Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 13 Febbraio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni del sistema di equazioni $\begin{cases} z^4 - 2 = 0 \\ z^{64} - 2 = 0 \end{cases}$.

   Soluzioni: $\emptyset$

2. (2pt) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & y+1 & 9 & 2y+2 \\ x+2 & 1 & \pi & 0 \\ 9 & \pi & 1 & 25 \\ 3x-1 & 0 & 25 & 1 \end{pmatrix}$ determinare un valore della coppia (x, y) tale che T_A è diagonalizzabile. Soluzione: $x = 5,\ y = 6$

3. Dati $V = \mathrm{Span}((0,1,2),(0,1,3))$ e $W = \{(x,y,z) \mid x - y + 3z = 0\}$ determinare una base di $V \cap W$. Soluzione: $(0,3,1)$

4. Calcolare $\gcd(x^{17} + x^7 - 3x^2 + 7, x^2 - 2x + 1)$. Soluzione $\gcd = 1$

5. Data $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ base di $\mathbb{R}^3$ calcolare $\dim\ker T$ per

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & (1,1,0,2) \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & (3,4,0,7) \\ & \underline{v}_3 & \mapsto & (0,5,0,9) \end{array}$$

   Soluzione: $\dim\ker T = 0$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. *(9 pt) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ xk - 8x + 2yk - y - 4z = 4 - k \\ -3x + yk^2 + 3y - z = 3 - k^2 \end{cases}$$

e determinare le soluzioni

Soluzione. Costruiamo la matrice associata al sistema e risolviamo con Gauss

```
Use R::=QQ[k];
M:=Mat([[    1,       2,  1,       0],
        [    3,       1,  2,       1],
        [k - 8,  2k - 1, -4,     4-k],
        [   -3, k^2 + 3, -1,   3-k^2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 0]
     2^a-3*1^a [0, -5, -1, 1]
 3^a-k + 8*1^a [0, 15, -k + 4, -k + 4]
     4^a+3*1^a [0, k^2 + 9, 2, -k^2 + 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------       [1, 2, 1, 0]
--------------       [0, -5, -1, 1]
     3^a+3*2^a       [0, 0, -k + 1, -k + 7]
4^a+1/5k^2 + 9/5*2^a [0, 0, -1/5k^2 + 1/5, -4/5k^2 + 24/5]
Moltiplico la terza riga per -5
[1, 2, 1, 0]
[0, -5, -1, 1]
[0, 0, -k + 1, -k + 7]
[0, 0, k^2 - 1, 4k^2 - 24]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-k + 1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  2,      1,             0]
-------------- [0, -5,     -1,             1]
-------------- [0,  0, -k + 1,        -k + 7]
 4^a+k + 1*3^a [0,  0,      0, 3k^2 + 6k - 17]
```

Verifichiamo facilmente che

$$3k^2 + 6k - 17 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-6 \pm \sqrt{240}}{6} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{15}}{6} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{3}$$

- Se $k \neq \frac{-3\pm2\sqrt{15}}{3}$ ho un equazione impossibile e quindi non ho soluzioni.
- Se $k = \frac{-3\pm2\sqrt{15}}{3}$, ho $k-1 \neq 0$ ed ho tre pivot, tre variabili e un unica soluzione. Il sistema diviene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -5y - z = 1 \\ (1-k)z = 7-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/5z + 2/5 \\ y = -1/5z - 1/5 \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/5\frac{7-k}{1-k} + 2/5 \\ y = -1/5\frac{7-k}{1-k} - 1/5 \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1/5k+19/5}{k-1} \\ y = \frac{-2/5k+8/5}{k-1} \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases}$$

Riassumendo:

- **Se $k \neq \frac{-3\pm2\sqrt{15}}{3}$ il sistema non ha soluzioni.**
- **Se $k = \frac{-3\pm2\sqrt{15}}{3}$ ho un unica soluzione,**

$$\begin{cases} x = \frac{-1/5k+19/5}{k-1} \\ y = \frac{-2/5k+8/5}{k-1} \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 2. *(9 pt) Sia dato l'endomorfismo* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con matrice associata*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 3k & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$

1. *Calcolare* $\mathrm{sp}(T)$*.*
2. *Dire se* T *è diagonalizzabile.*
3. *Determinare una base di* T*-autovettori di* $\mathbb{R}^3$*.*
4. *Determinare altre due basi di* T*-autovettori di* $\mathbb{R}^3$*.*

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico di T è

   $$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k-1 \\ 3k & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k-1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

   Quindi $\mathrm{sp}(T) = \{1, 2\}$.

2. T è diagonalizzabile se e solo se $\mathrm{mg}(1) = 2$. Calcoliamo

   $$\begin{aligned} \mathrm{mg}(1) &= 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k-1 \\ 3k & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1} \\ &= 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 \\ 3k & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 3-1=2 & \text{se } k=1 \\ 3-2=1 & \text{se } k \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   Quindi T è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$.

3. Per $k = 1$ determinamo basi di V_{λ_1}, V_{λ_2}

   - Per $V_{\lambda_1} = \mathrm{Sol}([(M_T)_{E_3}^{E_3} - I_3]\underline{x} = \underline{0}) = \mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0}\right)$ Il sistema è

     $$\begin{cases} 3x + y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 5z \end{cases}$$

     quindi aggiungiamo questa condizione ad un vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per ottenere un vettore generico

     $$(x, -3x-5z, z) = x(1, -3, 0) + (0, -5, 1)$$

     di V_{λ_1}. Una base di V_{λ_1} è quindi $(1, -3, 0), (0, -5, 1)$.

