

Dispense di Algebra Lineare
A.A. 25/26

Massimo Caboara

5 luglio 2026

Queste brevi note sono a complemento del corso di Algebra Lineare, non sostituiscono le lezioni frontali nè tanto meno un libro di testo.

Indice

I	Algebra astratta e complessi	1
1	Prima lezione: Polinomi ed algebra astratta	9
1.1	Polinomi, nozioni di base	9
1.2	Gruppi, anelli, campi	10
1.3	Prodotto cartesiano	12
2	Seconda Lezione - Esercizi	15
2.1	Esercizi svolti	15
2.2	Esercizi proposti	21
3	Terza Lezione - Numeri complessi	23
3.1	Il campo dei complessi	23
3.2	Potenze e radici di un complesso.	29
4	Quarta Lezione - Esercizi	37
4.1	Esercizi svolti	37
4.2	Esercizi proposti	46
4.3	Prima prova di autovalutazione	48
II	Sistemi e matrici	49
5	Quinta Lezione - Sistemi e Gauss	51
5.1	Sistemi lineari su un campo	51
5.2	Metodo di Gauss	53
5.3	Sistemi e matrici	54
5.4	Prodotto Scalare	55
5.5	Operazioni sui sistemi	57
5.6	Forma standard e normale	64
6	Sesta Lezione - Esercizi	69
6.1	Esercizi svolti	69
6.2	Esercizi proposti	88
7	Settima Lezione - Matrici	91
7.1	Indipendenza lineare	91
7.2	Prodotto di matrici	94
7.3	Prodotto di matrici - definizione formale	97
7.4	Anello delle matrici	99

7.5	Matrici invertibili	101
7.6	Prodotto di matrici non quadrate	106
7.7	Matrice trasposta	108
7.8	Matrici a Blocchi	110
8	Ottava lezione - Esercizi	113
8.1	Indipendenza lineare	113
8.2	Prodotto di matrici	116
8.3	Matrici elementari	117
8.4	Matrici non quadrate	118
8.5	Esercizi proposti	123
8.6	Seconda prova di autovalutazione	128
III	Determinante e rango	129
9	Nona lezione - Determinante	131
9.1	Determinante	131
9.2	Operazioni di Gauss e determinante	136
9.3	Determinante e lineare indipendenza	142
10	Decima lezione - Esercizi	145
10.1	Esercizi svolti	145
10.2	Tag variable Gauss	153
10.3	Esercizi proposti	155
11	Undicesima lezione - Rango	159
11.1	Rango di una matrice	159
11.2	Rango e matrici a scala	160
11.3	Il teorema di Rouché-Capelli	167
12	Dodicesima lezione - Esercizi	169
12.1	Calcoli in $\mathbb{K}(\underline{a})$	169
12.2	Dipendenze lineari	172
12.3	Esercizi vari	173
12.4	Come usare la riduzione	177
12.5	Esercizi Rango e Rouché-Capelli	178
12.6	Formula di Cramer e formula dell' inversa	194
12.7	Esercizi proposti	200
12.8	Terza prova di autovalutazione	203
IV	Spazi Vettoriali	205
13	Tredicesima Lezione - Spazi Vettoriali	207
13.1	Definizione e prime proprietà	207
13.2	Sottospazi	208
13.3	Generatori	209
13.4	Basi	211
13.5	Rappresentazione unica e coordinate	213
13.6	Dimensione	215

14 Quattordicesima lezione - Esercizi	219
14.1 Complementi	219
14.2 Esercizi svolti	220
14.2.1 Spazi vettoriali	220
14.2.2 Basi	222
14.3 Esercizi proposti	226
14.3.1 Coordinate	228
15 Quindicesima lezione - Operazioni sui sottospazi	229
15.1 Operazioni sui sottospazi	229
15.2 Generatori della somma di spazi	230
15.3 Il Teorema di Rouché-Capelli	231
15.4 Formula di Grassman	234
15.5 Somma diretta di sottospazi	239
16 Sedicesima Lezione - Esercizi	245
16.1 Quarta prova di autovalutazione A- esercizi secchi	288
16.2 Quarta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi	290
16.3 Esercizi proposti	295
V Morfismi di spazi vettoriali	299
17 Diciassettesima lezione - Morfismi	301
17.1 Definizione ed esempi di morfismo	301
17.2 Nucleo e immagine	303
17.3 Isomorfismi	305
17.4 Morfismi con dominio di dimensione finita	307
17.4.1 Morfismi e matrici	309
17.5 Teorema della dimensione	311
17.6 Esercizi proposti	313
18 Diciottesima Lezione - Esercizi	319
18.1 Esercizi svolti	319
18.2 Esercizi proposti	332
19 Diciannovesima Lezione - Cambi di base e basi ortogonali	337
19.1 Cambio di base per vettori	337
19.2 Cambio di base per morfismi	339
19.3 Ortogonalità e Ortonormalità	341
19.4 Algoritmo di Graham-Schmidt	341
20 Ventesima Lezione - Esercizi	347
20.1 Esercizi svolti	347
20.2 Descrizioni cartesiane e parametriche	364
20.3 Esercizi proposti	369
20.4 Quinta prova di autovalutazione A- esercizi secchi	371
20.5 Quinta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi	372

VI	Forme speciali per un morfismo: diagonale, Jordan	377
21	Ventunesima lezione - Endomorfismi diagonalizzabili, Forma di Jordan	379
21.1	Matrici simili	379
21.2	Autovalori ed autovettori	384
21.3	Criteri di diagonalizzabilità	391
21.4	Polinomio minimo	393
21.5	Matrici simmetriche e basi ortonormali	397
21.6	Forma di Jordan	397
22	Ventiduesima lezione - Esercizi	401
22.1	Esercizi svolti	401
22.2	Esercizi proposti	414
23	Ventitreesima lezione - Radici e fattorizzazione di Polinomi	421
23.1	Preliminari	421
23.1.1	Polinomi su un campo - fattorizzazioni	421
23.1.2	Irriducibili e fattorizzazioni, Fattorizzazione unica	422
23.1.3	Radici e Ruffini	423
23.2	Massimo comun divisore, minimo comune multiplo	425
23.3	Algoritmo Euclideo	427
23.4	Criterio della derivata	428
23.5	Fattorizzazioni in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$	430
23.6	Sequenze di Sturm	432
24	Ventiquattresima lezione - Esercizi	437
24.1	Criterio di Eisenstein	437
24.2	Esercizi svolti	438
24.3	Esercizi proposti	454
24.4	Sesta prova di autovalutazione A- esercizi secchi	459
24.5	Sesta prova di autovalutazione B compito	459
A	Spazi affini	463
A.1	Esercizi proposti	468

