Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2023/24

Caboara

Esame scritto 3 Giugno

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Determinare i numeri reali tra i complessi $\sqrt[3]{(1+i)^4}$
   Soluzione: $-\sqrt[3]{4}$
2. Determinare una base del sottospazio vettoriale $V = \left\{ (x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \;\mid\; \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \right\}$
   Soluzione: $B = (1,-1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)$
3. Determinare al variare di $\boxed{a,b,c,d,e \in \mathbb{Q}}$ il rango della matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & a & e & b \\ 1 & c & \sqrt{2} & d \end{pmatrix}$$
   Soluzione: $\forall\ a,b,c,d,e \in \mathbb{Q}\ \ rk(A) = 2$
4. Calcolare l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Soluzione: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
5. Determinare il numero di radici complesse di molteplicità 3 delpolinomio $(x-1)(x^5-1)(x^9-1)$
   Soluzione: Solo $x = 1$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt)**.** *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema con tre incognite x, y, z, quattro equazioni ed il parametro a.*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 2a & a & 0 \\ -a & a & a \\ a & a & -a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Riduciamo la matrice associata al sistema con Gauss, fin quando i conti vengono semplici, poi usiamo Rouchè-Capelli.

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat([[a,  0,      2, a],
        [2a, a,      0, 1],
        [-a, a,      a, 1],
        [a,  a, -a + 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, 0, 2, a]
     2^a-2*1^a [0, a, -4, -2a + 1]
     3^a+1*1^a [0, a, a + 2, a + 1]
     4^a-1*1^a [0, a, -a, -a + 1]
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, 0, 2, a]
-------------- [0, a, -4, -2a + 1]
     3^a-1*2^a [0, 0, a + 6, 3a]
     4^a-1*2^a [0, 0, -a + 4, a]

Se a=-6, sostituisco e scambio la terza e la quarta riga.

M:=Mat([[-6, 0, 2, -6],
        [0, -6, -4, 13],
        [0, 0, 10, -6],
        [0, 0, 0, -18]]);

