ &\Leftrightarrow A^T \cdot X^T = I_n \\ &\Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A^T) = \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che A ha inversa destra e sinistra se e solo se $\det A \neq 0$, quindi per la Proposizione 9.11, A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. □

Definizione 10.38. [EEK46] *Una matrice quadrata si dice* singolare *se ha il determinante nullo.*

Osservazione 10.39. [EEY46] *Per il corollario precedente, per una matrice quadrata essere invertibile o non singolare ̀la stessa cosa.*

Corollario 10.40. [EEE70] *Se la $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è invertibile abbiamo*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Binet. Da $A^{-1}A = I_n$ Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}A) &= \det(I_n) \\ \det(A^{-1})\det(A) &= 1 \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \end{aligned}$$

□

Corollario 10.41 (Trasposta e inversa)**.** [EEQ17] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora A invertibile se e solo se A^T invertibile, ed abbiamo*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Dimostrazione. Che A sia invertibile se e solo se A^T è invertibile segue immediatamente da $\det(A^T) = \det A$ e dalla Proposizione 10.37 precedente.

Per la seconda parte

$$(A)^{-1}A = I_n \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)^T = I_n \Leftrightarrow A^T A^{-1} = I_n$$

quindi A^{-1} è inversa destra, quindi inversa di A^T. □

Esempio 10.42. [EEE49]

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [0,1,0],
        [1,1,1]]);

Inverse(A);
```

```
Mat[[-1/2, -1/2, 3/2],
    [   0,    1,   0],
    [1/2,  -1/2, -1/2] ]

Transposed(Inverse(A));
Mat[[-1/2, 0,  1/2],
    [-1/2, 1, -1/2],
    [3/2,  0, -1/2] ]

