Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 26 Gennaio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni di $e^z = e^{\overline{z}}$ con $z \in \mathbb{C}$.

   Soluzione: sul piano xy, tutte le rette orizzontali $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

2. Determinare una descrizione cartesiana del sottospazio vettoriale $V = \operatorname{Span}((1,1,i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$

   Soluzione: $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x - y = 0 \\ ix - z = 0 \end{cases} \right\}$

3. Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} a^2+1 & 3 & a^4+1 & 1 & 2 \\ a^2+1 & 2 & a^4+1 & \sqrt{3} & 17 \\ a^2+1 & 3 & a^4+1 & 3 & 2 \\ a^2+1 & 3 & a^4+1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

   Soluzione: 4

4. Calcolare l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Soluzione: $M^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

5. Determinare una base di $V = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ \underline{v} \perp (2, i, i)\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$

   Soluzione: per esempio $B = \left(\frac{i}{2}, -1, 0\right), \left(\frac{i}{2}, 0, -1\right)$

6. Calcolare $\gcd_{\mathbb{C}}(x^2 + 2ix - 1, x + i)$

   Soluzione: $(x + i)$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (9pt). *Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 3 & a & 0 \\ a-2 & -a & a+2 \\ a+2 & a & -a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Riduciamo la matrice associata al sistema con Gauss. Scegliamo di non scambiare righe ma esaminiamo a parte il caso $a = 0$ per cui il primo pivot diviene nullo. tiamo quindi supponendo $a \neq 0$. Riduciamo con Gauss.

```
M:=Mat([[    a,  0,      2, 1],
        [    3,  a,      0, 1],
        [a - 2, -a,  a + 2, 1],
        [a + 2,  a, -a + 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
--------------    [a, 0, 2, 1]
   2^a-3/a*1^a    [0, a, -6/a, (a - 3)/a]
3^a(-a + 2)/a*1^a [0, -a, (a^2 + 4)/a, 2/a]
4^a(-a - 2)/a*1^a [0, a, (-a^2 - 4)/a, -2/a]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=a
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, 0, 2, 1]
-------------- [0, a, -6/a, (a - 3)/a]
     3^a+1*2^a [0, 0, (a^2 - 2)/a, (a - 1)/a]
     4^a-1*2^a [0, 0, (-a^2 + 2)/a, (-a + 1)/a]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=(a^2 - 2)/a
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, 0,          2,         1]
-------------- [0, a,       -6/a, (a - 3)/a]
-------------- [0, 0, (a^2 - 2)/a, (a - 1)/a]
     4^a+1*3^a [0, 0,           0,        0]
```

Esaminiamo i vari casi con Rouchè-Capelli:

1. $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$. Abbiamo tre pivot nella matrice completa e incompleta, e tre variabili. Quindi esistono ∞^{3-3} soluzioni, ovvero un unica soluzione.

2. $a = \pm\sqrt{2}$. Abbiamo due pivot nella matrice incompleta e tre nella completa, il sistema è impossibile

3. $a = 0$. Non possiamo usare la matrice ridotta, dobbiamo prendere in considerazione la matrice originaria. La matrice associata al sistema diviene

```
M:=Mat([[ 0, 0, 2, 1],
        [ 3, 0, 0, 1],
        [-2, 0, 2, 1],
        [ 2, 0, 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 0, 0, 1],
     [0, 0, 2, 1],
     [-2, 0, 2, 1],
     [2, 0, 2, 1])
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [3, 0, 0,   1]
  0 sotto pivot[0, 0, 2,   1]
   3^a+2/3*1^a [0, 0, 2, 5/3]
   4^a-2/3*1^a [0, 0, 2, 1/3]
```

La terza riga ci dice che $z = -\frac{5}{6}$, la quarta che $z = -\frac{1}{6}$. Il sistema è impossibile.

Riassumendo, il sistema ha un unica soluzione per $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$, altrimenti è impossibile. $\square$

Esercizio 2 (4+1+3=8pt). *Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determinino le applicazioni lineari $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni*

$$\begin{aligned} &T((0,2,-2)) = (1,-2,3) \\ &T((1,-2,3)) = (0,4,-4) \\ &\dim\ker T = 1 \end{aligned}$$

Si determininino altresì

A) *(1pt) per ogni T, una base di* $\ker T$.

B) *(3pt) per ogni T, una base del* ker *di $T^5\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (la composizione di T con se stessa quattro volte).*

Soluzione. Iniziamo considerando le prime due condizioni.