Parte I

Algebra astratta e complessi

Capitolo 1

Prima lezione: Polinomi ed algebra astratta

1.1 Polinomi, nozioni di base

Definizione 1.1. [AAX00] Definiamo come $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali. Dato un polinomio

$$f(x) \in \mathbb{R}[x], \quad f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } a_n \neq 0$$

1. Il grado di $f(x)$ è n , e si scrive $\deg f(x)$. Il grado del polinomio 0 non è definito.
2. I reali $a_n, \dots, a_0$ sono i coefficienti del polinomio.
3. I termini del polinomio sono gli x^i per cui il corrispondente coefficiente a_i sia non nullo.
4. Il termine di testa di $f(x)$ è x^n .
5. Il coefficiente di testa di $f(x)$ è a_n .
6. Il termine noto di $f(x)$ è a_0 (abuso di notazione - termine è ambiguo ma di uso corrente).

Esempio 1.2. [AAA03] Dato $f(x) = x^5 + 2x - 1$

1. $\deg(f(x)) = 5$.
2. Il termine di testa è x^5 . Il coefficiente di testa è 1.
3. Il termine noto è -1 .
4. I coefficienti di $f(x)$ sono $a_5 = 1, a_4 = 0, a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = -1$. I termini di $f(x)$ sono $x^5, x^1, 1 = x^0$.

Definizione 1.3. [AAA01] Siano $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, con ovviamente $\deg(f) = n, \deg(g) = m$ e $n \geq m$. Allora

- Principio di identità dei polinomi (Ovvero i due polinomi sono uguali come polinomi):

$$f(x) \equiv_{\mathbb{R}[x]} g(x) \Leftrightarrow n = m \text{ e } \forall i : 0, \dots, n \quad a_i = b_i$$

- *Somma e prodotto*

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i \quad \text{ponendo } b_i = 0 \text{ per } i > m$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{d=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^d a_i \cdot b_{d-i} \right) x^d$$

Esempio 1.4. [AA03]

- I polinomi $f(x) = x^5 + 2x - 1$ e $g(x) = x^3 + 2x - 1$ sono diversi dato che hanno grado diverso. Scriviamo $f(x) \not\equiv g(x)$.
- $x^2 - 2x + 1 \not\equiv x^2 - 2x + 3$ dato che hanno il termine noto diverso.

Osservazione 1.5. [AAQ05] Ricordiamo che l'espressione

$$x^2 \equiv 1$$

è una uguaglianza tra due polinomi dati, x^2 e 1 il cui risultato è FALSO, mentre l'espressione

$$x^2 = 1$$

è una equazione sui reali, ad incognita x , le cui soluzioni sono $x = \pm 1$. In questo secondo caso, l'insieme delle soluzioni dell'equazione si può scrivere, più formalmente, come

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$$

Osservazione 1.6. [AAA05] Il polinomio somma di due polinomi ha grado minore od uguale al massimo dei gradi dei due. Il polinomio prodotto di due polinomi non nulli ha grado la somma dei gradi dei due polinomi.

Esempio 1.7. [AAZ05] Siano dati $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ polinomi in $\mathbb{R}[x]$. Allora

$$\begin{array}{rcl} (x^2 + 2x - 1) \cdot (x^3 - x^2 + x + 2) & = & \begin{array}{l} x^2 \cdot (x^3 - x^2 + x + 2) + \\ + 2x \cdot (x^3 - x^2 + x + 2) + \\ - 1 \cdot (x^3 - x^2 + x + 2) \end{array} \\ & = & x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2 \end{array}$$

Osservazione 1.8. [AAC07] Ricordiamo che ogni numero pari si può scrivere come $2n$ ed ogni numero dispari come $2n + 1$ per un opportuno n intero. Se preferite dirlo in altro modo, per ogni numero intero dispari a esiste n intero tale che $a = 2n + 1$. Oppure possiamo dire

$$\forall a \text{ intero dispari } \exists n \text{ intero tale che } a = 2n + 1$$

Analogamente per i pari.

1.2 Gruppi, anelli, campi

Alcune equazioni, e i gli ambiti dove hanno soluzioni.

- $x - 2 = 0$. Soluzioni nei numeri naturali $\mathbb{N}$.
- $x + 2 = 0$. Non ci sono soluzioni naturali. Soluzioni nei numeri interi $\mathbb{Z}$.

- $3x - 2 = 0$. Non ci sono soluzioni intere. Soluzioni nei numeri razionali $\mathbb{Q}$.
- $x^2 - 2 = 0$. Non ci sono soluzioni razionali. Soluzioni nei numeri reali $\mathbb{R}$.
- $x^2 + 2 = 0$. Non ci sono soluzioni reali. Soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Definizione 1.9. [AAA87] Sia G un insieme, $e \in G$ e $\oplus$ un operazione tra elementi di G tale che

1. per ogni $a \in G$, $a \oplus e = a$. (e è l'elemento neutro per l'operazione $\oplus$).
2. Per ogni $a, b, c \in G$ $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$. Ha quindi senso scrivere $a \oplus b \oplus c$. Si possono quindi evitare queste parentesi. diciamo che $\oplus$ è un operazione associativa.
3. per ogni $a \in G$, $a \neq e$, esiste $b \in G$ tale che $a \oplus b = b \oplus a = e$. Questo b si dice inverso e spesso si indica come a^{-1} .

Allora $(G, e, \oplus)$ si dice gruppo. Se $a \oplus b = b \oplus a$ (l'operazione $\oplus$ è commutativa) per ogni $a, b \in G$, allora $(G, e, \oplus)$ si dice Gruppo commutativo.

Esempio 1.10. [AAA12] Gli insiemi con operazioni $(\mathbb{Z}, 0, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\}, 1, \cdot)$, $(\mathbb{K}[x], 0, +)$, $(\mathbb{K}[x, y, z], 0, +)$ (polinomi nelle tre variabili x, y, z) sono gruppi commutativi

Osservazione 1.11. [AAA18] Siano $A \subset B$ insiemi e $\odot$ un operazione su A . Allora B si dice chiuso rispetto all'operazione $\odot$ se per ogni $x, y \in B$ abbiamo che $x \odot y \in B$.

Esempio 1.12. [AAA19] L'insieme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto, ma non all'estrazione di radice quadrata.

