Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2023/24

Caboara

Esame scritto 24 Giugno

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Semplificare $\frac{(2+2i)^5}{(1-i)^3}$

   Soluzione: 64

2. Dare una rappresentazione cartesiana del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ con vettore generico $(a, a+b, a+b+c, a-b)$.

   Soluzione: $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ 2x - y - t = 0\}$

3. Determinare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+b & 2 \\ b & 0 & c & 1 \\ a+b & 1 & a+b+c & 3 \end{pmatrix}$$

   Soluzione: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}\ \ rk(A) = 2$

4. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Soluzione: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dato un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e sapendo che $\gcd(f(x), f'(x)) = (x-1)^2$ determinare il numero di fattori primi di molteplicità 3 di $f(x)$.

   Soluzione: 1, solo $x - 1$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema con tre incognite x, y, z, quattro equazioni ed il parametro a.*

$$\begin{pmatrix} 0 & a-1 & 2 \\ 2a & a^2 & 0 \\ a & a & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Riduciamo la matrice associata al sistema con Gauss.

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat([[0,  a-1, 2,   1],
        [2a, a^2, 0, a-1],
        [a,    a, 2,   1]]);
Scambio la 1^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
M:=Mat([[a, a,     2,     1],
        [0, a - 1, 2,     1],
        [2a,  a^2, 0, a - 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, a, 2, 1]
  0 sotto pivot[0, a - 1, 2, 1]
     3^a-2*1^a [0, a^2 - 2a, -4, a - 3]
Suppongo a<>1, trattero' a parte il caso a=1
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=a - 1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------            [a,     a,                  2,                  1]
--------------            [0, a - 1,                  2,                  1]
3^a(-a^2 + 2a)/(a - 1)*2^a [0,     0, (-2a^2 + 4)/(a - 1), (-2a + 3)/(a - 1)]
```

Dato che $a \neq 1$ moltiplico la terza riga per $a - 1$ ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} a & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2a^2+4 & -2a+3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo le varie possibilità

1. $a \neq 1$.
   (a) $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$. Abbiamo tre pivot, esiste unica soluzione.

(b) $a = 0$. Sostituiamo nella matrice

$$\begin{pmatrix} 2a & a^2 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2 & a-3/2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La prima riga ci dice che non esistono soluzioni.

(c) $a = \pm\sqrt{2}$. Sostituiamo nella matrice

$$\begin{pmatrix} 2a & a^2 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2 & a-3/2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{2} & 2 & 0 & \pm\sqrt{2}-1 \\ 0 & \pm\sqrt{2}-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{2}-3/2 \end{pmatrix}$$

L'incompleta ha rango 2, la completa 3 e quindi non esistono soluzioni.

2. $a = 1$. Sostituiamo nella matrice precedente alla divisione per $a - 1$,

$$\begin{pmatrix} 2a & a^2 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2a^2+a & 2 & -1/2a+3/2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'incompleta ha rango massimo e quindi esiste un unica soluzione.

Riassumendo, il sistema non ha soluzioni per $a = 0, \pm\sqrt{2}$, ha un unica soluzione altrimenti.

$\square$

Esercizio 2 (8pt). *Sia $a \in \mathbb{R}$ ed un morfismo $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfi le condizioni*

$$F((a,1)) = (1,a) \qquad F((1,a)) = (a,1)$$

Determinare per quali a esista un endomorfismo che soddisfi le condizioni date. In questi casi,

1. *determinare $(M_F)_B^B$ per una opportuna base B;*
2. *determinare per quali a l'endomorfismo F sia surgettivo;*
3. *trovare almeno un $a \in \mathbb{R}$ tale che l'endomorfismo F non sia sia diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Vediamo per quali a i vettori $(a,1),(1,a)$ formano una base B di $\mathbb{R}^2$.

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = a^2 - 1$$

- Se $a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$ la matrice è non singolare ed i due vettori $(a,1),(1,a)$ sono indipendenti e formano quindi una base B di $\mathbb{R}^2$. Il morfismo è ben definito e

