Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 25 Novembre

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} z^9 = 4^{10} + 5\pi \\ \mid z \mid < \pi \end{cases}$

   Soluzione: $\emptyset$

2. Determinare il numero di $x \in \mathbb{C}$ tali che, $\frac{x^{12}-1}{(x^6-2x^3+1)} = 0$.

   Soluzione: 9

3. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \operatorname{Span}((1,0,3,4)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

   Soluzione: $\left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y = 0 \\ x - 4t = 0 \end{cases} \right\}$

4. Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 1 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   determinare il coefficente di testa del polinomio $p_T(\lambda) - \lambda^4$

   Soluzione: -10

5. Determinare, se esiste, l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **Soluzione:** $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt)**.** *Si consideri lo spazio vettoriale* $N(A) = Sol(A\underline{x} = \underline{0})$, *con* $k \in \mathbb{R}$ *e*

$$A = \begin{pmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{pmatrix}$$

1. *Per quali valori di* k *si ha* $\dim(N(A)) = 0$*?*

2. *Determinare una base di* $N(A)$ *quando possibile.*

Soluzione:

a) $N(A)$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; in particolare, per Rouchè-Capelli, ammette la sola soluzione nulla se $\text{rg}(A)$ è massimo. Nel nostro caso quindi $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $\text{rg}(A) = 4$. Determiniamo il rango di A calcolandone il deteminante:

$$\det(A) = -(k+4) \cdot \det \begin{bmatrix} 2k & 1 & 2k+2 \\ 0 & k+4 & 0 \\ k & k+2 & k+3 \end{bmatrix} = -(k+4)^2 \cdot [2k(k+3) - k(2k+2)] = -4k(k+4)^2$$

Infine $\text{rg}(A) = 4$ se $\det(A) \neq 0$, cioé $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$ se $k \neq 0, -4$.

b) Se $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) : \begin{cases} x + 4y + 8w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 4z = 0 \\ 2z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(A) = \{(-4,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = 0$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(-4,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Se $k = -4$ la matrice A diventa

$$\begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 31II - 8I \\ \\ 2IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 31IV + 5II \end{matrix} \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 31 & -218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -966 \end{bmatrix}$$

$$N(A) : \begin{cases} -31x + 4w = 0 \\ 31z - 218w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow N(A) = \{(0,1,0,0)t \mid \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Se $k = -4$ quindi $\mathcal{B}(N(A)) = \{(0,1,0,0)\}$ e $\dim(N(A)) = 1$.

Figura 1:

Esercizio 2 (12pt). *Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ Si determini, se esiste, una applicazione lineare*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,2,3) & \mapsto & (3,1,5) \\ & (3,1,0) & \mapsto & (1,2,3) \\ & (1,1,1) & \mapsto & (2,0,0) \\ & (4,2,1) & \mapsto & (3,2,3) \\ & (a,b,0) & \mapsto & (a,b,c) \end{array}$$

Soluzione:
I vettori $(1,2,3),(3,1,0),(1,1,1)$ formano una base B perchè

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$$

La nostra candidata T è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$(M_T)_E^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

L'applicazione T soddisfa per costruzione le prime tre condizioni, qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Verifichiamo le altre due.

Abbiamo che

$$(3,2,3) = T((4,2,1)) = T((3,1,0)) + T((1,1,1)) = (1,2,3) + (2,0,0) = (3,2,3)$$

quindi la quarta condizione è verificata $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per verificare la quinta, troviamo $(M_T)_E^E$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (M_T)_E^E &= (M_T)_E^B \cdot (M)_B^E \\ &= (M_T)_E^B \cdot \left((M)_E^B\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 8 & -21 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$T((a,b,0)) = aT(\underline{e}_1) + bT(\underline{e}_2) = a(-2,3,8) + b(7,-7,-21) = (-2a+7b, 3a-7b, 8a-21b)$$

Ma per la quinta condizione dobbiamo avere

$$T((a,b,0)) = (-2a+7b, 3a-7b, 8a-21b) = (a,b,c)$$

e quindi a, b, c devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} -2a+7b = a \\ 3a-7b = b \\ 8a-21b = c \end{cases}$$

il determinante della matrice associata al sistema

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 8 & -21 & 1 \end{bmatrix}$$

è $3 \neq 0$. *Il sistema, omogeneo, ammette l' unica soluzione $a = b = c = 0$.*

Se e solo se $a = b = c = 0$ esiste quindi un applicazione lineare che soddisfa le condizioni ed è la nostra candidata T.

Esercizio 3 (5pt)**.** *Sia data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. *Determinare il polinomio caratteristico di* A*.*
2. *Calcolare* $A^{82} - A^{28}$*.*

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico
$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \lambda$$
   Quindi il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$.

2. Sappiamo che la matrice annulla il proprio polinomio caratteristico, quindi abbiamo che $P(A) = 0 \Rightarrow A^3 = A$, da cui
$$A^{27} = \left(\left(A^3\right)^3\right)^3 = A$$
$$A^{81} = \left(\left(\left(A^3\right)^3\right)^3\right)^3 = A$$
   Quindi $A^{82} - A^{28} = A(A^{81} - A^{27}) = 0$

$\square$