Osservazione 1.13. [AAA40] Ricordiamo che non tutte le operazioni sono commutative o associative. L'elevamento a potenza non è nè associativo nè commutativo, dato che

$$3^{2^7} = \boxed{3^{(3^3)} \neq (3^3)^3} = 3^9 \quad \text{e} \quad 3^2 \neq 2^3$$

Osservazione 1.14. [AAA13] Ricordiamo che il simbolo $\forall$ significa "per ogni", il simbolo $\exists$ significa "esiste", il simbolo $\exists!$ significa "esiste unico", il simbolo $\nexists$ significa "non esiste".

Definizione 1.15. [AAA14] Sia A un insieme, $0, 1 \in A$ e $\oplus, \odot$ operazioni tali che

1. $(A, 0, \oplus)$ sia un gruppo commutativo con neutro 0 (neutro additivo).
2. $\forall a \in A$, $0 \odot a = a \odot 0 = 0$.
3. $\forall a \in A$, $a \odot 1 = a$. (1 è neutro moltiplicativo).
4. $\forall a, b, c \in A$ $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus a \odot c$ (distributività del prodotto sulla somma)
5. $\forall a, b, c \in A$ $(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus c \odot a$ (distributività del prodotto sulla somma ad destra, nel caso l'anello sia non commutativo)

Allora $(A, 0, 1, \oplus, \odot)$ si dice anello. Se $a \odot b = b \odot a$ per ogni $a, b \in A$, allora $(A, 0, 1, \oplus, \odot)$ si dice anello commutativo. (se l'operazione $\odot$ commuta....)

Esempio 1.16. [AAA15] $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$, $(\mathbb{K}[x], 0, 1, +, \cdot)$, $(\mathbb{K}[x, y, z, t], 0, 1, +, \cdot)$ sono anelli commutativi.

Osservazione 1.17. [AAQ15] Per semplicità spesso indicheremo un gruppo od un anello omettendo i neutri, se questi sono ovvi.

Osservazione 1.18. [AAW13] *L'anello è una generalizzazione dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con le loro operazioni standard. Il campo è una generalizzazione dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le loro operazioni standard.*

Definizione 1.19. [AAA16] *Sia $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un anello commutativo tale che per ogni $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ esista $b \in \mathbb{K}$ tale che $a \odot b = b \odot a = 1$. Allora $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ si dice campo e b l'inverso moltiplicativo di a o inverso e si indica come a^{-1} o in alcuni casi $\frac{1}{a}$.*

Esempio 1.20. [AAA17] $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sono campi. Se

$$\mathbb{K}(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], g(x) \not\equiv_{\mathbb{K}[x]} 0 \right\}$$

allora $(\mathbb{K}(x), +, \cdot)$ è un campo, e si dice campo delle funzioni razionali o campo delle frazioni di $\mathbb{K}[x]$.

Osservazione 1.21. [AAT20] *L'elemento $\frac{x^2+2}{x-2} \in \mathbb{R}[x]$ è ben definito, dato che $x-2 \not\equiv_{\mathbb{K}[x]} 0$. Il fatto che l'equazione $x-1$ sia uguale a zero se $x=1$ è irrilevante.*

Esempio 1.22. [AAA20] $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ non è un campo, visto che 2 non ha inverso.

Definizione 1.23 (Sottocampo). [AAA21] *Sia $(A, \oplus, \odot)$ un campo e $B \subset A$ tale che B sia chiuso rispetto alle operazioni $\oplus, \odot$. Allora B si dice sottocampo di A . Analogamente per anelli e gruppi.*

Osservazione 1.24. [AAA22] $\mathbb{Q}$ è sottocampo di $\mathbb{R}$. L'insieme

$$\mathbb{Z}[x] = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \text{i coefficienti di } f(x) \text{ sono tutti interi}\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{Q}[x]$.

Osservazione 1.25. [AAA25] *Indicheremo sempre con $\mathbb{K}$ un campo generico (per noi, sempre un campo infinito ed in genere, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Le operazioni saranno in genere sottointese.*

1.3 Prodotto cartesiano

Per descrivere le operazioni in modo piu' formale, ci servirà il concetto di prodotto cartesiano, che risulterà utile in molti altri contesti.

Definizione 1.26. [BBB02] *Siano A, B insiemi. Allora l'insieme delle coppie ordinate composte da un elemento di A ed uno di B si dice prodotto cartesiano di A e B e si scrive $A \times B$. Più formalmente*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Due elementi di $A \times B$ sono uguali se sono uguali elemento per elemento, ovvero

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Esempio 1.27. [BBB03] *Alcuni esempi:*

1. $\{2, 4, 6\} \times \{0, 1\} = \{(2, 0), (2, 1), (4, 0), (4, 1), (6, 0), (6, 1)\}$
2. $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \{(q, r) \mid q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$. Il piano reale.

Possiamo generalizzare il prodotto cartesiano a più di due fattori.

4. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$. Lo spazio reale.

5. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Osservazione 1.28. [BBQ03] Possiamo generalizzare il prodotto cartesiano a più di due fattori. Per esempio

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$. Lo spazio reale.

2. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 1.29. [BBF07] Dato A insieme, un operazione $\oplus$ su A è una funzione

$$\begin{aligned} \oplus: A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto a \oplus b \end{aligned}$$

Osservazione 1.30. [BBB04] Notiamo che se $(A, +_A, \cdot_A)$, $(B, +_B, \cdot_B)$ sono anelli, allora possiamo considerare $A \times B$ anello con le operazioni ovvie. Ovvero $(A \times B, \oplus, \odot)$ è un anello con le operazioni

$$\begin{aligned} \oplus: (A \times B) \times (A \times B) &\rightarrow (A \times B) \\ (a, b), (x, y) &\mapsto (a +_A x, b +_B y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \odot: (A \times B) \times (A \times B) &\rightarrow (A \times B) \\ (a, b), (x, y) &\mapsto (a \cdot_A x, b \cdot_B y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il neutro additivo è $(0_A, 0_B)$, il neutro moltiplicativo è $(1_A, 1_B)$. Tutte le proprietà che richiediamo alle operazioni $\oplus, \odot$ discendono immediatamente dalle proprietà delle operazioni di anello $+_A, \cdot_A, +_B, \cdot_B$. $\square$

Esempio 1.31. [BBB05] In $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$(1, -3) + (1, 1) = (2, -2), \quad (1, -3) \cdot (1, 1) = (1, -3) \quad (2, 3) \cdot (0, 2) = (0, 6)$$

In $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}[x]$ abbiamo

$$(1, x^2 - 1) + (1, 1) = (2, x^2) \quad (2, x^2 + 1) \cdot (3, x^2 - 1) = (6, (x^2 + 1)(x^2 - 1)) = (6, x^4 - 1)$$

In $\mathbb{R}^2$ abbiamo delle patologie:

$$(2, 0) \cdot (0, 3) = (0, 0)$$

Quindi esistono due elementi non nulli il cui prodotto è nullo.

