Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 26 Giugno

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss, le soluzioni dell'equazione $\frac{z^9-z}{z^4+1}=0$.

   Soluzione:$0, \pm 1, \pm i$

2. Al variare di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dire quando è invertibile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c \\ b & d+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

   Soluzione: $a(d+1)-2bc = -2bc+ad+a \neq 0, 1$

3. Calcolare al variare di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e quando esiste, l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c \\ b & d+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

   Soluzione: Se $a(d+1)-2bc = -2bc+ad+a \neq 0, 1,\ A^{-1} = \frac{1}{-2bc+ad+a}\begin{pmatrix} d+1 & -2c \\ -b & a \end{pmatrix}$

4. Dato l'$\mathbb{R}$-sottospazo di $\mathbb{R}^3$ $V = \mathrm{Span}((1,3,2),(4,3,-1))$ dire se il vettore $(1,3,1)$ appartiene a V.

   Soluzione: No

5. Determinare $\gcd(x^3+6x^2+12x+8, x^4+8x^3+24x^2+32x+16)$.

   Soluzione: $\gcd = x+2$

6. Le due matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   sono simili?

   Soluzione: No.

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. *(9 pt) Dati i tre sottospazi al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - \alpha z = 0\}, \\ V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + (\alpha - 1)z = 0\}, \\ V_3 &= \mathrm{Span}((\alpha, \alpha+1, 1), (3\alpha+2, 2\alpha, -\alpha-2)) \end{aligned}$$

Determinare, al variare α *e quando possibile, una base di* $V_1 \cap V_2 \cap V_3$

Soluzione.

Determiniamo una rappresentazione cartesiana anche di V_3. Notiamo che per entrambi i generatori, la somma della prima e terza coordinata mi da la seconda, e quindi soddisfano la condizione lineare $x - y + z = 0$ (dove x, y, z rappresentano rispettivamente la rima, seconda e terza coordinata). Se i due generatori di V_3 sono linearmente indipendenti V_3 ha dimensione 2 e quindi per una sua rappresentazione cartesiana basta una sola equazione. In questo caso

$$V_3 = \mathrm{Span}((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0)$$

Verifichiamo quindi l'indipendenza lineare dei due generatori costruendo la matrice che li ha come righe e calcolandone il rango di

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 3\alpha+2 & 2\alpha & -\alpha-2 \end{pmatrix}$$

Dato che la somma della prima e terza coordinata mi da la seconda, l'unica sottomatrice di A di ordine 2 che possa essere non singolare è

$$A_{(1,2),(1,3)} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 3\alpha+2 & -\alpha-2 \end{pmatrix}$$

che è non singolare se e solo se il suo determinante

$$\alpha(-\alpha-2) - (3\alpha+2) = -(\alpha^2 + 5\alpha + 2)$$

è nullo, cosa che accade se e solo se

$$\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

In questo caso, lasciando indicato α per comodità, $V_3 = \mathrm{Span}((\alpha, \alpha+1, 1))$, un suo vettore generico è $(\lambda\alpha, \lambda(\alpha+1), \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e una sua rappresentazione cartesiana si ottiene per esempio eliminando λ nel sistema

$$\begin{cases} x = \lambda\alpha \\ y = \lambda(\alpha+1) \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z\alpha \\ y = z(\alpha+1) \\ z = \lambda \end{cases}$$

Quindi

$$V_3 = \mathrm{Span}\left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} x = z\alpha \\ y = z(\alpha+1) \end{cases} \right)$$

Abbiamo due casi, ed una base dell'intersezione richiesta è una base delle soluzioni del sistema in ambedue.

1. Il caso $\alpha = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ con $V_3 = \mathrm{Span}\left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} x = \alpha z \\ y = (\alpha+1)z \end{cases} \right)$ di dimensione 1.

   Lasciamo α indicato per comodità.

