Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 30 Gennaio

PRIMA PARTE
PUNTEGGIO: risposta corretta = 1 pt
PUNTEGGIO: risposta assente o sbagliata = 0 pt
SCRIVERE SU QUESTO FOGLIO SOLTANTO il risultato

Le spiegazioni NON devono essere presenti nel testo consegnato.

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $z^5 = \overline{z}^5$.

   Sol: Le semirette $\theta = \frac{k}{5}\pi$, con $k = 0, \ldots, 9$.

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare A^{-1}.

   Sol: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Dati $V = \mathrm{Span}((0,1,2),(0,1,3)) \quad W = \mathrm{Span}((1,0,2),(1,0,3))$ determinare $V \cap W$.

   Sol: $V \cap W = \mathrm{Span}((0,0,1))$.

4. Calcolare $\gcd(x^6 - x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 2, x^2 - 3x + 2)$.

   Sol: $x - 1$.

5. Dire se le tre funzioni

   $$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-1 \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5x-4 \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3x+2 \end{array}$$

   in $\{F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ sono linearmente indipendenti.

   Sol: No.

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni.

Esercizio 1. *(10pt) Dati i sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathrm{Span}((1,2,0,2),(1,0,1,0)) \quad W = \mathrm{Span}((3,4,1,4),(k+1,k+6,k^2-2,k^3+6))$$

determinare $\dim V$*,* $\dim W$ *e basi di* $V+W$*,* $V \cap W$ *al variare di* $k \in \mathbb{R}$*.*

Soluzione. Dato che i generatori di V non sono multipli l'uno dell'altro, $\forall\, k \in \mathbb{R}$ $\dim V = 2$.

Esaminiamo la matrice formata per righe dai generatori di W.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ k+1 & k+6 & k^2-2 & k^3+6 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\det A_{(1,2);(1,2)} = -k+14$ e $\det A_{(1,2);(1,3)} = 3k^2-k-7$. Dato che il sistema

$$\begin{cases} -k+14=0 \\ 3k^2-k-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k+14=0 \\ 567=0 \end{cases}$$

è impossibile, abbiamo che almeno una sottomatrice quadrata di ordine 2 di A è non singolare, A ha rango due e quindi $\forall\, k \in \mathbb{R}$ $\dim W = 2$.

Costruiamo la matrice che ha per colonne i generatori prima di V e poi di W e riduciamola con Gauss.

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[1, 1, 3,   k + 1],
        [2, 0, 4,   k + 6],
        [0, 1, 1, k^2 - 2],
        [2, 0, 4, k^3 + 6]]);
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,  3,        k + 1]
     2^a-2*1^a [0, -2, -2,       -k + 4]
  0 sotto pivot[0,  1,  1,      k^2 - 2]
     4^a-2*1^a [0, -2, -2, k^3 - 2k + 4]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  1,  3,      k + 1]
-------------- [0, -2, -2,     -k + 4]
   3^a+1/2*2^a [0,  0,  0, k^2 - 1/2k]
     4^a-1*2^a [0,  0,  0,    k^3 - k]
```

```
Se k^2 - 1/2k <>0 Ovvero se k<>0,1/2 ho un pivot e posso procedere.
I casi k=0,1/2 saranno trattati a parte a partire dalla matrice

A:=Mat([[1,  1,  3,      k + 1],
        [0, -2, -2,     -k + 4],
        [0,  0,  0, k^2 - 1/2k],
        [0,  0,  0,    k^3 - k]]);


