Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 8 Gennaio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$: $\overline{z}z^2 = \overline{z}^2 z^3$

   Soluzione: $\{z \in \mathbb{C} \ \mid \ \mid z \mid = 0, 1\}$

2. Determinare la dimensione di $V = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \underline{v} \perp (1,2,1),\ \underline{v} \perp (5,2,3),\ \underline{v} \perp (3,2,2)\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

   Soluzione: $\dim V = 1$

3. Determinare le $a \in \mathbb{R}$ tali che la matrice $\begin{pmatrix} \mid a \mid +3 & -\mid a \mid \\ a^4 & a^2+1 \end{pmatrix}$ sia invertibile

   Soluzione: $\forall\ a \in \mathbb{R}$

4. Dire perchè il polinomio minimo del morfismo $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di matrice $(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ è $\lambda^2 - 7\lambda$

   Soluzione: Dato che la $(M_T)_{E_2}^{E_2}$ ha ordine 2, la sua traccia è 7 ed il suo determinate è nullo, $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda$. Dato che $(M_T)_{E_2}^{E_2}$ non è diagonale, il grado del polinomio minimo deve essere 2, e coincide quindi col polinomio caratteristico, che è monico.

5. Dare una descrizione parametrica dello spazio vettoriale

$$V = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{v} = \underline{0} \right\}$$

Soluzione: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

6. Determinare due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{C}^2$ tali che $A = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^2 \;\mid\; \underline{v} \perp \underline{v}\} = V_1 \cup V_2$

   Soluzione: $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \;\mid\; x + iy = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \;\mid\; x - iy = 0\}$ oppure $V_1 = \mathrm{Span}(i, 1), \quad V_2 = \mathrm{Span}(1, i)$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt)**.** *Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{pmatrix} a & a+2 & 0 & a \\ 2a & 0 & 1 & 2a+2 \\ 3a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Soluzione. Usiamo il Teorema di Rouchè-Capelli.

Innanzitutto, notiamo che la prima colonna è divisibile per a. Distinguiamo quindi i casi

1. $a = 0$. La matrice completa del sistema diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

   è immediato vedere che il rango della completa ed incompleta sono uguali a 3 ed il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni.

2. $a \neq 0$. Possiamo procedere con l'assunzione $a \neq 0$ e dividendo la prima colonna e la colonna dei termini noti per a. La matrice completa del sistema diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a+2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2a+2 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & a+1 & 1 \end{array}\right)$$

   calcoliamo il determinante della matrice incompleta

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & a+2 & 0 & a \\ 2 & 0 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a & a+1 \end{pmatrix} &= -(a+2) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2a+2 \\ 3 & a & 0 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \\ &= -(a+2) \left(-3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix} - a \det \begin{pmatrix} 2 & 2a+2 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -(a+2) \left(-3(a+1-2a(a+1)) - a \cdot 0 \right) \\ &= 3(a+2)(a+1)(1-2a) \end{aligned}$$

   Esaminiamo i quattro casi

   (a) $a \neq -1, -2, \frac{1}{2}$. Il rango dell'incompleta è 4, forzando il rango della completa ad essere 4. Per il teorema di Rouchè-Capelli, esiste unica soluzione.

(b) $a=-1$ e dato che il suo determinante è nullo, il rango dell'incompleta è ≤ 3. La matrice diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a+2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2a+2 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & a+1 & 1 \end{array}\right)_{|a=-1} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = A$$

dato che $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$ è chiaramente non singolare, il rango dell'incompleta è 3 mentre il rango della completa è 4 ($A_{(1,2,3,4);(1,2,3,5)}$ è non singolare). Non esistono qundi soluzioni.

(c) $a=-2$ e dato che il suo determinante è nullo, il rango dell'incompleta è ≤ 3. La matrice diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a+2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2a+2 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & a+1 & 1 \end{array}\right)_{|a=-2} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) = A$$

dato che

$$\det A_{(1,2,3);(1,3,4)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 10 \neq 0$$

il rango della incompleta è 3, mentre il rango della completa è chiaramente 4 (la sottomatrice $A_{(1,2,3,4);(1,3,4,5)}$ è non singolare). Non esistono qundi soluzioni.

(d) $a=\frac{1}{2}$ e dato che il suo determinante è nullo, il rango dell'incompleta è ≤ 3. La matrice diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a+2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2a+2 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & a+1 & 1 \end{array}\right)_{|a=\frac{1}{2}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) = A$$

dato che $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$ è chiaramente non singolare, il rango dell'incompleta è 3 mentre il rango della completa è 4 ($A_{(1,2,3,4);(1,2,3,5)}$ è non singolare). Non esistono qundi soluzioni.

Ricapitolando, la soluzione esiste unica, tranne che per

1. $a=0$, per cui esistono ∞^1 soluzioni, e
2. per $a=-1,-2,\ \dfrac{1}{2}$, per cui non esistono soluzioni.