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} x + y - \alpha z = 0 \\ x - y + (\alpha-1)z = 0 \\ x = \alpha z \\ y = (\alpha+1)z \end{cases} \right\}$$

   Risolviamo il sistema sostituendo la x, y ottenuta dalla terza e quarta equazione nella prima e seconda

$$\begin{cases} \alpha z + (\alpha+1)z - \alpha z = 0 \\ \alpha z - (\alpha+1)z + (\alpha-1)z = 0 \\ x = \alpha z \\ y = (\alpha+1)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ (\alpha-2)z = 0 \\ x = \alpha z \\ y = (\alpha+1)z \end{cases}$$

   Dalla prima e seconda equazione, e dato che in questo caso $\alpha \neq 2, -1$ abbiamo $z = 0$ ed il sistema diviene

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   Non esiste quindi base dell'intersezione, dato che $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \mathrm{Span}(\underline{0})$ e $\mathrm{Span}(\underline{0})$ non ha base.

2. Caso $\alpha \neq \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} x + y - \alpha z = 0 \\ x - y + (\alpha-1)z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$ di dimensione 2

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \begin{cases} x + y - \alpha z = 0 \\ x - y + (\alpha-1)z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

   Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 1 & -1 & \alpha-1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   la matrice associata al sistema, che riduciamo con Gauss,usando x al posto di α.

```
M:=Mat([[1,  1,    -x],
        [1, -1, x - 1],
        [1, -1,     1]]);
------------------------------
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,     -x]
     2^a-1*1^a [0, -2, 2x - 1]
     3^a-1*1^a [0, -2,  x + 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,     -x]
-------------- [0, -2, 2x - 1]
     3^a-1*2^a [0,  0, -x + 2]
```

ed esaminiamo i due casi $\alpha \neq 2$, $\alpha = 2$, entrambi compatibili con la nostra condizione $\alpha \neq \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

(a) $\alpha \neq 2$. La matrice ha tre pivot, è quindi invertibile ed esiste un unica soluzione. Dato che il sistema è omogeneo, questa è il vettore nullo. Non esiste quindi base dell'intersezione, dato che $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \mathrm{Span}(\underline{0})$ e $\mathrm{Span}(\underline{0})$ non ha base.

(b) $\alpha = 2$. Il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$$

Un vettore generico delle soluzioni è quindi

$$\left(\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z\right)$$

ed una base delle soluzioni

$$B = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \text{ oppure } B' = (1, 3, 2)$$

Concludendo, una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ esiste se e solo se $\alpha = 2$ ed è, per esempio $B' = (1, 3, 2)$.

$\square$

Esercizio 2. *(9 pt) Dato $a \in \mathbb{R}$, sia data una funzione $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfi le condizioni*

$$\begin{aligned} T((a, a+1)) &= (2, 1) \\ T((1, a+1)) &= (a+1, 1) \end{aligned}$$

1. *Per quali a la funzione T può essere lineare?*
2. *Caratterizzare al variare di a tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni, per esempio dando per ciascuna due basi di $\mathbb{R}^2$ e la matrice associata a T.*
3. *Tra queste, trovarne, se possibile ed al variare di a,*
   (a) *una di rango 2.*
   (b) *una di rango 1.*

Soluzione.

1. I vettori $\underline{v}_1 = (a, a+1)$, $\underline{v}_2 = (a+1, 1)$ sono linearmente indipendenti se la matrice che li ha per colonne è non singolare, ovvero se

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ a+1 & a+1 \end{pmatrix} = a(a+1) - (a+1) = -a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

   Abbiamo quindi tre casi

   (a) $a \neq \pm 1$. In questo caso $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e quindi, al variare di a, esiste unica T lineare che soddisfa le condizioni con matrice associata

$$(M_T)^B_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & a+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Il rango di T è dato dal rango di questa matrice che ha determinante $1 - a$ ed è quindi sempre non nullo dato che $a \neq \pm 1$. Un morfismo T che soddisfi le condizioni ha quindi sempre rango 2 in questo caso.