  $$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Dato che questa matrice è non singolare, il morfismo è un isomorfismo, e quindi surgettivo. Calcoliamo il polinomio caratteristico

  $$p_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

  Dato che non ci sono radici nel campo F non è diagonalizzabile.

- Se $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$ le condizioni divengono

  1. Se $a = 1$ $F((1,1)) = (1,1)$. Scegliamo la base $B = (1,1),(1,0)$. Non abbiamo condizioni sull'immagine del secondo vettore, quindi prendiamo $F((1,0)) = (x,y)$ considerando il vettore (x,y) in base B con $x,y \in \mathbb{R}$. La matrice associata al morfismo rispetto alla base B è

     $$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

     Il morfismo è surgettivo se e solo se $(M_F)_B^B$ è non singolare, ovvero se e solo se $y \neq 0$.
  2. Se $a = -1$ le condizioni deventano

     $$F((-1,1)) = (1,-1) \quad \text{e } = F((1,-1) = (-1,1)$$

     che sono compatibili dato che la combinazione linerare dei vettori del dominio è

     $$(-1,1) + (1,-1) = \underline{0}$$

e le loro immagini soddifano la stessa combinazione linerare

$$F((-1,1)) + F((1,-1)) = (1,-1) + (-1,1) = \underline{0}$$

e quindi le condizioni si riducono per esempio a

$$F((-1,1)) = (1,-1) = -(-1,1)$$

Procediamo come sopra. Completiamo il vettore $(-1,1)$ a base $B = (-1,1),(1,0)$ di $\mathbb{R}^2$. Non abbiamo condizioni sull'immagine del secondo vettore, quindi prendiamo $F((1,0)) = (x,y)$ considerando il vettore (x,y) in base B con $x,y \in \mathbb{R}$. dato che $F((-1,1)) = (1,-1) = -(-1,1)$, la matrice associata al morfismo rispetto alla base B è

$$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

e quindi rimane tutto analogo a quanto abbiamo fatto nel caso $a = 1$, sia per la surgettività sia per la diagonalizzabilità.

Ricapitoliamo:

- Esiste F morfismo che soddisfa le condizioni per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- Se $a \neq \pm 1$ abbiamo che
$$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ed F è surgettivo ma non diagonalizzabile.
- Se $a = 1$ consideriamo la base $B = (1,1), \underline{v}$ con $\underline{v} = (x,y)_B$ (in coordinate B). In questo caso abbiamo che
$$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
ed F è surgettivo se e solo se $y \neq 0$.
- Analogamente se $a = -1$ consideriamo la base $B = (-1,1), \underline{v}$ con $\underline{v} = (x,y)_B$ (in coordinate B). In questo caso abbiamo che
$$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
ed F è surgettivo se e solo se $y \neq 0$.

$\square$

Un altro approccio è considerare $\underline{v}$ in coordinate E_2, e trovare $(M_F)_B^B$ per un opportuna base B mediante la formula di cambiamento di base per morfismi, ma questo approccio porta calcoli più complessi.

Esercizio 3 (8pt)**.** *Date* $a, b \in \mathbb{R}$ *e l'endomorfismo* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *associato dalle basi canoniche alla matrice*

$$(M_F)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Discutere la diagonalizzabilità di F *al variare di* a, b.

Dimostrazione. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a\lambda - b$$

Risolviamo $\lambda^2 - a\lambda^2 - b$ con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

1. Se $a^2 + 4b < 0$ non abbiamo autovalori nel campo e quindi F non è diagonalizzabile.

2. Se $a^2 + 4b > 0$ abbiamo due autovalori distinti e quindi F è diagonalizzabile.

3. Se $a^2 + 4b = 0$ abbiamo un unico autovalore $\lambda_0 = \frac{a}{2}$ di molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la molteplicità geometrica, ricordando che $a^2 + 4b = 0$

$$\mathrm{mg}(\lambda_0) = 2 - rk \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{|\lambda = \frac{a}{2}} = 2 - rk \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} = 2 - rk(M)$$

   Indicando la matrice come M. Dato che $\det M = -\frac{a^2}{4} - b = -\left(\frac{a^2+4b}{4}\right) = 0$, e che M ha l'entrata $(2,1)$ non nulla, abbiamo che $rk(M) = 1$ e quindi $\mathrm{mg}(\lambda_0) = 1 \neq 2 = \mathrm{ma}(\lambda_0)$. L'endomorfismo F non è quindi diagonalizzabile.

Conclusioni: F è diagonalizzabile se e solo se $a^2 + 4b > 0$. $\square$