Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 5 Giugno

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss, le soluzioni dell'equazione $\frac{z^9+z}{z^4-1}$.

   Soluzione: $z = 0, z = e^{i\pi(\frac{1+2k}{8})}, k = 0 \ldots 7$

2. Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

   Soluzione: $a - a^2$

3. (2pt) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$, e quando esiste, l'inversa della matrice del punto precedente.

   Soluzione: $a \neq 0, 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ \frac{1}{a^2-a} & \frac{1}{a-1} & 1 \\ \frac{1}{a-a^2} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix}$

4. Dati i due $\mathbb{R}$-sottospazi di $\mathbb{R}^3$ $V = \mathrm{Span}((1,1,0),(3,2,0))$ e $W = \mathrm{Span}((0,1,2),(0,4,7))$ determinare una base di $V \cap W$.

   Soluzione: Una base è, per esempio, $B = \underline{e}_2$. [In ogni caso, $V \cap W = \mathrm{Span}(\underline{e}_2)$]

5. Determinare $\gcd(x^{768} + x^{432} - 3x^2 + 7, x^{111} - 2x^{54} + 1)$.

   Soluzione: $\gcd = 1$

6. Le due matrici
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sono simili?

Soluzione: No. [Non hanno lo stesso determinante]

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. *(8 pt) Dati* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i tre sottospazi*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x+3y-\alpha z = 0\}, \\ V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x+8y+(\alpha-1)z = 0\}, \\ V_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; 2x+\alpha y-3z = 0\} \end{aligned}$$

Determinare gli α *tali che* $\dim V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 1$

Soluzione. Sappiamo che

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+3y-\alpha z = 0 \\ x+8y+(\alpha-1)z = 0 \\ 2x+\alpha y-3z = 0 \end{cases} \right\}$$

Quindi la dimensione dell'intersezione è uguale alla dimensione delle soluzioni del sistema. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\alpha \\ 1 & 8 & \alpha-1 \\ 2 & \alpha & -3 \end{pmatrix}$$

la matrice associata al sistema, per il Teorema della dimensione $\dim \mathrm{Sol}(A\cdot\underline{x}=\underline{0}) = 3 - rk\,A$. □

Il rango di A *è sempre almeno* 2*, dato che la sotto matrice* $A_{(1,2);(1,2)}$ *è non singolare. Calcoliamo il determinante, con Sarrus o con un passo di riduzione e Laplace. Usiamo* x *al posto di* α*.*

```
M:=Mat([[1, 3,    -x],
        [1, 8, x - 1],
        [2, x,    -3]])
-------------------------------
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 3, -x]
     2^a-1*1^a [0, 5, 2x - 1]
     3^a-2*1^a [0, x - 6, 2x - 3]
```

E

$$\det A = 5(2\alpha-3) - (2\alpha-1)(\alpha-6) = -2\alpha^2 + 23\alpha - 21$$

Risolviamo l'equazione $2\alpha^2 - 23\alpha + 21 = 0$ *con la formula ed abbiamo*

$$\alpha_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{361}}{4} = \frac{23 \pm 19}{4} = 1, \frac{21}{2}$$

Quindi $rk(A) = 2$ *se e solo se* $\alpha = 1, \frac{21}{2}$.

Concludendo, $\dim V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 3 - rk\, A = 1$ *se e solo se* $\alpha = 1, \frac{21}{2}$

Esercizio 2. *(8 pt)*

1. *Per quali $a \in \mathbb{R}$ una funzione $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfi le condizioni*

$$\begin{array}{rcl} T((a+1,a)) & = & (a^2+1,0) \\ T((4,a+1)) & = & (2a^2+2,0) \\ T((2a,2)) & = & (0,3) \end{array}$$

   è un morfismo?

2. *Nei casi in cui T sia un morfismo, dire se è diagonalizzabile.*

Soluzione.

