Appendice A

Descrizioni cartesiane e parametriche

Possiamo utilizzare i morfismi di spazi vettoriali per dare una definizione più precisa delle descrizioni cartesiane a parametriche

Definizione A.1. `[JJJ51]` *Dati U, W $\mathbb{K}$-spazi diciamo che $F\colon U \to W$, morfismo di $\mathbb{K}$ spazi è una descrizione cartesiana di $V \underset{SSP}{\subseteq} U$ se*

$$V = \ker F = \{\underline{v} \in U \ \mid\ F(\underline{v}) = 0\}$$

Diciamo che U è lo spazio di partenza *della descrizione e W è lo* spazio di arrivo*.*

Detto più semplicemente, una descrizione cartesiana di uno spazio vettoriale V sono le condizioni che un vettore $\underline{v}$ deve soddisfare per appartenere a V.

Definizione A.2. `[JJJ52]` *Dati U, W $\mathbb{K}$-spazi diciamo che $T\colon W \to U$, morfismo di $\mathbb{K}$ spazi è una* descrizione parametrica *di $V \underset{SSP}{\subseteq} U$ se*

$$V = \operatorname{Im} T = \{T(\underline{w}) \ \mid\ \underline{w} \in W\}$$

Diciamo che W è lo spazio di partenza *della descrizione e U è lo* spazio di arrivo*.*

Equivalentemente, dare una base, un sistema di generatori od un vettore generico mi dà una descrizione parametrica.

Chiaramente le descrizioni cartesiane e parametriche si guardano bene dall'essere uniche, dato che possono variare *sia la funzione che gli spazi (di arrivo per la cartesiana e di partenza per la parametrica).*

Esempio A.3. `[JJJ23]` *Dato*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x - y = x + 2z = 0\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

due sue descrizioni cartesiane sono

$$F\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, x+2z) \end{array} \quad e \quad G\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y+2z, x-y, y+2z) \end{array}$$

dato che

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = x \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2}x \\ y = x \end{cases}$$

e quindi

$$\ker F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + 2z = 0\} = V$$
$$\ker G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = x - y = y + 2z = 0\} = V$$

Esempio A.4. `[JJE65]` *Il sottospazio* $V = \mathrm{Span}((2, 2 - 1))$ *può essere visto come l'immagine delle due funzioni*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (x, x, -1/2x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto & (-1, -1, 1/2) \\ & \underline{e}_2 & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

Esempio A.5 (Passaggio da descrizione cartesiana a parametrica)**.** `[JJQ00]` *Basta trovare una base di del* ker *che descrive lo spazio.*

Esempio A.6 (Passaggio da descrizione parametrica a cartesiana)**.** `[JJQ01]` *Bisogna trovare le condizioni che deve soddisfare il vettore* $\underline{v}$ *per appartenere a* V*.*

La somma facile in quando ho le descrizioni parametriche degli spazi, intersezione facile in cartesiane.

Osservazione A.7. `[HHA15]` *Se abbiamo due sottospazi di* $\mathbb{K}^n$ *espressi in forma cartesiana*

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

e

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_s(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

la loro intersezione è

$$V \cap W = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Il calcolo di una base dell'intersezione di sottospazi è quindi immediato quando i sottospazi sono espressi in forma cartesiana.

Esempio A.8. `[HHA16]` *Siano*

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x + y - z = 0\}$$

e

$$W = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

la loro intersezione è

$$V \cap W = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \middle| \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+t=0 \\ x+2y+3z-t=0 \end{cases} \right\}$$

Esercizio A.9. `[QQQ52]` *Dire se gli spazi affini*

$$L = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \begin{cases} x+y-2z+t=1 \\ x+y-z-3t=2 \\ y+t=0 \end{cases} \right\} \quad e\ J = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \begin{cases} x+y-2z+t=1 \\ 1/3x+4/3y-1/3z-2/3=0 \\ 4y+z=1 \end{cases} \right\}$$

sono uguali.

Soluzione. Determiniamo un vettore generico $\underline{v}$ per L e verifichiamo che $\underline{v} \in J$. Questo ci dirà che $L \subseteq J$. Ripetiamo scambiando L, J. Questo ci dirà che $J \subseteq L$. Ne concluderemo che $L = J$.

1. Determiniamo un vettore generico per L, ovverso risolviamo il sistema con matrice associata (completa)

```
M:=Mat([[1,1,-2,1,1],
        [1,1,-1,-3,2],
        [0,1,0,1,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2, 1, 1]
     2^a-1*1^a [0, 0, 1, -4, 1]
  0 sotto pivot[0, 1, 0, 1, 0]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([ [1, 1, -2, 1, 1],
      [0, 1, 0, 1, 0],
      [0, 0, 1, -4, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2, 1, 1]
-------------- [0, 1, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, -4, 1]

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -2, 1, 1]
-------------- [0, 1, 0, 1, 0]
-------------- [0, 0, 1, -4, 1]
Cancello la colonna sopra il 3  pivot
   1^a+2*3^a   [1, 1, 0, -7, 3]
-------------- [0, 1, 0, 1, 0]
-------------- [0, 0, 1, -4, 1]
```

```
Cancello la colonna sopra il 2  pivot
   1^a-1*2^a  [1, 0, 0, -8, 3]
-------------- [0, 1, 0, 1, 0]
-------------- [0, 0, 1, -4, 1]
```

Le soluzioni sono quindi $x = 8t + 3$, $y = -t$, $z = 4t + 1$. Sostituiamo nel vetttore vettore generico di $\mathbb{R}^4$ (x, y, z, t) per trovare il vettore generico delle soluzioni $\underline{v} = (8t + 3, -t, 4t + 1, t)$.

Verifichiamo che $\underline{v} \in J$ verificando che le sue componenti soddisfano le equazioni che definiscono J

$$\begin{cases} t + x + y - 2z = 1 \\ 1/3x + 4/3y - 1/3z - 2/3 = 0 \\ 4y + z = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} x = 8t + 3 \\ y = -t \\ z = 4t + 1 \\ t = t \end{array} \right. \quad \Rightarrow \begin{cases} (8t + 3) + (-t) - 2(4t + 1) + t = 1 \\ 1/3(8t + 3) + 4/3(-t) - 1/3(4t + 1) = 2/3 \\ 4(-t) + (4t + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2/3 = 2/3 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Potevamo notare che la prima equazione della descrizione cartesiana di J è uguale alla prima equazione della descrizione cartesiana di L, e quindi possiamo dire immediatamente che $\underline{v}$ la soddisfa senza fare i conti.

2. Che $J \subseteq L$ è lasciato per esercizio.

$\square$