Proseguiamo la riduzione

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=k^2 - 1/2k

--------------             [1,  1,  3,      k + 1]
--------------             [0, -2, -2,     -k + 4]
--------------             [0,  0,  0, k^2 - 1/2k]
4^a(-k^2 + 1)/(k - 1/2)*3^a [0,  0,  0,          0]
```

Esaminiamo i vari casi

- $k \neq 0, 1/2$. Abbiamo tre pivot, nella prima, seconda e quarta colonna, quindi una base di $V + W$ è data dalla prima, seconda e quarta colonna della matrice M

  $$B = (1, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 0)), (k + 1, k + 6, k^2 - 2, k^3 + 6)$$

  Dato che la terza colonna non ha pivot, la terza colonna della matrice M è combinazione lineare delle prime due, e il vettore $(3, 4, 1, 4)$ appartiene sia a V che a W. Dato che per Grassmann $\dim V \cap W = 2 + 2 - \dim(V + W) = 4 - 3 = 1$, il vettore $(3, 4, 1, 4)$ forma una base di $V \cap W$.

- $k = 0$. La matrice A diviene, dopo la sostituzione

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  con due pivot, nella prima e seconda colonna. Quindi la terza e quarta colonna della matrice di partenza sono combinazioni lineari della prima e seconda, e $V = W$, $\dim V + W = 2$ ed una base di $V \cap W = V + W = V$ è una base di V, per esempio $B = (1, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 0)$.

- $k = 1/2$. La matrice A diviene, dopo la sostituzione

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3/2 \\ 0 & -2 & -2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/8 \end{pmatrix}$$

Abbiamo tre pivot, nella prima, seconda e quarta colonna, e la situazione è uguale a quanto visto nel caso $k \neq 0, 1/2$.

Riassumendo, per ogni $k \in \mathbb{R}$ $\dim V = \dim W = 2$ **e**

1. **se** $k = 0$ **una base di** $V + W = V \cap W = V$ **è** $B = (1, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 0)$**.**
2. **Se** $k \neq 0$ **una base di** $V + W$ **è**

$$B = (1, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 0), (k + 1, k + 6, k^2 - 2, k^3 + 6)$$

   ed una base di $V \cap W$ **è** $(3, 4, 1, 4)$

$\square$

Esercizio 2. *(10pt) Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che esista un morfismo $T\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ che soddisfi le condizioni*

$$\begin{aligned} T(x^2+1) &= x^2+2x \\ T(2x^2+x) &= 2x^2+x \\ T(x^2+2x-3) &= x^2+(k-4)x+k \\ T(2x+1) &= 3x^2+2x \end{aligned}$$

Per i k determinati sopra, trovare

1. $rk\, T$, $\dim\ker T$.
2. *Se* $\sqrt{7}x^2+\pi x \in \operatorname{Im} T$.
3. *Se* $\pi x^2+e^2x+1 \in \operatorname{Im} T$.

Soluzione. Per comodità, trasportiamo il problema in $\mathbb{R}^3$ mediante l'isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & 1 & \mapsto & \underline{e}_3 \\ & x & \mapsto & \underline{e}_2 \\ & x^2 & \mapsto & \underline{e}_1 \end{array}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} F(x^2+1) &= (1,0,1) = \underline{v}_1 \\ F(2x^2+x) &= (2,1,0) = \underline{v}_2 \\ F(x^2+2x-3) &= (1,2,-3) = \underline{v}_3 \\ F(2x+1) &= (0,2,1) = \underline{v}_4 \end{aligned}$$

.

Con lieve abuso di notazione, chiamiamo sempre T il nuovo morfismo che deve soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned} T((1,0,1)) &= (1,2,0) = F(x^2+2x) \\ T((2,1,0)) &= (2,1,0) = F(2x^2+x) \\ T((1,2,-3)) &= (1,k-4,k) = F(x^2+(k-4)x+k) \\ T((0,2,1)) &= (3,2,0) = F(3x^2+2x) \end{aligned}$$

.

Cerchiamo le relazioni lineari tra i vettori $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_4$ col metodo delle varabili tag, mettendo $\underline{v}_3$ per ultimo nella matrice (associato alla variabile t), in quanto vorremmo scegliere una base che non lo contenga per semplificare la descrizione dell'immagine