1. Denominamo i vettori $\underline{v}_1 = (a+1,a), \underline{v}_2 = (4,a+1), \underline{v}_3 = (2a,2)$. Vediamo quando $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti col metodo della matrice

$$\det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 4 & a+1 \end{pmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

   La matrice è non singolare se e solo se $a \neq 1$. Distinguiamo i casi

   (a) Se $a \neq 1$ i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, e quindi base di $\mathbb{R}^2$. Il vettore $\underline{v}_3$ è quindi linearmente dipendente da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, ma

$$(0,3) = T(\underline{v}_3) \notin \operatorname{Span}(T(\underline{v}_1), T(\underline{v}_2)) = ((a^2+1,0),(2a^2+2,0)) = ((1,0))$$

   Quindi T non può essere morfismo.

   (b) Se $a = 1$, tenendo la denominazione precedente dei vettori, le condizioni divengono

$$\begin{array}{rcl} T((2,1)) & = & (2,0) \\ T((4,2)) & = & (4,0) \\ T((2,2)) & = & (0,3) \end{array}$$

   ed una base B di $\mathbb{R}^2$ è formata da $\underline{v}_1, \underline{v}_3$, dato che $\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1$ e i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_3$ sono chiaramente linearmente indipendenti. Dato che

$$T(\underline{v}_2) = 2T(\underline{v}_1)$$

   le condizioni sono compatibili e un applicazione T che soddisfi le condizioni date può essere un morfismo, e precisamente il morfismo associato alla matrice

$$(M_T)^B_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ con } B = (2,1),(2,2)$$

2. Prendendo il morfismo T definito alla fine del punto precedente, determinamo

$$\begin{aligned}
(M_T)_E^E &= (M_T)_E^B \cdot M_B^E \\
&= (M_T)_E^B \cdot M_E^{B\,-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico di T

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 3$$

è libero da quadrati, come si vede immediatamente o dal fatto che

$$\gcd(\lambda^2 - 5\lambda + 3, 2\lambda - 5) = 1$$

(potevamo anche risolvere $\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$) e quindi ha due radici distinte. L'endomorfismo T è quindi diagonalizzabile.

Riassumendo, una funzione T soddisfa le condizioni date è um morfismo se e solo se $a = 1$, ed in questo caso è diagonalizzabile.

□

Esercizio 3. *(8 pt) Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato dalle basi canonica alla matrice*

$$(M_T)_E^E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Verificare che T sia diagonalizzabile.*
2. *Determinare una matrice diagonale D e una matrice M tali che $(M_T)_E^E = M \cdot D \cdot M^{-1}$*

Soluzione.

1. Dato che $(M_T)_E^E$ è simmetrica, T è diagonalizzabile.
2. Le matrici richieste esistono, dato che T è diagonalizzabile. Determiniamo quindi $D = (M_T)_B^B$, una matrice diagonale associata a T, una base di autovettori B e la corrispondente matrice di cambio base $M = M_E^B$, considerando la formula $(M_T)_E^E = M_E^B\, (M_T)_B^B\, M_B^E$.

   Calcoliamo con Laplace (III riga)

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -2\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -2(2(2-\lambda)) + (2-\lambda)((2-\lambda)(9-\lambda)-4) \\ & \quad \text{raccogliamo } 2-\lambda \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) \end{aligned}$$

   Troviamo le radici del polinomio quadratico con la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{2} = 1, 10$$

   Quindi $p_T(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(10-\lambda)$.

   I tre autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 10$. Determinimao le basi dei tre autospazi, la cui unione mi da una base di autovettori. In ognuno dei tre casi, riduciamo la matrice associata al sistema con Gauss e troviamo la soluzione

$$V_1 = \ker(A - 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Il sistema diviene $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $(2, 1, -2)$. Quindi $V_1 = \text{Span}((2, 1, -2))$.

   Analogamente

$$V_2 = \ker(A - 2 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span}((1, 0, 1))$$

$$V_3 = \ker(A - 10 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1, -4, -1))$$

Concludendo, una possibile coppia di matrici soluzione dell'esercizio è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\square$