Definizione 1.32. [BBB06] Dato un anello A , un suo elemento $a \neq 0$ è detto zero divisore se esiste $b \in A$, $b \neq 0$ tale che $a \cdot b = 0$. Chiaramente, secondo la definizione, anche b è uno zero divisore.

Esempio 1.33. [BBB07] $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ non è un campo. Basta far vedere che l'elemento $(0, 1)$, non nullo, non è invertibile, dato che in un campo tutti gli elementi non nulli devono avere inverso. Se fosse invertibile, esisterebbe il suo inverso, un elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$(x, y) \cdot (0, 1) = (1, 1) \Leftrightarrow (0, y) = (1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

che è assurdo perché $1 \neq 0$. Analogamente, $\mathbb{R}^n$ non è un campo con le operazioni ovvie.

Definizione 1.34. [CCW37] Ricordiamo che

1. due funzioni

$$\begin{array}{ccc} f: & A & \rightarrow B \\ & a & \mapsto f(a) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: & A & \rightarrow B \\ & a & \mapsto g(a) \end{array}$$

sono uguali come funzioni ($f \equiv g$) se e solo se

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$$

2. L'operazione di composizione di funzioni è

$$\begin{array}{ccc} \circ: & \{F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \times \{F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} & \rightarrow \{F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ & (f, g) & \mapsto f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto f(g(x)) \end{array}$$

Esempio 1.35. [AAB99] Sia $\mathbb{F}$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$. Queste non formano un gruppo con la composizione perché non sempre esiste l'inverso. Dimostriamo che l'insieme non è un gruppo con un controesempio: La funzione costante

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto 1 \end{array}$$

non è invertibile, quindi non ha inverso rispetto alla composizione.

Esempio 1.36. [AAB98] Sia $\mathbb{F}$ l'insieme delle funzioni bigettive da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ formano un gruppo non commutativo. Che siano un gruppo è immediato [cfr. corso di Analisi I per le proprietà delle funzioni]. Dimostriamo che il gruppo non è commutativo con un controesempio:

esistono due funzioni bigettive

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x + 1 \end{array}$$

tali che

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^3 \neq x^3 + 1 = g(x^3) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Capitolo 2

Seconda Lezione - Esercizi

Osservazione 2.1. [CCY37] *Siano*

$$\begin{array}{ccc} F: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & a & \mapsto a^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & t & \mapsto 3t - 2 \end{array}$$

due funzioni di $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ Allora

$$(F \circ G)(5) = F(G(5)) = F(3 \cdot 5 - 2) = F(13) = 169$$

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(3x - 2) = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$(F \circ G)(x - 5) = F(G(x - 5)) = F(3(x - 5) - 2) = (3x - 17)^2 = 9x^2 - 102x + 289$$

$$(F \circ G)(\spadesuit) = F(G(\spadesuit)) = F(3\spadesuit - 2) = (3\spadesuit - 2)^2 = 9\spadesuit^2 - 12\spadesuit + 4$$

2.1 Esercizi svolti

Esercizio 2.2. [AA04] Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, i polinomi $x^2 + 4x - 1, ax^2 + (3a - 1)x + 5a \in \mathbb{R}[x]$ sono uguali.

I polinomi hanno lo stesso grado. Per avere $x^2 + 4x - 1 \equiv_{\mathbb{R}[x]} ax^2 + (3a - 1)x + 5a$ dobbiamo avere che i coefficienti dei termini dello stesso grado sono uguali uno a uno, ovvero

$$\begin{cases} 1 = a & \text{grado } 2 \\ 4 = 3a - 1 & \text{grado } 1 \\ -1 = 5a & \text{grado } 0 \end{cases}$$

Dato che dalla prima equazione si ottiene $a = 1$ e dalla terza $a = -\frac{1}{5}$, il sistema è impossibile e i polinomi sono diversi per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).

Proposizione 2.3. [BB08] Sia A un anello, allora se $a \in A$ è uno zero divisore, a non è invertibile. Quindi un campo non ha zero divisori, dato che ricordiamo che logicamente $P \Rightarrow Q$ implica $\neg Q \Rightarrow \neg P$, dove P, Q sono proposizioni logiche e $\neg$ la negazione logica

Dimostrazione. Sia $a \in A$ zero divisore. Allora esiste $b \in A$, $b \neq 0$ tale che $a \cdot b = 0$. Supponiamo per assurdo che a sia invertibile. Allora esiste $a^{-1} \in A$ tale che $a^{-1} \cdot a = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a^{-1} \cdot a \cdot b &= a^{-1} \cdot 0 \\ 1 \cdot b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Ed abbiamo ottenuto $b = 0$ contro l'ipotesi. Questa è una contraddizione (un assurdo) e quindi è assurdo supporre che a sia invertibile. Quindi a non è invertibile. $\square$

Proposizione 2.4 (Legge di cancellazione per campi). [BBX08] *Sia $\mathbb{K}$ un campo, e $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$. Allora $ab = ac \Leftrightarrow b = c$.*

Dimostrazione. Dato che $a \neq 0$, $\exists a^{-1}$, quindi

$$ab = ac \Leftrightarrow a^{-1}ab = a^{-1}ac \Leftrightarrow b = c$$

$\square$

Se indeboliamo l'ipotesi, prendendo un anello, la legge di cancellazione continua a valere per i non zero divisori.

Proposizione 2.5 (Legge di cancellazione per anelli). [BBX77] *Sia A un anello, e $a, b, c \in A$, $a \neq 0$, e a non zero divisore. Allora $ab = ac \Leftrightarrow b = c$.*

Dimostrazione.

$$ab = ac \Leftrightarrow ab - ac = 0 \Leftrightarrow a(b - c) = 0. \text{Quindi } b - c = 0 \text{ o } b - c \text{ zero-divisore}$$

Da cui

- Se $b - c = 0$ zero-divisore le è anche a , contro l'ipotesi. Quindi $b - c = 0$.
- Se $b - c = 0$ abbiamo $b = c$, tesi.

$\square$

Proposizione 2.6 (Unicità dell'inverso). [BBX88] *Sia A un anello, e $a \in A$ invertibile e $b, c \in A$ tali che*

$$ab = ba = 1 \quad ac = ca = 1$$

Allora $b = c$.