   (b) $a = 1$. In questo caso $\underline{v}_1 = (1, 2) = \underline{v}_2$. Dato che se $a = 1$ abbiamo

$$T(\underline{v}_1) = (2, 1) = T(\underline{v}_2)$$

   la relazione lineare tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ si conserva e T può essere lineare. Per trovare tutte le T lineari che soddisfano le condizioni, ridotte a

$$T((1, 2)) = (2, 1)$$

   completiamo $(1, 2)$ a base di $\mathbb{R}^2$, per esempio considerando la base $B = (1, 2), \underline{e}_1$. L'immagine di $\underline{e}_1$ non ha condizioni e quindi $T(\underline{e}_1) = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Se T è lineare, è definita in modo unico dalla matrice associata

$$(M_T)^B_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

   Adesso, per esempio, se $x = y = 0$, $(M_T)^B_{E_2}$ e quindi T ha rango 1. Se $x = y = 1$, $(M_T)^B_{E_2}$ e quindi T ha rango 2.

(c) $a=-1$. In questo caso $\underline{v}_1=(-1,0)$ e $\underline{v}_2=(-1,0)$, quindi $\underline{v}_1+\underline{v}_2=\underline{0}$ ma

$$T(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=T(\underline{v}_1)+T(\underline{v}_2)=(2,1)+(0,1)=(2,2)\neq\underline{0}$$

quindi la relazione lineare tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ non si conserva e T non può essere lineare.

Concludendo: Un applicazione T che soddisfi le condizioni può essere lineare se e solo se $a\neq -1$.

1. Se $a=1$, T può avere rango 1 o 2, e due esempi sono, rispettivamente, associati alle matrici
$$(M_T)_{E_2}^B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad \text{e}\qquad (M_T)_{E_2}^B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$
dove $B=(1,2),\underline{e}_1$.

2. Se $a\neq 1$, T ha forzatamente rango 2.

$\square$

Esercizio 3. *(9 pt) Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ associato dalle basi canoniche alla matrice*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare il polinomio caratteristico di T.*
2. *Verificare che T sia diagonalizzabile.*

Soluzione.

1. Calcoliamo

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 1$$

2. Per determinare gli autovalori, dobbiamo risolvere l'equazione polinomiale complessa di terzo grado

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Sappiamo che esistono tre radici complesse, vediamo se si tratta di tre radici semplici o se ci sono radici multiple.

Dato che

$$\gcd(p_T(\lambda), p_T'(\lambda)) = \gcd(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 1, -3\lambda^2 + 6\lambda - 1) = 1$$

non ci sono radici multiple, quindi i tre autovalori sono distinti e T è diagonalizzabile.

N.B. Possiamo svolgere i calcoli del gcd di cui sopra mediante l'Algoritmo Euclideo, prendendo λ al posto di x

```
GCDPolyVerbose(-x^3 + 3x^2 - x + 1,-3x^2 + 6x - 1);

(-x^3 + 3x^2 - x + 1)=(1/3x - 1/3)*(-3x^2 + 6x - 1)+(4/3x + 2/3)

(-3x^2 + 6x - 1)=(-3/2x + 15/4)*(2x + 1)+(-19/4)

(2x + 1)=(-2x - 1)*(-1)+(0)

La sequenza delle coppie e'

[-x^3 + 3x^2 - x + 1, -3x^2 + 6x - 1]
[-3x^2 + 6x - 1, 2x + 1]
[2x + 1, -1]
[-1,0]
```

e questo ci dice che il gcd è 1. Alternativamente, potremmo altresì notare che le radici del secondo polnomio sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

e che dato che $p_T\left(\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right) \neq 0$ queste non sono radici del primo. I polinomi non hanno radici comuni in $\mathbb{C}$ e questo ci dice che il loro gcd è 1.

$\square$