Inverse(Transposed(A));
Mat[[-1/2, 0,  1/2],
    [-1/2, 1, -1/2],
    [ 3/2, 0, -1/2]]
```

Corollario 10.43 (Righe/colonne uguali)**.** `[EEE75]` *Una matrice A con due righe (o colonne) uguali ha determinante nullo.*

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, supponiamo che la prima e seconda riga siano uguali. Applichiamo un operazione di Gauss che lascia invariato il determinante

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad II^a - I^a \qquad = 0$$

dato che la matrice ha una riga nulla. Analogamente per le colonne. □

Un esempio completo di calcolo del determinante

Esempio 10.44. [EEE83]

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} &= 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad I^a \to 1/5 \cdot I^a \\
&= 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad II^a \to II^a - 3 \cdot I^a \\
&\textit{Sviluppo per la seconda riga} \\
&= -10 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= -10 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad III^a \to III^a - 2 \cdot I^a \\
&\textit{Sviluppo per la terza riga} \\
&= 10 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&\textit{calcolo a parte questo determinante} \\
&= 10 \cdot (-7) = -70
\end{aligned}
$$

Corollario 10.45 (Regola del Sarrus). [FFF07] *Segue immediatamente dalla definizione del determinante che, date le matrici*

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad e \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}
$$

$$
\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

Ovvero il determinante di A è la somma del prodotto degli elementi su ogni diagonale meno la somma del prodotto degli elemnti su ogni antidiagonale della matrice S, costruita aggiungendo ad A, a destra, la sua prima e seconda colonna.

Esempio 10.46. [FFF09] *Calcolare il determinante della matrice*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}
$$

Usando la regola del Sarrus, basta costruire la matrice

$$
S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}
$$

e

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 6 = 0$$

Osservazione 10.47. [FFF25] *Vediamo il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice 3×3 con i vari metodi. Il costo di una somma viene ritenuto irrilevante rispetto al costo di una moltiplicazione.*

- *Calcolare il determinante di una matrice 3×3 con la regola del Sarrus richiede 12 moltiplicazioni.*
- *Calcolare il determinante di una matrice 3×3 con lo sviluppo di Laplace richiede 9 moltiplicazioni.*
- *Calcolare il determinante di una matrice 3×3 con riduzione a scala mediante Gauss richiede 8 moltiplicazioni.*

Si vede immediatamente che il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ è alto.

Mediante sviluppo di Laplace

- Matrice 4×4: quattro determinanti di matrici 3×3 e quattro moltiplicazioni: $4(9)+4 = 40$ moltiplicazioni.
- Matrice 5×5: cinque determinanti di matrici 4×4 e cinque moltiplicazioni: $5(40)+5 = 205$ moltiplicazioni.
- Matrice 6×6: sei determinanti di matrici 5×5 e sei moltiplicazioni: $6(205) + 6 = 1236$ moltiplicazioni.

Esercizio 10.48. [FFW25] *Determinare il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante sviluppi di Laplace.*

Esercizio 10.49. [FFQ25] *Determinare il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante riduzione a scala.*

La regola del Sarrus è un caso particolare della *Formula di Leibnitz*

Proposizione 10.50 (Formula di Leibnitz)**.** [FFA25] *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$*

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

dove S_n ì'insieme delle permutazioni di n oggetti, $\sigma(i)$ ìa permutazione dell'i-esimo oggetto e

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Una permutazione σ è detta pari o dispari a seconda che sia ottenibile come prodotto di un numero pari o dispari di trasposizioni, ovvero permutazioni che si limitino a scambiare tra loro due elementi.

Il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante la formula di Leibnitz è di $n!(n-1)$ moltiplicazioni. Questa regola ha quindi scarsa utilità pratica per matrici di ordine grande.

Determinante e lineare indipendenza

Proposizione 10.51. [EEX46] *Le righe e le colonne di una matrice quadrata sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice è non singolare.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di lineare indipendenza e dalla caratterizzazione dell'invertibilità data dal Teorema 9.21.

Infatti per $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\det A \neq 0$ se e solo se A è invertibile se e solo se il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha un unica soluzione se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti. Per le righe, si ripete il ragionamento precedente con A^T, che è non singolare perchè A è non singolare.

□

Esempio 10.52. [FFQ81] *I vettori* $(1,2,3),(4,2,5),(4,4,5)$ *sono linearmente indipendenti? Si, dato che*

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 4 & 4 & 5\end{pmatrix} = 14 \neq 0$$

10.3 Esercizi svolti

Esempio 10.53. [FFQ65] *I vettori* $(1,2,3),(4,2,5),(4,4,5)$ *sono linearmente indipendenti? Si, dato che*

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 4 & 4 & 5\end{pmatrix} = 14 \neq 0$$

Esercizio 10.54. [B27] *Calcolare il determinante di*

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Per semplificarci la vita, operiamo il primo passo di riduzione a scala

$$\begin{array}{l} 2^a \to 2^a - 1^a\\ 3^a \to 3^a - 1^a\\ 4^a \to 4^a - 1^a\end{array} \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Dividiamo la seconda, terza e quarta riga per 2

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

e facciamo ancora un passo di riduzione a scala,

$$3^a \to 3^a - 2^a \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Non è necessario arrivare fino alla completa riduzione a scala, sviluppiamo il determinante di tale matrice secondo la prima colonna ed otteniamo:

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 1$$

Abbiamo fatto uno scambio di riga e abbiamo diviso tre righe per 2

$$\det A = (-1)^1 \cdot 2^3 \cdot 1 = -8$$

□

Esercizio 10.55. `[esercitazione21]` *Data l'equazione matriciale $XA = B$ con*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Dopo aver determinato le dimensioni della matrice X, dire se il sistema ha una unica soluzione e in caso affermativo, esplicitare la matrice X.

Soluzione. Abbiamo il sistema $XA = B$ con le matrici A di dimensione 3×3 e B di dimensione 2×3. Supponiamo che la matrice X abbia dimensione $p \times q$ quindi per la definizione della moltiplicazione di matrici le dimensioni di XA devono essere $p \times 3 = 2 \times 3$. Quindi le dimensioni di X sono 2×3.

Per rispondere alla seconda domanda, se A è invertibile, riscriviamo il sistema come segue:

$$XA = B \implies XAA^{-1} = BA^{-1} \implies X = BA^{-1}$$

Quindi calcoliamo il determinante di A; se è diverso da 0 sappiamo che A è invertibile. Calcoliamo il determinante di A:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+ 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1+2) - 1 \cdot (-1-6) + 3 \cdot (-1-3) = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Pertanto A è invertibile e il sistema ha un'unica soluzione $X = BA^{-1}$.

Per determinare la matrice X calcoliamo innanzitutto l'inversa di A col metodo dell'identità:

```
A1:=Mat[[2, 1,   3, 1,0,0],
        [1, 1,   2, 0,1,0],
        [3, -1, -1, 0,0,1]];
L:=RiduciScalaVerbose(A1);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 1, 3, 1, 0, 0]
2^a-1/2*1^a    [0, 1/2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a-3/2*1^a    [0, -5/2, -11/2, -3/2, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 1, 3, 1, 0, 0]
-------------- [0, 1/2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+5*2^a      [0, 0, -3, -4, 5, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-3
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a*+1/2       [1, 1/2, 3/2, 1/2, 0, 0]
2^a*+2         [0, 1, 1, -1, 2, 0]
3^a*-1/3       [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
Cancello la colonna sopra il 3pivot
1^a-3/2*3^a    [1, 1/2, 0, -3/2, 5/2, 1/2]
2^a-1*3^a      [0, 1, 0, -7/3, 11/3, 1/3]
```

```
-------------- [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
Cancello la colonna sopra il 2pivot
1^a-1/2*2^a    [1, 0, 0, -1/3, 2/3, 1/3]
-------------- [0, 1, 0, -7/3, 11/3, 1/3]
-------------- [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
```

Pertanto la matrice inversa è:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto calcoliamo la matrice X:

$$\begin{aligned} X = BA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Esercizio 10.56. `[esercitazione23]` *Determinare il determinante e l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Procediamo col calcolo mediante l'aggiunta dell'identità, perchè ci permette di calcolare determinante e inversa allo stesso tempo. Costruiamo la matrice

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e riduciamola in forma diagonale mediante il procedimento di Gauss.

```
AI3:=Mat[[ 2,  2,  3,  1,0,0],
   [ 1, -1,  2,  0,1,0],
   [-2, -1, -1,  0,0,1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI3);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 2, 3, 1, 0, 0]
2^a-1/2*1^a  [0, -2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+1*1^a  [0, 1, 2, 1, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
```

```
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 2, 3, 1, 0, 0]
-------------- [0, -2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+1/2*2^a  [0, 0, 9/4, 3/4, 1/2, 1]
```

Il determinante è il prodotto dei pivot $\det A = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{9}{4} = -9$ pertanto possiamo calcolare l'inversa:

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a*+1/2  [1, 1, 3/2, 1/2, 0, 0]
2^a*-1/2  [0, 1, -1/4, 1/4, -1/2, 0]
3^a*+4/9  [0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]
Cancello la colonna sopra il 3pivot
1^a-3/2*3^a   [1, 1, 0, 0, -1/3, -2/3]
2^a+1/4*3^a   [0, 1, 0, 1/3, -4/9, 1/9]
--------------[0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]
Cancello la colonna sopra il 2pivot
1^a-1*2^a  [1, 0, 0, -1/3,  1/9, -7/9]
-------------- [0, 1, 0,  1/3, -4/9,  1/9]
-------------- [0, 0, 1,  1/3,  2/9,  4/9]
```

Quindi la matrice inversa è :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

□

Esempio 10.57. [FFF71] *Calcolare al variare di $a, b \in \mathbb{K}$ il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ 1 & b+2 & a+b \\ a-b & a+b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{K})$$

Scambio la prima e seconda riga perchè voglio procedere con Gauss. Mi segno che ho effettuato uno scambio di righe, dovrò cambiare segno al determinante che trovo. Riduco con Gauss la prima colonna.

```
Use R::=Q[a,b];
A:=Mat([[1,b+2,a+b],
        [a+1,a,1],
        [a-b,a+b,a]]);
RiduciScalaVerbose(A); -- Cancello solo la prima colonna sotto a_11
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, b + 2, a + b]
 2^a-a - 1*1^a [0, -ab - a - b - 2, -a^2 - ab - a - b + 1]
 3^a-a + b*1^a [0, -ab + b^2 - a + 3b, -a^2 + b^2 + a]
```

Sviluppo quindi con Laplace, per la prima colonna

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} -ab-a-b-2 & -a^2-ab-a-b+1 \\ -ab+b^2-a+3b & -a^2+b^2+a \end{pmatrix} = a^2b + 2ab^2 + 2ab - a - 3b$$

Quindi

$$\det(A) = -(a^2b + 2ab^2 + 2ab - a - 3b) = -a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b$$

Esercizio 10.58. [FFQ05] *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *ha determinante nullo (facile verifica, ma lo vederemo riducendola). Le sue colonne*

$$\underline{v}_1 = (1,1,4) \quad \underline{v}_2 = (1,2,5) \quad \underline{v}_3 = (1,3,6)$$

sono quindi linearmente dipendenti. Vogliamo determinare dei coefficienti α, β, γ *di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficenti che danno una loro combinazione lineare nulla).*