I due vettori $\underline{v}_1 = (0,2,-2)$, $\underline{v}_2 = (1,-2,3)$ sono chiaramente linearmente indipendenti. Completiamoli a base B di $\mathbb{R}^3$:

$$B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1$$

I tre vettori sono linearmente indipendenti (e quindi base di $\mathbb{R}^3$) dato che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2$$

Descriviamo l'endomorfismo in base B. Sappiamo che $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$ e $T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1$. L'immagine di $\underline{e}_1$ non dipende dalle prime tre condizioni, è quindi libera e $T(\underline{e}_1) = (a,b,c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

La terza condizione iniziale ci dice che $\dim\ker T = 1$, ovvero, per il teorema della dimensione, che

$$rk\,T = rk\,(M_T)_B^B = rk\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = 2$$

È immediato che $rk\,(M_T)_B^B = 2 \Leftrightarrow c = 0$. Possiamo quindi porre $c = 0$ e

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

A) Determiniamo una base di $\ker T$, notando che i vettori sono espressi in base B.

$$\begin{aligned}
\ker T &= \left\{(x,y,z)_B \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ (M_T)_B^B \cdot (x,y,z)_B = \underline{0}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)_B \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)_B = \underline{0}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)_B \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \begin{cases} 2y + az = 0 \\ x + bz = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)_B \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \begin{cases} y = -\frac{a}{2} z \\ x = -bz \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\left(-bz, -\frac{a}{2}z, z\right)_B \ \mid \ z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{z\left(-b, -\frac{a}{2}, z\right)_B \ \mid \ z \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

una cui base è $\left(-b, -\frac{a}{2}, 1\right))_B$ (in coordinate B), da cui

$$\ker T = \operatorname{Span}\left(\left(-b, -\frac{a}{2}, 1\right)_B\right)$$

B) Determiniamo la matrice associata a T^5 mediante il polinomio caratteristico ed il teorema di Cayley-Hamilton.

Abbiamo che

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & a \\ 1 & -\lambda & b \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2) = -\lambda^3 + 2\lambda$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton, indicando $A = (M_T)_B^B$ per semplicità di notazione, abbiamo

$$p_T(A) = 0 \Leftrightarrow -A^3 + 2A = 0 \Leftrightarrow A^3 = 2A$$

da cui

$$A^5 = A^3 A^2 = 2AA^2 = 2A^3 = 4A$$

Quindi $(M_{T^5})_B^B = 4\,(M_T)_B^B$ e quindi in coordinate B abbiamo che $\ker T = \ker\,(M_T)_B^B = \ker\,(M_{T^5})_B^B = \ker T^5$ e

$$\ker T^5 = \operatorname{Span}\left(\left(-b, -\frac{a}{2}, 1\right)_B\right)$$

In conclusione, data la base $B = \ \underline{v}_1 = (0,2,-2), \underline{v}_2 = (1,-2,3), \underline{e}_1$ l'endomorfismo T ha matrice associata

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } a, b \in \mathbb{R}$$

e $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \quad \ker T = \ker T^5 = \operatorname{Span}\left(\left(-b, -\frac{a}{2}, 1\right)_B\right)$ $\square$

Esercizio 3 (9pt). *Dato l'endomorfismo su* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, x+2y, x+z) \end{array}$$

Discutere la diagonalizzabilità di T.

Dimostrazione. Dato che

$$T(\underline{e}_1) = (1,1,1) \qquad T(\underline{e}_2) = (2,2,0) \qquad T(\underline{e}_3) = (3,0,1)$$

la matrice associata a T mediante la base canonica E_3 è

$$(M_T)^E_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il poinomio carateristico è

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6$$

Uasndo il criterio delle radici, vediamo dopo alcuni facili controlli che $p_T(\pm 1), p_T(\pm 2), p_T(\pm 3), p_T(\pm 6)$ non sono nulli, e quindi $p_T(\lambda)$ non ha radici razionali. Usiamo l'algoritmo di Sturm per vedere se esistono radici multiple (stiamo calcolando il gcd) e contare le radici reali, usando x al posto di λ per ragioni tecniche. Stamo appliando l'algoritmo di Sturm al calcolo di

$$\gcd(p_T(\lambda), p'_T(\lambda)) = \gcd(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6, 3\lambda^2 - 8\lambda)$$

```
(x^3 - 4x^2 + 6)=(-1/3x + 4/9)*(-3x^2 + 8x)+(-32/9x + 6)
(-3x^2 + 8x)=(-3/16x + 47/256)*(16x - 27)+(1269/256)
(16x - 27)=(-16x + 27)*(-1)+(0)

Lista delle coppie  [[x^3 - 4x^2 + 6, -3x^2 + 8x],
                     [-3x^2 + 8x, 16x - 27],
                     [16x - 27, -1]]
Record[GCD = -1, Sequence = [x^3 - 4x^2 + 6, -3x^2 + 8x, 16x - 27, -1]]
```

Dato che il gcd è una costante, $\gcd(p_T(\lambda), p'_T(\lambda)) = 1$. Le radici del polinomio caratteristico, e quindi gli autovalori, sono tutte distinte (sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$). Vediamo se tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$ contando le radici reali mediante l'algoritmo di Sturm, avendo calcolato la sequenza nel passo precedente.

```
CoefficientsAndDegreesSequence;
[-1, 3, -16, 1]   Numero di Variazioni: 3
-------------------------------
CoefficentsSequence;
[1, 3, 16, 1] Numero di Variazioni: 0
```

Il numero di radici reali è $3 - 0 = 3$.

Conclusioni: Il numero di radici reali (e degli autovalori reali) è quindi $3 - 0 = 3$. Gli autovalori sono quindi tutti in $\mathbb{R}$ e a due a due distinti, e T è diagonalizzabile. $\square$