Dimostrazione. Per semplicità di supponiamo che A sia commutativo. Per A non commutativo la dimostrazione è lasciata per esercizio.

$$ab = 1 \text{ AND } ac = 1 \Rightarrow ab = ac \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow a(b - c) = 0$$

Dato che a è invertibile, a non è zero divisore, e quindi non lo è neppure $b - c$. Quindi $a = 0$ o $b - c = 0$. MA dato che a è invertibile, $a \neq 0$ e quindi

$$b - c = 0 \Rightarrow b = c$$

$\square$

N.B. Potevano semplificare l'ultima parte del ragionamento usando la legge di cancellazione.

Esercizio 2.7. [AAV89]

Dire per quali $a, b \in \mathbb{Q}$ i polinomi $f(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + 3$, $g(x) = 3x^3 + (a-b)x^2 + a$ in $\mathbb{Q}[x]$ sono uguali.

Soluzione. Usiamo il principio di identità dei polinomi

$$ax^3 + (a+b)x^2 + 3 \equiv_{\mathbb{Q}[x]} 3x^3 + (a-b)x^2 + a$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = a - b \\ 0 = 0 \\ 3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 2.8. [AAA94] Risolvere l'equazione

$$F(x)^2 \equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 + 3x + 2$$

con incognita il polinomo $F(x)$. Stiamo cercando le soluzioni tra i polinomi, ovvero vogliamo determinare l'insieme

$$\{F(x) \in \mathbb{R}[x] \mid F(x)^2 \equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 + 3x + 2\}$$

Dato che il quadrato di $F(x)$ ha grado 2, necessariamente $F(x)$ ha grado 1. Quindi $F(x) = ax + b$ per opportuni (ed incogniti) $a, b \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione

$$\begin{aligned} F(x)^2 &\equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 + 3x + 2 \\ (ax + b)^2 &\equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 + 3x + 2 \\ a^2x^2 + 2abx + b^2 &\equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

che per il principio di identità dei polinomi si trasforma in

$$\begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 2ab = 3 \\ b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

e si vede facilmente che in tutti e quattro i casi $(a = 1, b = \sqrt{2}), \dots, (a = -1, b = -\sqrt{2})$ la seconda equazione è impossibile. Quindi

$$F(x)^2 \equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 + 3x + 2$$

non ha soluzioni.

Esercizio 2.9. [AAP94] Data $\alpha \in \mathbb{K}$, campo, risolvere l'equazione

$$3xF(x+2) \equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha$$

con incognita il polinomio $F(x)$. Ricordiamo che α è dato, quindi parametro. Stiamo cercando le soluzioni tra i polinomi, ovvero vogliamo determinare l'insieme

$$\{F(x) \in \mathbb{K}[x] \mid 3xF(x+2) \equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha\}$$

Il grado di $F(x+2)$ è uguale al grado di $F(x)$, e per le regole sul grado del prodotto di polinomi $xF(x+2)$ deve avere grado 2 perché l'equazione abbia soluzione. Quindi $F(x)$ ha grado 1 e $F(x) \equiv_{\mathbb{K}[x]} ax + b$ per opportuni (ed incogniti) $a, b \in \mathbb{K}$. Possiamo, ricordando che

$$F(x+2) \equiv_{\mathbb{K}[x]} a(x+2) + b \equiv_{\mathbb{K}[x]} ax + 2a + b$$

Usando il principio di identità dei polinomi, l'equazione su polinomi diviene il seguente sistema su $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} 3xF(x+2) &\equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha \\ 3x(ax + 2a + b) &\equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha \\ 3ax^2 + 6ax + 3bx &\equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha \\ 3ax^2 + (6a + 3b)x &\equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha \end{aligned}$$

che per il principio di identità dei polinomi si trasforma in

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 6a + 3b = 3 \\ 0 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 6 + 3b = 3 \Rightarrow b = -1 \\ 0 = \alpha \end{cases}$$

e quindi

- Se $\alpha \neq 0$ non esiste soluzione ($\nexists$ soluzione).
- Se $\alpha = 0$ allora la soluzione è $F(x) \equiv_{\mathbb{K}[x]} x - 1$

Verifichiamo per scrupolo nel caso $\alpha = 0$

$$3xF(x+2) \equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x((x+2) - 1) = 3x(x+1) \equiv_{\mathbb{K}[x]} 3x^2 + 3x + \alpha \text{ con } \alpha = 0$$

Proposizione 2.10. [BBB01] Dato un'entità i tale che $i^2 = -1$, definiamo l'insieme $\mathbb{R}[i] = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Questo è un campo con le ovvie operazioni:

$$a+ib \equiv_{\mathbb{R}[i]} 0 \Leftrightarrow a=b=0 \Leftrightarrow (a,b) = (0,0)$$

$0 \equiv_{\mathbb{R}[i]} 0+0i$ è il neutro additivo, $1 \equiv_{\mathbb{R}[i]} 1+0i$ il neutro moltiplicativo,

$$\begin{aligned} +: \quad \mathbb{R}[i] \times \mathbb{R}[i] &\rightarrow \mathbb{R}[i] \\ a+ib, c+id &\mapsto a+c+i(b+d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{R}[i] \times \mathbb{R}[i] &\rightarrow \mathbb{R}[i] \\ (a+ib, c+id) &\mapsto (a+ib) \cdot (c+id) \equiv_{\mathbb{R}[i]} ac - bd + i(ad+bc) \end{aligned}$$

Ricordiamo che $i^2 = -1$.

Dimostrazione. Verifichiamo $(\mathbb{R}[i], +, \cdot)$ sia un anello controllando le proprietà una per una:

1. Dimostriamo che se $a, b \in \mathbb{R}$, $a + ib \equiv_{\mathbb{R}[i]} 0 \Leftrightarrow a = b = 0$. Infatti, se $b \neq 0$

$$a + ib \equiv_{\mathbb{R}[i]} 0 \Rightarrow i = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \text{ assurdo}$$

Se invece $b = 0$

$$a + ib \equiv_{\mathbb{R}[i]} 0 \Rightarrow a = 0$$

ed abbiamo $a = b = 0$. Notiamo che due numeri complessi $a + ib$, $c + id$ sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$.

