Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 9 Gennaio

PRIMA PARTE
PUNTEGGIO: risposta corretta = 1 pt
PUNTEGGIO: risposta mancante o sbagliata = 0 pt
SCRIVERE SOLTANTO il risultato

Le spiegazioni NON devono essere presenti nel testo consegnato.

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{iz} = e^{2\overline{z}}$.
   Sol: $z = \frac{2}{3}k\pi(1-2i)$.

2. Determinare una descrizione cartesiana dello spazio

   $$W = \mathrm{Span}((1,0,2,3),(5,0,7,12),(0,0,1,1)) \subset \mathbb{R}^4$$

   Sol: $W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} y = 0 \\ x+z-t = 0 \end{cases} \right\}$.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinare una descrizione parametrica dello spazio affine $W = \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2)$
   Sol: $W = \emptyset$.

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare A^{-1} Sol: La matrice non è invertibile.

5. Dato il morfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,0,y,0,z) \end{array}$ determinare $\dim\ker T$.
   Sol: $\dim\ker T = 0$.

6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare il rango su $\mathbb{R}$ della matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 & a & 2-a \\ a & 1 & 0 & 2 & a^3 \\ 3 & 0 & 0 & a & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

   Sol: $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ rk(A) = 5$.

7. Determinare il numero di radici multiple complesse del polinomio $f(x) = 4x^5+10x^4-1$.

   Sol: 0.

8. Determinare il numero di radici reali del polinomio $f(x) = 4x^5 + 10x^4 - 1$.

   Sol: 3.

9. Dire se le due funzioni $\sin x, \sin x \cdot \cos x \in \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ sono linearmente indipendenti.

   Sol: *Si*.

10. Determinare il polinomio minimo dell'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

    Sol: $PM_T(\lambda) = \lambda^3$.

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni.

Esercizio 1. *(6pt) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0 \\ x + yk + y + zk - 2tk + 2t + 2k + 1 = 0 \\ xk + 2x + yk + 3y + zk^2 + 2zk + z - 2tk + 2t + k^2 + 4k + 4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Riduciamo con Gauss la matrice associata al sistema

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[    1,     2, 1,                  0,            3],
        [    1, k + 1, k,           -2k + 2,       2k + 1],
        [k + 2, k + 3, k^2 + 2k+1,  -2k + 2, k^2 + 4k + 4]]);

RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,      2,           1,       0,           3]
     2^a-1*1^a [0,  k - 1,       k - 1, -2k + 2,      2k - 2]
 3^a-k - 2*1^a [0, -k - 1, k^2 + k - 1, -2k + 2, k^2 + k - 2]

Noto che la seconda riga e' multiple di k-1. Suppongo k diverso da 1.
Il caso k=1 e' svolto a parte. Posso dividere per k-1 ed ottengo la matrice

 [1,  2,       1,0,     3]
 [0,  1,       1,      -2,     2]
 [0, -k - 1, k^2 + k - 1, -2k + 2, k^2 + k - 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2,       1,    0,        3]
-------------- [0, 1,       1,   -2,        2]
 3^a+k + 1*2^a [0, 0, k^2 + 2k, -4k, k^2 + 3k]
```

Distinguiamo i casi a seconda dei valori di k che annullano uno dei pivot, ricordando il caso $k = 1$

- $k \neq 0, -2, 1$: il rango dell'incompleta è 3, forzando il rango della completa ad essere 3 ed abbiamo $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.
- $k = 0$: il rango dell'incompleta è 2, come il rango della completa. Abbiamo $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

- $k = -2$: il rango dell'incompleta è 3, forzando il rango della completa ad essere 3 ed abbiamo $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.

- $k = 1$: La matrice diviene

