Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 11 Settembre

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni complesse dell'equazione $e^{iz} = e^z$.

   Sol: $z = k\pi - ik\pi = k\pi(1-i)\ k \in \mathbb{Z}$

2. Trovare una fattorizzazione, non necessariamente in fattori irriducibili, del polinomio $x^8 + x^4 + 1 \in \mathbb{C}[x]$.

   Sol: $\left(\mathbf{x^4 - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right)\left(\mathbf{x^4 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\right)$

3. Dato $V = \operatorname{Span}((1,0,1,2),(7,0,1,3),(0,0,0,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$ determinare un vettore in V

   Soluzione: Qualunque vettore con seconda componente nulla, p.e. $(1,0,2,3)$

4. Determinare una funzione $f \in \{g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ tale che le funzioni f, F, G siano linearmente dipendenti, date

$$F\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & 1 \end{array}, \qquad G\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \clubsuit & \mapsto & \cos^2\clubsuit \end{array}$$

   Soluzione: $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin^2 t \end{array}$

5. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice $\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$ **Soluzione:** $b \neq 0,\ b \neq -a,$

6. Determinare, per le $a, b \in \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni del punto precedente, l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$ **Soluzione:** $-\frac{1}{2b(a+b)} \begin{pmatrix} a-b & -a-b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. *(9 pt) Dati i tre sottospazi*

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathrm{Span}((3,2,0,1),(1,1,0,1),(0,1,0,0)), \\ V_2 &= \mathrm{Span}((1,1,0,1),(2,3,0,1),(1,0,0,0)), \\ V_3 &= \mathrm{Span}((2,1,0,0),(4,2,0,0),(6,3,0,0)), \end{aligned}$$

Determinare una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$

Soluzione.

I tre generatori di V_1 sono lineramente indipendenti, dato che si vede immediatamente che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che li ha per righe è 3. Dato che tutti e tre i generatori di V_1 hanno la terza componente nulla, $V_1 = \{(x,y,z,t) \ \mid \ z = 0\}$

I tre generatori di V_2 sono lineramente indipendenti, dato che si vede immediatamente che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che li ha per righe è 3. Dato che tutti e tre i generatori di V_2 hanno la terza componente nulla, $V_2 = \{(x,y,z,t) \ \mid \ z = 0\}$ e quindi $V_2 = V_1$

Dato che tutti i generatori di V_3 hanno la terza componente nulla, appartengono a V_1, quindi $V_3 \subseteq V_1$

Quindi $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_3$. Dato che il secondo e terzo generatore di V_3 sono multipli del primo, una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ è data da $(2,1,0,0)$.

$\square$

Esercizio 2. *(9 pt) Data una base B di $\mathbb{R}^4$ e l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice*

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Al variare di $a \in \mathbb{K}$ calcolare il polinomio caratteristico di T e discutere la diagonabilizzabilità di T.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di T

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & a-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda^2 - 2\lambda - 1)(a-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Dato che

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Abbiamo quattro autovalori $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = a$, non necessariamente distinti. Distinguiamo i quattro casi

1. $a \neq 1, \pm\sqrt{2}$: Abbiamo quattro autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, e quindi T è diagonalizzabile

2. $a = 1$: Abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, ed un autovalore di molteplicità algebrica due, $\lambda_0 = 1$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(\lambda_0)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{mg}(\lambda_0) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=1} \\
&= 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 4 - 3 = 1
\end{aligned}$$

L'endomorfismo T non è diagonalizzabile.

3. $a = 1+\sqrt{2}$: Abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, ed un autovalore di molteplicità algebrica due, $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(\lambda_1)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{mg}(\lambda_1) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=1+\sqrt{2}} \\
&= 4 - rk \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 4 - 2 = 2
\end{aligned}$$

L'endomorfismo T è diagonalizzabile. Abbiamo determinato facilmente il rango dato che le prime due righe della matrice sono multiple l'una dell'altra, come pure la terza e quarta.