2. Verifichiamo che $(\mathbb{R}[i], +)$ sia un gruppo abeliano

- (a) L'insieme $\mathbb{R}[i]$ è chiuso rispetto all'operazione $+$, dato che per ogni due elementi $(a + ib), (c + id) \in \mathbb{R}[i]$ abbiamo che

$$(a + ib) + (c + id) \equiv_{\mathbb{R}[i]} (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{R}[i]$$

con $a + c, b + d \in \mathbb{R}$. Notiamo che l'operazione $+$ è commutativa, ovvero che per ogni due elementi $(a + ib), (c + id) \in \mathbb{R}[i]$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) abbiamo che

$$(a + ib) + (c + id) \equiv_{\mathbb{R}[i]} (a + c) + i(b + d) \equiv_{\mathbb{R}[i]} (c + a) + i(d + b) = (c + id) + (a + ib)$$

sfruttando la commutatività della somma sui reali.

- (b) Esiste il neutro additivo $0 + i0 = 0$, tale che

$$\forall a + ib \in \mathbb{R}[i] \quad (a + ib) + 0 \equiv_{\mathbb{R}[i]} a + ib$$

- (c) Ogni elemento di $\mathbb{R}[i]$ ha inverso additivo (che chiamiamo opposto). Infatti

$$\forall a + ib \in \mathbb{R}[i] \quad \exists x + iy \in \mathbb{R}[i] \text{ tale che } (a + ib) + (x + iy) \equiv_{\mathbb{R}[i]} 0$$

basta prendere come $x + iy$ l'elemento $-a + i(-b) \equiv_{\mathbb{R}[i]} -a - ib$, sfruttando gli opposti in $\mathbb{R}$.

Quindi $(\mathbb{R}[i], +)$ è un gruppo abeliano.

3. L'insieme $\mathbb{R}[i]$ è chiuso rispetto all'operazione $\cdot$, dato che per ogni due elementi $(a + ib), (c + id) \in \mathbb{R}[i]$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) abbiamo che

$$(a + ib) \cdot (c + id) \equiv_{\mathbb{R}[i]} ac + iad + ibc + i^2bd \equiv_{\mathbb{R}[i]} (ac - bd) + i(ad + bc) \in \mathbb{R}[i]$$

con $ac + bd, ad + bc \in \mathbb{R}$. Notiamo che l'operazione $\cdot$ è commutativa, ovvero che per ogni due elementi $(a + ib), (c + id) \in \mathbb{R}[i]$ abbiamo che

$$(a + ib) \cdot (c + id) \equiv_{\mathbb{R}[i]} (ac - bd) + i(ad + bc) \equiv_{\mathbb{R}[i]} (c + id) \cdot (a + ib)$$

sfruttando la commutatività del prodotto sui reali.

4. Esiste il neutro moltiplicativo $1 + i0 \equiv_{\mathbb{R}[i]} 1$, tale che

$$\forall a + ib \in \mathbb{R}[i] \quad (a + ib) \cdot 1 \equiv_{\mathbb{R}[i]} a \cdot 1 + ib \cdot 1 \equiv_{\mathbb{R}[i]} a + ib$$

5. Verifichiamo la commutatività del prodotto

$$\forall a + ib, c + id \in \mathbb{R}[i] \quad (a + ib) \cdot (c + id) \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} (c + id) \cdot (a + ib)$$

Infatti

$$(a + ib) \cdot (c + id) \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ac - bd + i(ad + bc)$$

e

$$(c + id) \cdot (a + ib) \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ca + icb + ida + i^2db \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ca - db + i(cb + da) \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ac - bd + i(ad + bc)$$

dato che $\mathbb{R}$ è commutativo.

6. Verifichiamo la distributività:

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot ((c + id) + (e + if)) &\underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} (a + ib)(c + e + (d + f)i) \\ &\underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ac - bd + ae - bf + (bc + ad + be + af)i \\ (a + bi) \cdot (c + id) + (a + bi) \cdot (e + if) &\underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ac - bd + (bc + ad)i + ae - bf + (be + af)i \\ &\underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} ac - bd + ae - bf + (bc + ad + be + af)i \end{aligned}$$

Rimane da verificare che $\mathbb{R}[i]$ sia un campo, ovvero che tutti gli elementi non nulli abbiano inverso. Vediamo che dato $a + ib \in \mathbb{R}[i]$, non nullo ($(a, b) \neq (0, 0)$) esiste $x + iy \in \mathbb{R}[i]$ tale che $(a + ib)(x + iy) \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} 1$. Proviamo facilmente che se $a + ib \underset{\mathbb{R}[i]}{\neq} 0 \Leftrightarrow (a, b) \neq (0, 0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0$, ponendo

$$x + iy \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

abbiamo che

$$(a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{a^2 + aib - iba - i^2b^2}{a^2 + b^2} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Quindi $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ è l'inverso moltiplicativo di $a + ib$. Indichiamo l'inverso moltiplicativo di $a + ib$ come

$$(a + ib)^{-1} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{1}{a + ib} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

□

Esempio 2.11. [AAP66] Calcoliamo l'inverso di $2 - 3i$

$$(2 - 3i)^{-1} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{2 + 3i}{13} \underset{\mathbb{R}[i]}{\equiv} \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

Esempio 2.12. [AAQ66] Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, i vettori $\underline{v}$ dall'origine sono un gruppo commutativo con la somma secondo la regola del parallelogramma e elemento neutro $\underline{0}$. L'inverso (additivo) di $\underline{v}$ è $-\underline{v}$.

In futuro, quando non sia necessario specificare, con lieve abuso di notazione, scriveremo spesso $\equiv$ o anche $=$ per anelli e corpi.

2.2 Esercizi proposti

Esercizio 2.13. [AAU66] Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, i vettori $\underline{v}$ dall'origine sono un gruppo commutativo con la somma secondo la regola del parallelogramma ed elemento neutro $\underline{0}$. L'inverso (additivo) di $\underline{v}$ è $-\underline{v}$.

Esercizio 2.14. [AAQ10] Dire, al variare di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, quando sono uguali i polinomi

$$3(a - b + 2c)x^2 - (a + b)x - a + b - c, \quad (a + b + c - d)x^3 + 2x^2 - (2a + b - c)x + 3$$

Esercizio 2.15. [NN02] Risolvere la seguente equazione a variabile polinomio $F(x)$

$$F(x) \cdot F(x+1) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x + 10$$

Hint: il grado del polinomio $F(x)$ è uguale al grado del polinomio $F(x+1)$. Dato che il prodotto di questi due polinomi ha grado 4, $\deg F(x) = 2$ e quindi $F(x) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} ax^2 + bx + c$ per incogniti $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Soluzione: $F(x) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} \pm(x^2 + 2x + 2)$.