  ```
  M:=Mat([[1, 2, 1, 0, 3],
          [0, 0, 0, 0, 0],
          [0, -2, 1, 0, 0]]);
  ```

  il rango dell'incompleta è 2, come il rango della completa. Abbiamo $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

$\square$

Esercizio 2. *(6pt) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ discutere la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ descritto dalla matrice*

$$(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k+3 & -k-1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Determiniamo il polinomio caratteristico di T, calcolando

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & k+3-\lambda & -k-1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = p_T(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - (k+2)\lambda + 2k)$$

sviluppando per la prima colonna. Uno degli autovalori é $\lambda = 1$, per trovare gli altri due risolviamo con incognita λ e parametro k l'equazione

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - (k+2)\lambda + 2k &= 0 \\
\lambda &= \frac{k+2 \pm \sqrt{(k+2)^2 - 8k}}{2} \\
\lambda &= \frac{k+2 \pm \sqrt{(k-2)^2}}{2} \\
\lambda &= \frac{k+2 \pm \mid k-2 \mid}{2} \\
\lambda &= \frac{k+2 \pm (k-2)}{2} \\
\lambda &= 2, k
\end{aligned}$$

Gli autovalori sono $1, 2, k$. Avrei potuto trovare gli autovalori diversi da 1 verificando che $p_T(2) = p_T(k) = 0$. Abbiamo i tre casi

- $k \neq 1, 2$: tre autovalori distinti, T è diagonalizzabile.

- $k = 1$: Abbiamo l'autovalore 2 di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1 e l'autovalore 1 con $\mathrm{ma}(1) = 2$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(1)$

$$\mathrm{mg}(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & k+3-\lambda & -k-1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}_{k=1,\lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

  Quindi $\mathrm{ma}(1) \neq \mathrm{mg}(1)$ e T non è diagonalizzabile.

- $k = 2$: Abbiamo l'autovalore 1 di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1 e l'autovalore 2 con $\mathrm{ma}(2) = 2$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(2)$

$$\mathrm{mg}(2) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & k+3-\lambda & -k-1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}_{k=2,\lambda=2} = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

  Quindi $\mathrm{ma}(2) \neq \mathrm{mg}(2)$ e T non è diagonalizzabile..

□

Esercizio 3. *(10pt) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti e $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi tale che*

$$\begin{aligned} T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 2a\underline{v}_3) &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 3\underline{v}_3 \\ T(a\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3) &= a\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3 \\ T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 3\underline{v}_3) &= \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 2a\underline{v}_3 \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Discutere la diagonalizzabiltà di T.

Soluzione. Dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, formano una base B' di $\mathbb{R}^3$. Scriviamo i vettori

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 2a\underline{v}_3, \quad \underline{w}_2 = a\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3, \quad \underline{w}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 3\underline{v}_3$$

in questa base

$$\underline{w}_1 = (1, -1, 2a), \quad \underline{w}_2 = (a, 1, 2), \quad \underline{w}_3 = (1, 1, 3)$$

e vediamo per quali a sono linearmente indipendenti,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2a \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2a^2 + a - 1 = (a+1)(a - \frac{1}{2}) = 0$$

Abbiamo lineare indipendenza per $a \neq -1, \frac{1}{2}$. Abbiamo i seguenti casi

1. $a \neq -1, \frac{1}{2}$. I vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ formano una base B di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$$

Abbiamo due autovalori, -1 con $\mathrm{ma}(-1) = 1$ e 1 con $\mathrm{ma}(1) = 2$. Calcoliamo

$$\mathrm{mg}(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

e quindi T è diagonalizzabile.

2. $a = -1$. I vettori $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3$ e $\underline{w}_2 = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3$ e quindi $\underline{w}_1 = -\underline{w}_2$. I vettori $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3$, $\underline{w}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 3\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti e quindi non ho condizioni aggiuntive sulle loro immagini . La condizione $T(\underline{w}_2) = \underline{w}_2$ và verificata. Nel nostro caso, come visto, $\underline{w}_1 = -\underline{w}_2$, quindi

$$\begin{aligned} T(\underline{w}_2) &= \underline{w}_2 \\ T(-\underline{w}_1) &= -\underline{w}_1 \\ T(\underline{w}_1) &= \underline{w}_1 \\ \underline{w}_3 &= \underline{w}_1 \end{aligned}$$

e questo è falso. Per $a = -1$ non esiste un endomorfismo che soddisfi le condizioni.

3. $a = \frac{1}{2}$. Dato che il determinante è nullo, abbiamo almeno una relazione di dipendenza lineare tra i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$. Troviamola e verifichiamo se è conservata da T. Per trovare la relazione troviamo le soluzioni del sistema

$$x\underline{w}_1 + y\underline{w}_2 + z\underline{w}_3 = \underline{0}$$

che scritto nelle coordinate della base $B' = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ diviene

$$x(1, -1, 1) + y(1/2, 1, 2) + z(1, 1, 3) = \underline{0}$$

```
Mat([[1, -1, 1],
     [1/2, 1, 2],
     [1, 1, 3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -1, 1]
   2^a-1/2*1^a [0, 3/2, 3/2]
     3^a-1*1^a [0, 2, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -1, 1]
-------------- [0, 3/2, 3/2]
   3^a-4/3*2^a [0, 0, 0]

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, -1, 1]
     2^a*+2/3  [0, 1, 1]
-------------- [0, 0, 0]

Cancello la colonna sopra il 2  pivot

   1^a*-1*2^a  [1, 0, 2]
-------------- [0, 1, 1]
-------------- [0, 0, 0]
```

Il sistema diviene quindi

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \end{cases}$$

Un vettore generico delle soluzioni è quindi $(-2z,-z,1)=(-2,-1,1)$. Quindi

$$-2\underline{w}_1-\underline{w}_2+\underline{w}_3=\underline{0} \Rightarrow \underline{w}_2=-2\underline{w}_1+\underline{w}_3$$

I vettori $\underline{w}_1,\ \underline{w}_3$ sono inearmente indipendenti e non ho quindi condizioni aggiuntive sulle loro immagini e ricordando che $T(\underline{w}_1)=\underline{w}_3$ e $T(\underline{w}_3)=\underline{w}_1$

$$\begin{array}{rcl} T(\underline{w}_2) & = & \underline{w}_2 \\ T(-2\underline{w}_1+\underline{w}_3) & = & -2\underline{w}_1+\underline{w}_3 \\ -2T(\underline{w}_1)+T(\underline{w}_3) & = & -2\underline{w}_1+\underline{w}_3 \\ -2\underline{w}_3+\underline{w}_1 & = & -2\underline{w}_1+\underline{w}_3 \\ -\underline{w}_3-\underline{w}_1 & = & \underline{0} \\ -(1,-1,1)-(1,1,3) & = & \underline{0} \\ (-2,0,-4) & = & \underline{0} \end{array}$$

che è falso, e quindi per $a = 1/2$ non esiste un endomorfismo che soddisfi le condizioni.

Riassumendo,

- Per $a \neq -1, \frac{1}{2}$ T esiste un unico endomorfismo T che soddisfi le condizioni, ed è diagonalizzabile.
- Per $a = -1, \frac{1}{2}$ T non esiste un endomorfismo T che soddisfi le condizioni.

$\square$