$\square$

N.B. Se avessimo voluto discutere le soluzioni dopo una riduzione di Gauss, avremmo proceduto come segue:

```
M:=Mat([[a , a + 2 , 0 , a,0],
        [2a , 0 , 1 , 2 a + 2,0],
        [3a , 0 , a , 0,0],
        [a , 0 , a , a + 1,a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, a + 2, 0, a, 0]
     2^a-2*1^a [0, -2a - 4, 1, 2, 0]
     3^a-3*1^a [0, -3a - 6, a, -3a, 0]
     4^a-1*1^a [0, -a - 2, a, 1, a]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2a - 4
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a, a + 2, 0, a, 0]
-------------- [0, -2a - 4, 1, 2, 0]
   3^a-3/2*2^a [0, 0, a - 3/2, -3a - 3, 0]
   4^a-1/2*2^a [0, 0, a - 1/2, 0, a]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=a - 3/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
--------------              [a,   a + 2, 0, a, 0]
--------------              [0, -2a - 4, 1, 2, 0]
--------------              [0,       0, a - 3/2, -3a - 3, 0]
4^a+(-a + 1/2)/(a - 3/2)*3^a [0,       0, 0, (3a^2 + 3/2a - 3/2)/(a - 3/2), a]
```

Avremmo dovuto considerare a parte il caso $a = \frac{3}{2}$, che avrebbe dato una sola soluzione (caso spurio che non emerge procedendo direttamente con R-C). Dato che

$$3a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(a+1)(2a-1)$$

I pivot si annullano per $a = 0, -1, -2, \frac{1}{2}$, che vanno esaminati a parte ritrovando i risultati precedenti. Se $a \neq 0, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ il sistema ha quattro pivot ed un unica soluzione.

Esercizio 2. *Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determinino le applicazioni lineari $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni*

$$\begin{array}{l} T((1,2,1)) = (3,4,5) \\ T((3,4,5)) = (-2,-4,-2) \\ T((2,3,3)) = (t, t+1/2, t+1) \\ \dim\ker T = 1 \end{array}$$

1. *[8pt] Si trovi, per ogni T, una base di* $\ker T$.
2. *[2pt] Si determini una base del* ker *di $T^5\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (la composizione di T con se stessa quattro volte).*

Soluzione. Iniziamo considerando le prime tre condizioni.

Determiniamo, se esistono, le relazioni tra i vettori $\underline{v}_1 = (1,2,1)$, $\underline{v}_2 = (3,4,5)$, $\underline{v}_3 = (2,3,3)$ mediante la riduzione di Gauss dell'opportuna matrice (metodo delle variabili tag).

```
M:=Mat([[1,2,1,x],
        [3,4,5,y],
        [2,3,3,z]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, x]
     2^a-3*1^a [0, -2, 2, -3x + y]
     3^a-2*1^a [0, -1, 1, -2x + z]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,  2, 1,                x]
-------------- [0, -2, 2,          -3x + y]
   3^a-1/2*2^a [0,  0, 0, -1/2x - 1/2y + z]
```

Abbiamo quindi che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, mentre tra i tre vettori vale la relazione lineare $-1/2\underline{v}_1 - 1/2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3 = \underline{0}$.

Imponiamo che la stessa relazione valga per le loro immagini

$$\begin{aligned} T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) - 2T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\ (3,4,5) + (-2,-4,-2) - 2(t, t+1/2, t+1) &= \underline{0} \\ \begin{cases} -2t+1=0 \\ -2t+2=0 \\ -6t+3=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = 1 \\ t = 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

I sistema è chiaramente impossibile, quindi non esiste t per cui T sia un morfismo. Quindi non esiste un ker e la condizione $\dim\ker T = 1$ non ha senso, come la richiesta di determinare una base del ker di T o T^5. □

Esercizio 3. *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ sia dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (ay+az+x, az+3y, az+z) \end{array}$$

1. *[8pt] Discutere la diagonalizzabilità di T.*
2. *[2pt] Determinare per quali a la base E_3 sia una base di autovettori per T.*

Soluzione. Dato che

$$\begin{array}{rcl} T(\underline{e}_1) & = & T((1,0,0)) = (1,0,0) \\ T(\underline{e}_2) & = & T((0,1,0)) = (a,3,0) \\ T(\underline{e}_3) & = & T((0,0,1)) = (a,a,a+1) \end{array}$$

abbiamo che

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

1. Discutiamo la diagonalizzabilità di T. Abbiamo che

   $$p_t(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 0 & a+1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(a+1-\lambda)$$

   Discutiamo per i tre autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = a+1$:

   (a) $\lambda_1 = \lambda_3 = 1 \Leftrightarrow a = 0$. Abbiamo che $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dato che questa è una matrice diagonale, T è diagonalizzabile.

   (b) $\lambda_2 = \lambda_3 = 3 \Leftrightarrow a = 2$. Abbiamo $\mathrm{ma}(\lambda_1) = 1$ e quindi $\mathrm{mg}(\lambda_1) = 1$. Dato che $\mathrm{ma}(\lambda_2) = 2$, calcoliamo la molteplicità geometrica di λ_2:

   $$\mathrm{mg}(\lambda_2) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 0 & a+1-\lambda \end{pmatrix}_{|a=-2,\lambda=3} = 3 - rk \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

   Quindi $\mathrm{mg}(\lambda_1) = 1 \neq \mathrm{ma}(\lambda_1)$ e T non è diagonalizzabile.

   (c) $a \neq 0, 2$, tutti gli autovalori distinti, endomorfismo diagonalizzabile.

2. Vediamo per quali a la base E_3 sia una base di autovettori per T.

   Sappiamo che E_3 base di $\mathbb{R}^3$ è base di autovettori se e solo se

   $$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

   è diagonale, ovvero se $a = 0$.

Riassumendo,

1. L'endomorfismo T è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 2$.
2. La base E_3 è una base di autovettori per T se e solo se $a = 0$.

$\square$