Per definizione di dipendenza lineare basta determinare le soluzioni del il sistema lineare omogeneo

$$\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 + \gamma\underline{v}_3 = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha(1,1,4) + \beta(1,2,5) + \gamma(1,3,6) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + 6\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Risolviamo con Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1],
        [1,2,3],
        [4,5,6]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1]
     2^a-1*1^a [0, 1, 2]
     3^a-4*1^a [0, 1, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2]
     3^a-1*2^a [0, 0, 0]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2]
-------------- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2  pivot
   1^a-1*2^a  [1, 0, -1]
-------------- [0, 1, 2]
-------------- [0, 0, 0]
```

Ricordiamo che questa matrice è associata al sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

L'esistenza della riga nulla nella riduzione ci conferma che le colonne (e le righe) di A sono linearmente indipendenti. Abbiamo che le soluzioni del sistema sono $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$, o se preferiamo $\{(\gamma, -2\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. Le relazioni di dipendenza lineare tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono date da

$$\gamma\underline{v}_1 - 2\gamma\underline{v}_2 + \gamma\underline{v}_3 = 0 \qquad \gamma \neq 0$$

quindi essenzialmente da

$$\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0$$

per esempio con $\gamma = 1$. Dato che tutti i coefficienti della relazione sono non nulli, possiamo espicitare ogni vettore in funzione degli altri due; otteniamo

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3 \\ \underline{v}_2 &= \frac{1}{2}\underline{v}_2 + \frac{1}{2}\underline{v}_3 \\ \underline{v}_3 &= \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 \end{aligned}$$

Esempio 10.59. `[FFF60]` *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ 1 & b+2 & a+b \\ a-b & a+b & a \end{pmatrix}$$

- *Gauss*

```
Use R::=Q[a,b];
A:=Mat([[a+1,a,1],
        [1,b+2,a+b],
        [a-b,a+b,a]]);
RiduciScalaVerbose(A);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a + 1
WARNING WARNING - PIVOT NON NUMERICO - SPLIT
[Mat[[a + 1, a, 1],
     [1, b + 2, a + b],
     [a - b, a + b, a] ], 1, 1, a + 1]



Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a + 1, a, 1]
2^a-1/(a + 1)*1^a [0, (ab + a + b + 2)/(a + 1), (a^2 + ab + a + b - 1)/(a + 1)]
3^a(-a + b)/(a + 1)*1^a [0, (2ab + a + b)/(a + 1), (a^2 + b)/(a + 1)]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=(ab + a + b + 2)/(a + 1)
```

```
WARNING WARNING - PIVOT NON NUMERICO - SPLIT
[Mat[
  [a + 1, a, 1],
  [0, (ab + a + b + 2)/(a + 1), (a^2 + ab + a + b - 1)/(a + 1)],
  [0, (2ab + a + b)/(a + 1), (a^2 + b)/(a + 1)]
], 2, 2, (ab + a + b + 2)/(a + 1)]
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a + 1, a, 1]
-------------- [0, (ab + a + b + 2)/(a + 1), (a^2 + ab + a + b - 1)/(a + 1)]
3^a(-2ab - a - b)/(ab + a + b + 2)*2^a
               [0, 0, (-a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b)/(ab + a + b + 2)]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=(-a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b)/(ab + a + b + 2)
WARNING WARNING - PIVOT NON NUMERICO - SPLIT

[Mat[ [a + 1, a, 1],
      [0, (ab + a + b + 2)/(a + 1), (a^2 + ab + a + b - 1)/(a + 1)],
      [0, 0, (-a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b)/(ab + a + b + 2)]]

Determinante=Prodotto dei Pivot

(a + 1)*((ab + a + b + 2)/(a + 1))*((-a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b)/(ab + a + b + 2));