4. $a = 1-\sqrt{2}$: Abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, ed un autovalore di molteplicità algebrica due, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(\lambda_2)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{mg}(\lambda_2) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=1-\sqrt{2}} \\
&= 4 - rk \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 4 - 2 = 2
\end{aligned}$$

L'endomorfismo T è diagonalizzabile. Abbiamo determinato facilmente il rango dato che le prime due righe della matrice sono multiple l'una dell'altra, come pure la terza e quarta.

In conclusione, l'endomorfismo T non è diagonalizzabile se e solo se $a = 1$. □

Esercizio 3. *(6 pt) Sia data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni $T((1,a)) = (1,1)$, $T((a,1)) = (1,a)$, determinare al variare di a tutte le funzioni T che*

1. *Siano endomorfismi.*
2. *Non siano isomorfismi.*

e per queste discutere la diagonalizzabilità di T e determinare una base di autovettori per T.

Soluzione. I due vettori $(1,a),(a,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo det $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1-a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Discutiamo i tre casi $a = \pm 1, a \neq \pm 1$

1. $a \neq \pm 1$: una base di $\mathbb{R}^2$ è quindi data da $B = (1,a),(a,1)$ e se T è un morfismo è associato mediante la base B alla matrice
$$(M_T)^B_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$
Dato che $a \neq 1$, questa matrice è non singolare e quindi T è isomorfismo, non soddisfando le condizioni.

2. $a = -1$: le due condizioni $T((1,a)) = (1,1)$, $T((a,1)) = (1,a)$ divengono $T((1,-1)) = (1,1)$, $T((-1,1)) = (1,-1)$. Dato che per le proprietà dei morfismi si dovrebbe avere
$$-T((-1,1)) = T(-(-1,1)) = T((1,-1)) = (1,1)$$
ed abbiamo
$$-T((-1,1)) = -(1,-1) = (-1,1)$$
T non può essere un morfismo e quindi non soddisfa le condizioni.

3. $a = 1$: le due condizioni $T((1,a)) = (1,1)$, $T((a,1)) = (1,a)$ coincidono. Prendendo la base $B = \underline{v}_1 = (1,1), \underline{v}_2 = (1,0)$, abbiamo che $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$ mentre l'immagine di $\underline{v}_2$ è libera. Quindi se T è un morfismo, abbiamo
$$(M_T)^B_B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$
Perchè T non sia un isomorfismo, è necessario e sufficente che la matrice $(M_T)^B_B$ sia singolare, e dato che il suo determinante è uguale a y, dobbiamo avere $y = 0$ e quindi
$$(M_T)^B_B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$
Calcoliamo il polinomio caratteristico
$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & x \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1)$$
vediamo che non dipende da x e dato che ha due radici distinte, T è sempre diagonalizzabile con autovalori $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$

Troviamo le due basi degli autospazi. I vettori sono espressi in coordinate B.

(a) V_{λ_0}: una base è data dai vettori (t,u) soluzioni dell'equazione

$$T((t,u)) = \lambda_0(t,u) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = 0(t,u) \Leftrightarrow (t+ux,0) = (0,0) \Leftrightarrow t = -xu$$

Quindi un vettore generico delle soluzioni è dato da $(-xu,u) = u(-x,1)$ ed una base di V_{λ_0} è $(-x,1)$.

(b) V_{λ_1}: una base è data dai vettori (t,u) soluzioni dell'equazione

$$\begin{aligned} T((t,u)) &= \lambda_1(t,u) \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} &= 1(t,u) \\ (t+ux,0) &= (t,u) \\ (ux,-u) &= (0,0) \end{aligned}$$

e quindi $u = 0$. Un vettore generico delle soluzioni è quindi dato da $(t,0) = t(1,0)$ ed una base di V_{λ_1} è $(1,0)$.

In conclusione, T è un morfismo se e solo se $a = 1$, ed in questo caso, data la base $B = (1,1),(1,0)$, T non è isomorfismo se e solo se

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$

T è sempre diagonalizzabile, ed una base di autovettori è $B' = (-x,1),(1,0)$

$\square$