Esercizio 2.16. [AAX94] Trovare un polinomio $F(y) \in \mathbb{R}[y]$ tale che $F(y)(3y^2 + 1) \equiv 3y^4 + 4y^2 + 1$

Esercizio 2.17. [NNT02] Risolvere le seguenti equazioni a variabile polinomi in $F(x)$

- $F(x) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} F(x+3)$
- $F(x^2) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} F(x)$
- $F(x^2) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} F(x)^2$
- $3F(x^2 + 2) \equiv_{\mathbb{Q}[x]} F(3x^2 - 1)$

Esercizio 2.18. [AAX96] Trovare un polinomio $F(t) \in \mathbb{R}[t]$ tale che $3F(t) + t^2 \equiv 3t^4 - 2t^2 + 3t$

Esercizio 2.19 (Astratto). [AAY23] Esiste un campo $\mathbb{K}$ con un numero finito di elementi?

Esercizio 2.20 (Astratto). [AAX33] Trovare, se possibile, un campo finito con 5 elementi.

Esercizio 2.21 (Astratto). [AAX22] Trovare, se possibile, un campo finito con 4 elementi.

Esercizio 2.22 (Legge di cancellazione per anelli). [BBX66] Dimostrare che se abbiamo A anello, e $a, b, c \in A$, a non zero-divisore. Allora $ab = ac \Leftrightarrow b = c$.

Osservazione 2.23. [AAP23] Dato $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo, un insieme $A \subseteq \mathbb{K}$ si dice sottocampo di $\mathbb{K}$ se è chiuso rispetto alle operazioni $+, \cdot$. Per esempio, $\mathbb{Q}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}$ che è un sottocampo di $\mathbb{C}$.

Esercizio 2.24. [AAG23] Trovare, se esistono, due sottocampi non banali di $\mathbb{R}$ diversi da $\mathbb{Q}$ e contenuti l'uno dentro l'altro.

Esercizio 2.25. [AAG22] Trovare, se esiste, un sottocampo non banale di $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.26. [AAT23] Trovare, se esiste, un campo B tale che $\mathbb{Q} \subsetneq B \subsetneq \mathbb{R}$.

Esercizio 2.27 (Difficile). [AAA23] L'insieme

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

è un sottocampo di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ che contiene $\mathbb{Q}$? Determinare se del caso il principio di identità e la formula dell'inverso.

Capitolo 3

Terza Lezione - Numeri complessi

3.1 Il campo dei complessi

Osservazione 3.1. [BBB00] *L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni sui reali. Introduciamo l'oggetto $i \notin \mathbb{R}$ con la proprietà $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$. Abbiamo già visto che se aggiungo i ad $\mathbb{R}$, ottengo il campo $\mathbb{R}[i]$, che indicheremo d'ora in poi come $\mathbb{C}$, il campo dei complessi. Chiaramente $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R}$, dato che ogni numero reale è anche un complesso, e che $i \notin \mathbb{R}$, dato che nei reali i quadrati sono tutti positivi o nulli.*

Diamo qualche notazione su $\mathbb{C}$

Definizione 3.2. [BBB50]

1. Un numero complesso scritto come $a + ib$ si dice in forma cartesiana.

Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$:

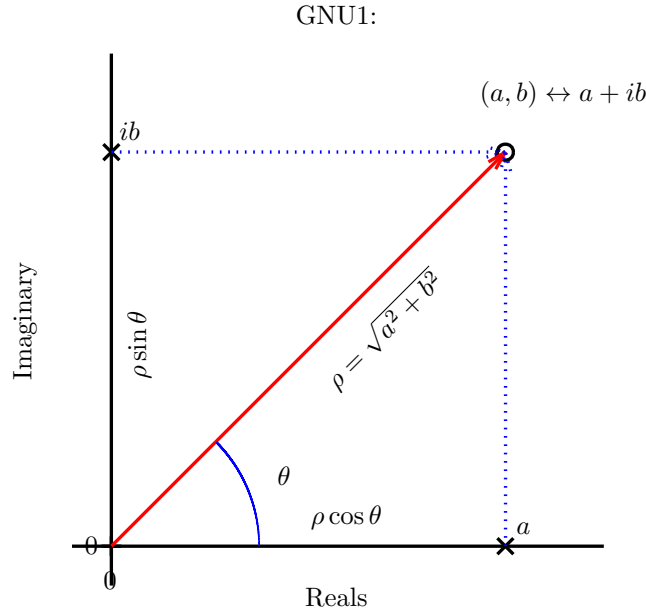
2. la parte reale di z è a e si indica $\operatorname{Re}(z)$.
3. La parte immaginaria di z è b e si indica $\operatorname{Im}(z)$.
4. Se $\operatorname{Re} z = a = 0$ allora z è detto immaginario puro.
5. Se $\operatorname{Im} z = b = 0$ allora $z \in \mathbb{R}$.
6. Il modulo di z è $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e si indica $|z|$.

Osservazione 3.3. [BBX50] *C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + ib &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

Possiamo quindi identificare, dal punto di vista insiemistico, i complessi col piano reale. Ogni punto si può identificare come una coppia ordinata di numeri reali (a, b) .

Osservazione 3.4. [BBG50] Possiamo disegnare un numero complesso $a + ib$ sul piano reale (detto in questo contesto il piano di Argand-Gauss) mediante la sua identificazione con la coppia reale (a, b) .



Per il teorema di Pitagora abbiamo che la distanza di (a, b) dall'origine è $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, il modulo del complesso $a + ib$. Diciamo che θ è l'argomento di $a + ib$ e notiamo che l'argomento dello zero non è definito.

Definizione 3.5. [BBB99] [Forma vettoriale o trigonometrica] Un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$ può essere identificato con l'elemento (a, b) del piano reale $\mathbb{R}^2$, con sulle ascisse la parte reale e sulle ordinate la parte complessa, che in questo caso si indica come il piano di Argand-Gauss. In questo caso il modulo $|z|$ (si scrive spesso come ρ) è la lunghezza del vettore centrato nell'origine (a, b) e possiamo definire l'argomento $\arg(z) = \theta$. L'argomento è noto a meno di multipli interi di 2π , dato che dalla trigonometria elementare abbiamo che

$$a = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta \text{ e } b = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

e le funzioni $\sin$, $\cos$ sono periodiche di periodo 2π . Possiamo scrivere ogni complesso in forma trigonometrica.

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Ricordiamo che l'argomento di 0 non è definito.