-a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b
```

- *Laplace*

$$\begin{aligned}\det(A) &= (a+1)\cdot\det\begin{pmatrix} b+2 & a+b \\ a+b & a \end{pmatrix} - a\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ a-b & a \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & b+2 \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \\ &= (a+1)(a(b+2)-(a+b)^2) - a(a-(a^2-b^2)) + (a+b) - (b+2)(a-b) \\ &= \boxed{-a^3 - a^2b - ab^2 + a^2 - ab - b^2 + 2a} - \boxed{-a^3 + ab^2 + a^2} + \boxed{-ab + b^2 - a + 3b} \\ &= -a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b\end{aligned}$$

- *Sarrus*

$$S = \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 & a+1 & a \\ 1 & b+2 & a+b & 1 & b+2 \\ a-b & a+b & a & a-b & a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= (a+1)(b+2)(a) + (a)(a+b)(a-b) + (1)(1)(a+b) \\ &\quad - (a-b)(b+2)(1) - (a+b)(a+b)(a+1) - (a)(1)(a) \\ &= -a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b\end{aligned}$$

10.4 Esercizi proposti

Esercizio 10.60. [FFW73] *Dato $a, b, c \in \mathbb{R}$ discutere l'invertibilità e calcolare qando possibile l'inversa delle matrici*

1. $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 3 & b \end{pmatrix}$ *Sol* $\frac{1}{-3ab+6b}\begin{pmatrix} -3b & 3b & 0 \\ -2b & ab & -ab+2b \\ 6 & -3a & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2a+6 & 3b+1 & 3c \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ *La matrice non è invertibile per nessun valore di* a, b, c.

3. $\begin{pmatrix} a & 3b & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ *Sol:* $\frac{1}{-6abc+ac+c}\begin{pmatrix} c & -3bc & 0 \\ -2ac & ac+c & 0 \\ 2ab-2 & -ab+5b & -6ab+a+1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} a & 0 & a & b \\ a & 0 & a+1 & b \\ b & b & a & b \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *Sol* $\frac{1}{ab^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b^2 \\ -ab & 0 & ab & ab-b^2 \\ -ab^2 & ab^2 & 0 & 0 \\ a^2b+ab & -a^2b & 0 & -ab \end{pmatrix}$

Esercizio 10.61. `[EEA33]` *Calcolare se possibile i determinanti delle seguenti matrici*

- $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 8 \\ 12 & 21 & 32 & 21 \end{pmatrix} \qquad [Sol{:}0]$$

- *Con lo sviluppo di Laplace*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [Sol{:}57]$$

- *mediante riduzione a triangolare superiore*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [Sol{:}57]$$

- $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [Impossibile{:}]$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad [Sol{:}6]$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [Sol{:}-42]$$

Esercizio 10.62. `[EEA13]` *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3454 \\ 10^3 & 23 \end{pmatrix}$$

calcolare $\det\left(B^T \cdot (A^5 \cdot B^T)^{-1} \cdot A^7\right)$ [*Sol* : 289[

Esercizio 10.63. `[EEA00]` *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *calcolare* $\det\left((A + I_2) \cdot (A - I_2)\right)$ *Sol:* 0.

Esercizio 10.64. `[EEA02]` *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} e^{1/3i\pi} & 1 \\ i & e^{2/3i\pi} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 2i \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(A \cdot B)$. *Sol:* $1 + i$.

Esercizio 10.65. `[LL96]` *Risolvere l'equazione matriciale* $CX = D$ *dove*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{17}{6} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.66. `[LLX96]` *Risolvere l'equazione matriciale* $XC = D$ *dove*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.67. `[EEE87]` *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 20 & 20 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 20 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(5 \cdot A)$ [*Sol:*$\det(A) = 300$, $\det(5 \cdot A) = 187500$]

Esercizio 10.68. `[EEA14]` *Determinare i valori di* $k \in \mathbb{K}$ *per cui il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & k \\ k & 2 & k \\ k & k & 2 \end{pmatrix}$$

è nullo [*Sol:*$k = -1, 2$]

Esercizio 10.69. `[EEA03]` *Determinare i valori di $k \in \mathbb{Q}$ per cui il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 5 \\ 5k & k & 5 \end{pmatrix}$$

è nullo *[Sol:$\emptyset$]*

Esercizio 10.70. `[EEA15]` *Determinare il numero di valori $k \in \mathbb{C}$ per cui il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 5 \\ 5k & k & 5 \end{pmatrix}$$

è nullo *[Sol:3]*

Esercizio 10.71. `[EEA16]` *Determinare il numero di valori $k \in \mathbb{C}$ per cui il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} k+9 & -6 & 2 \\ 22 & k-14 & 4 \\ 11 & -6 & k \end{pmatrix}$$

è nullo *[Sol:2]*