Se diverso da -6, procedo con la riduzione

Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
--------------          [a, 0,     2,                  a]
--------------          [0, a,    -4,            -2a + 1]
--------------          [0, 0, a + 6,                 3a]
4^a+(a - 4)/(a + 6)*3^a [0, 0,     0, (4a^2 - 6a)/(a + 6)]
```

Considerando l'ultima riga, è immediato che il sistema non ha soluzioni a meno che $4a^2 - 6a = 0$, ovvero $a = 0$ o $a = \frac{3}{2}$. Ricordiamo che dobbiamo anche considerare la condizione $a \neq -6$.

1. $a = 0$. Sostituendo otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   L' incompleta ha rango 1 mentre la matrice completa ha rango 2. Non esistono soluzioni.

2. $a = \frac{3}{2}$. Sostituendo otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice incompleta ha tre pivot, e rango quindi tre. La completa è forzata ad avere rango tre. Dato che ci sono tre variabili, esiste un unica soluzione.

3. $a = -6$, ricordiamo che abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -6 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

   la matrice incompleta ha rango 3 e la completa rango 4. Non esistono soluzioni.

Riassumendo, il sistema ha un unica soluzione per $a = \frac{3}{2}$, altrimenti è impossibile. $\square$

Esercizio 2 (8pt)**.** *Sia $a \in \mathbb{R}$ ed un morfismo $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfi le condizioni*

$$F((1,2)) = (a, a-1) \qquad F((a,1)) = (a-1, a)$$

Determinare

1. *Per quali a esista un morfismo che soddisfi le condizioni date.*
2. *Per quali a questo morfismo sia iniettivo.*
3. *Per quali a questo morfismo sia surgettivo.*
4. *Per quali a questo morfismo sia invertibile.*
5. *Determinare $(M_F)_{E_2}^{E_2}$.*

Dimostrazione.

1 *Per quali a esista un morfismo che soddisfi le condizioni date.* Vediamo per quali a i vettori $(1,2),(a,1)$ formano una base B di $\mathbb{R}^2$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2a$$

- Se $1 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$ la matrice è non singolare ed i due vettori $(1,2),(a,1)$ sono indipendenti e formano quindi una base di $\mathbb{R}^2$. Il morfismo è ben definito e

$$(M_F)_{E_2}^{B} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$$

- Se $a = \frac{1}{2}$, i vettori sono $(1,2), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ le condizioni divengono

$$F((1,2)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad F\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

e dato che

$$2\left(\frac{1}{2}, 1\right) = (1,2)$$

ma

$$F\left(2\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-1,1) \neq F((1,2)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

per $a = \frac{1}{2}$ non esistono morfismi che sodisfano le condizioni date

Supporremo nel prosieguo di avere $a \neq \frac{1}{2}$.

2,3,4 Dato che F quando esiste è un endomorfismo, F è iniettivo se e solo se F è surgettivo se e solo se F è invertibile se e solo se $(M_F)_{E_2}^{E_2}$ è non singolare se e solo se per una base B di $\mathbb{R}^2$ $(M_F)_{E_2}^{B}$ è non singolare. Dato che

$$\det (M_F)_{E_2}^{B} = \det\begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} = 2a - 1 \neq 0 \ \left(\text{siamo nelle condiz.) } a \neq \frac{1}{2}\right)$$

questa ultima condizione è verificata, e quindi anche tutte le altre.

Nota bene. L'ultima equivalenza discende dal teorema di Binet applicato alla formula

$$(M_F)_{E_2}^{E_2} = (M_F)_{E_2}^{B}\, M_B^{E_2}$$

5 Determinare $(M_F)_{E_2}^{E_2}$. Usiamo la formula

$$\begin{aligned}
(M_F)_{E_2}^{E_2} &= (M_F)_{E_2}^{B}\, M_B^{E_2} \\
&= (M_F)_{E_2}^{B}\, \left(M_{E_2}^{B}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \frac{1}{1-2a} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-2a} \begin{pmatrix} -a+2 & -a^2+a-1 \\ -a-1 & -a^2+2a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ricapitoliamo: Un morfismo F che soddisfi le condizioni esiste se e solo se $a \neq \frac{1}{2}$. In questi casi, il morfismo è iniettivo, surgettivo ed invertibile, e $(M_F)_{E_2}^{E_2} = \dfrac{1}{1-2a} \begin{pmatrix} -a+2 & -a^2+a-1 \\ -a-1 & -a^2+2a \end{pmatrix}$

$\square$

Esercizio 3 (8pt)**.** *Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato dalle basi canoniche alla matrice*

$$(M_F)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Discutere la diagonalizzabilità di F al variare di a.

Dimostrazione. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(a+1) = -\lambda^2(\lambda - a - 1)$$

Abbiamo i tre autovalori

$$\lambda_{1,2} = 0, \ \lambda_3 = a + 1$$

1. I tre autovalori possono essere tutti e tre coincidenti (a 0) se e solo se $a = -1$. In questo caso abbiamo $p_F(\lambda) = -\lambda^3$ e la molteplicità algebrica dell'unico autovalore è 3, mentre

$$rk \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & a \\ a & 1-\lambda & a \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{a=-1,\lambda=0} = rk \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

   quindi $\mathrm{mg}(\lambda_1) = 3 - 1 = 2 \neq \mathrm{ma}(\lambda_1) = 3$ e F non è diagonalizzabile.

2. Possiamo avere due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = 0$ e un terzo $\lambda_3 = a + 1 \neq 0$ se e solo se $a \neq -1$. Le molteplicità algebrica e geometrica di λ_3 coincidono ($\mathrm{ma}(\lambda_3) = 1$). Calcoliamo

$$\mathrm{mg}(\lambda_{1,2}) = 3 - rk \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & a \\ a & 1-\lambda & a \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} = 3 - rk \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

   quindi $\mathrm{mg}(\lambda_{1,2}) = 2 = \mathrm{ma}(\lambda_{1,2})$ e F è diagonalizzabile.

Conclusioni: F è diagonalizzabile se e solo se $a \neq -1$. □