```
Use R::=Q[x,y,z,t];
M:=Mat([[1, 0, 1, x],
        [2, 1, 0, y],
        [0, 2, 1, z],
        [1, 2,-3, t]]);
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 1, x]
     2^a-2*1^a [0, 1, -2, -2x + y]
  0 sotto pivot[0, 2, 1, z]
     4^a-1*1^a [0, 2, -4, -x + t]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0,  1,           x]
-------------- [0, 1, -2,     -2x + y]
     3^a-2*2^a [0, 0,  5, 4x - 2y + z]
     4^a-2*2^a [0, 0,  0, 3x - 2y + t]
```

e quindi $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ sono inearmente indipendenti e formano una base B di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo la relazione

$$3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$$

Perchè T possa essere un morfismo, la relazione appena trovata deve essere conservata da T. Dobbiamo avere

$$\begin{aligned}
T(3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3) &= \underline{0} \\
3T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) + T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\
3(1,2,0) - 2(2,1,0) + (1, k-4, k) &= \underline{0} \\
(-1,4,0) + (1, k-4, k) &= \underline{0} \\
(0,k,k) &= \underline{0}
\end{aligned}$$

Quindi T ̀morfismo se e solo se $k = 0$.

$$(M_T)^B_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo le altre domande

1. È evidente che $rk\,T = rk\,(M_T)^B_{E_3} = 2$. Quindi per il Teorema della Dimensione $\dim\ker T = 3 - rk\,T = 1$.

2. Notiamo che tutti i generatori di $\operatorname{Im} T$ hanno terza componente nulla. Dato che

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z = 0\}$$

ha dimensione due (è descritto da una sola equazione cartesiana) e contiene i generatori di $\operatorname{Im} T$, che ha dimensione due, abbiamo che $\operatorname{Im} T = W$, ovvero che i vettori di $\operatorname{Im} T$ sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ con terza componente nulla. Riportandoci in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$,

$$\operatorname{Im} T = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \ \mid \ \text{il termine noto di } f(x) \text{ è nullo}\}$$

Quindi $\sqrt{7}x^2 + \pi x \in \operatorname{Im} T$.

3. Per le stesse ragioni $\pi x^2 + e^2 x + 1 \notin \operatorname{Im} T$.

Riassumendo: T è morfismo se e solo se $k = 0$. In questo caso,

1. $rk\, T = 2$ **e** $\dim \ker T = 1$**.**

2. $30x^2 + \pi x \in \operatorname{Im} T$**.**

3. $\pi x^2 + e^2 x + 1 \notin \operatorname{Im} T$**.**

$\square$

Esercizio 3. *(5pt) Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ associato mediante una base B di $\mathbb{K}^3$ alla matrice*

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Discutere al variare di $n \geq 0$ il il rango del morfismo

$$\begin{array}{cccc} G\colon & \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (T^n - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^3})((x,y,z)) \end{array}$$

dove $T^n = T \circ \cdots \circ T$ n volte e $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^3}$ la funzione identica di $\mathbb{K}^3$.

Soluzione. Vediamo se T è diagonalizzabile. In questo caso lo esprimeremo attraverso la matrice associata (diagonale) rispetto alla base B' di autovettori, ai fini di semplificare i calcoli.

Abbiamo

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

Ci sono tre autovalori distinti, $2, 1, -1$. L'endomorfismo è quindi diagonalizzabile ed esiste una base di autovettori B' per cui

$$(M_T)_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata al morfismo $G = T^n - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^3}$ é

$$\begin{aligned} (M_G)_{B'}^{B'} = \left((M_T)_{B'}^{B'}\right)^n - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ed abbiamo i seguenti casi

1. Se $n = 0$ la matrice è nulla ed il rango è quindi zero.
2. Se n è pari non nullo, c'e un solo pivot ed il rango è 1
3. Se n è dispari, ci sono due pivot ed il rango è 2

□