- Per $V_{\lambda_2} = \text{Sol}([(M_T)_{E_3}^{E_3} - 2I_3]\underline{x} = \underline{0}) = \text{Sol}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0}\right)$ Il sistema è

$$\begin{cases} -x = 0 \\ 3x + 5z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  aggiungiamo queste condizioni ad un vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per ottenere un vettore generico

$$(0, y, 0) = y(0, 1, 0)$$

  di V_{λ_2}. Una base di V_{λ_2} è quindi $(0, 1, 0)$.

Dato che T è diagonalizzabile, una base B di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T si ottiene dall'unione delle basi degli autospazi, e quindi $B = (1, 0, 0), (0, -5, 1), (0, 1, 0)$.

4. Altre due basi costituite da autovettori di T sono

$$B' = (1, -3, 0), (0, -5, 1), 2(0, 1, 0) = (1, -3, 0), (0, -5, 1), (0, 2, 0)$$

e

$$B'' = (1, -3, 0), (0, -5, 1) + (1, -3, 0), (0, 1, 0) = (1, -3, 0), (1, -8, 1), (0, 1, 0)$$

Riassumendo:

1. $\text{sp}(T) = \{1, 2\}$**.**

2. T **è diagonalizzabile se e solo se** $k = 1$**.**

3. Per $k = 1$**, una base di** $\mathbb{R}^3$ **formata da autovettori è** $B = (1, 0, 0), (0, -5, 1), (0, 1, 0)$**.**

4. Altre due basi $\mathbb{R}^3$ **formate da autovettori sono**

$$B' = (1, -3, 0), (0, -5, 1), (0, 2, 0) \text{ **e** } B'' = (1, -3, 0), (1, -8, 1), (0, 1, 0)$$

$\square$

Esercizio 3. *(6 pt) Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ determinare tutti i morfismi $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni*

$$\begin{aligned}
T((1,2,1)) &= (1,1,0)\\
T((1,1,2)) &= (0,1,1)\\
T((-1,2,-5)) &= (a+b+3,-a,-4)\\
T((1,5,-2)) &= (5-a,b+2,-3)\\
T((0,0,1)) &= (a+b,b+c,-c)\\
rk\,T &= 2
\end{aligned}$$

Soluzione. □

Determiniamo le relazioni lineari tra i cinque vettori

$$\underline{v}_1 = (1,2,1),\ \underline{v}_2 = (1,1,2),\ \underline{v}_3 = (-1,2,-5),\ \underline{v}_4 = (1,5,-2),\ \underline{v}_5 = (0,0,1))$$

mediante il metodo delle variabili tag.

```
Use R::=QQ[a,b,c,v[1..5]];
M:=Mat([[ 1, 2,  1, v[1]],
        [ 1, 1,  2, v[2]],
        [-1, 2, -5, v[3]],
        [ 1, 5, -2, v[4]],
        [ 0, 0,  1, v[5]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, v[1]]
     2^a-1*1^a [0, -1, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a+1*1^a [0, 4, -4, v[1] + v[3]]
     4^a-1*1^a [0, 3, -3, -v[1] + v[4]]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, v[5]]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1,   v[1]]
-------------- [0, -1, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a+4*2^a [0,  0, 0, -3v[1] + 4v[2] + v[3]]
     4^a+3*2^a [0,  0, 0, -4v[1] + 3v[2] + v[4]]
  0 sotto pivot[0,  0, 1,  v[5]]
```

Una base di $\mathbb{R}^3$ è quindi data da $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ e T deve soddisfare le relazioni

$$T(-3\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2 + \underline{v}_3) = \underline{0} \quad e \quad T(-4\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 + \underline{v}_4) = \underline{0}$$

- *Per la prima abbiamo*

$$\begin{aligned} -3T(\underline{v}_1)+4T(\underline{v}_2)+T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\ -3(1,1,0)+4(0,1,1)+(a+b+3,-a,-4) &= \underline{0} \\ (a+b,-a+1,0) &= \underline{0} \end{aligned}$$

- *Per la seconda abbiamo*

$$\begin{aligned} -4T(\underline{v}_1)+3T(\underline{v}_2)+T(\underline{v}_4) &= \underline{0} \\ -4(1,1,0)+3(0,1,1)+(5-a,b+2,-3) &= \underline{0} \\ (-a+1,b+1,0) &= \underline{0} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+1=0 \\ -a+1=0 \\ b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori di a, b *nella matrice*

$$(M_T)^B_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b \\ 1 & 1 & b+c \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c-1 \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$$

e vediamo che ha rango almeno due dato che la sua sottomatrice

$$\left((M_T)^B_{E_3}\right)_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare ed ha rango due se e solo se il suo determinante è nullo, ovvero se (sviluppiamo per la prima riga)

$$-c-(c-1)=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$

Dato che il rango della matrice $(M_T)^B_{E_3}$ *è la dimensione dell'immagine e quindi il rango del morfismo* T, $rk\,T = 2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Riassumendo: Esiste un morfismo che soddisfa le condizioni se e solo se $a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$.