Esempio 3.6. [BBB88] Portiamo $1 + i \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica. Ricordiamo che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \rho \cos \theta = a, \quad \rho \sin \theta = b$$

Quindi $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ed abbiamo per $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \cos \theta \\ b = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

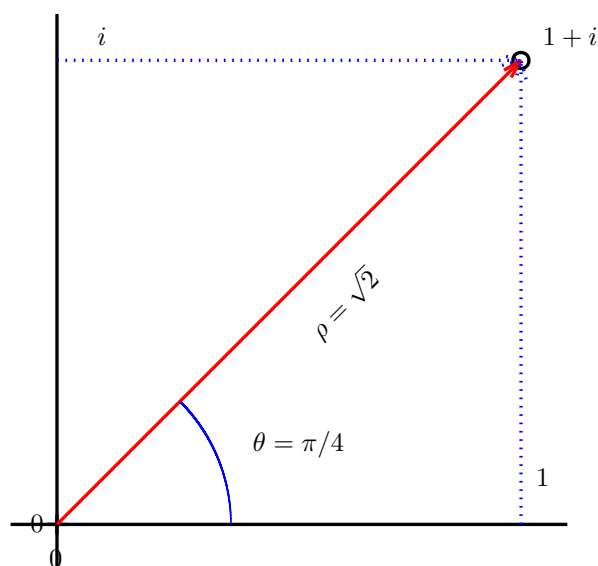
dato che sia a che b sono positivi z appartiene al primo quadrante del piano di Argand-Gauss, e quindi delle due possibili soluzioni $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, scegliamo $\frac{\pi}{4}$. La forma trigonometrica di $1+i$ è quindi

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Osservazione 3.7. [BBB82] Semplicemente disegnando il complesso sul piano di Argand-Gauss spesso possiamo determinare immediatamente la sua forma trigonometrica

Esempio 3.8. [BBX82] Determiniamo modulo ed argomento del complesso $1+i$

GNU2: Rappresentazione trigonometrica di $1+i$



Quindi $1+i = \sqrt{2}(\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4})$

Esempio 3.9. [BBB98] Portare il complesso z di modulo 3 ed argomento $\frac{\pi}{2}$ in forma cartesiana. Svolgiamo semplicemente i conti.

Dato che $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, abbiamo $z = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 3i$

Osservazione 3.10. [BBZ15] Abbiamo un numero complesso in forma trigonometrica $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Possiamo sempre portarlo in forma ridotta, ovvero trovare un unico $\theta' \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta' < 2\pi$ tale che

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

Per determinare θ' basta sommare a θ un opportuno multiplo intero di 2π , anche negativo se del caso.

Esempio 3.11. [BBZ16] *Diverse forme trigonometriche del numero complesso $4(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$ come, per esempio*

$$4(\cos 9\pi + i \sin 9\pi), \quad 4(\cos 3\pi + i \sin 3\pi), \quad 4(\cos \pi + i \sin \pi), \quad 4(\cos -\pi + i \sin -\pi)$$

Tra queste rappresentazioni la forma ridotta è $4(\cos \pi + i \sin \pi)$, dato che l'argomento appartiene all'intervallo $[0, 2\pi)$.

E' immediato dalla definizione di forma trigonometrica e dal principio di identità dei complessi in forma cartesiana che due numeri complessi in forma trigonometrica sono uguali se sono ambedue nulli o se hanno uguale modulo ed il loro argomento differisce per un multiplo intero di 2π .

Dalla definizione di forma trigonometrica e dalle proprietà elementari discende il

Osservazione 3.12. [BBB15] *[Principio di identità dei complessi in forma trigonometrica]*

$$\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \equiv \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Detto in un altro modo

$$\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \equiv \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

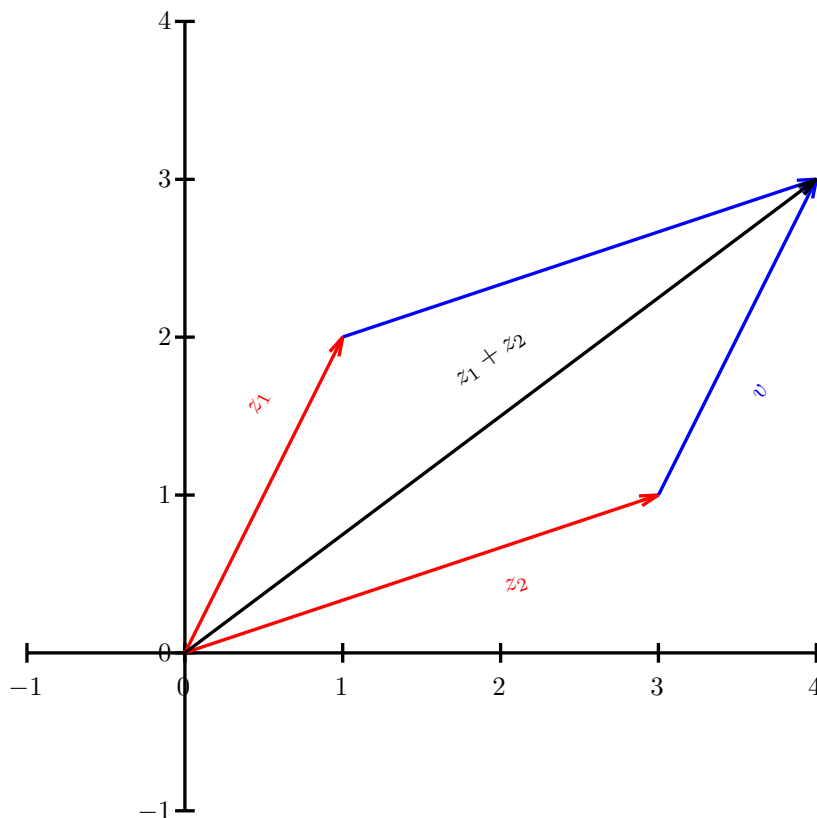
Valgono le seguenti proprietà del modulo

Proposizione 3.13. [BBB12] *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora*

1. $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$.
3. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ [Disuguaglianza Triangolare]
5. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Dimostrazione. Facili verifiche per le proprietà 1-3. Per le proprietà 4-5, cfr. [Abate], 11.3, oppure ci possiamo rifare alla geometria euclidea:

GNU3: Disuguaglianza Triangolare e regola del parallelogramma



Il lato v ha stesso modulo ed orientamento di z_1 e per il triangolo di lati $z_1 + z_2, z_2, v$ è già noto che:

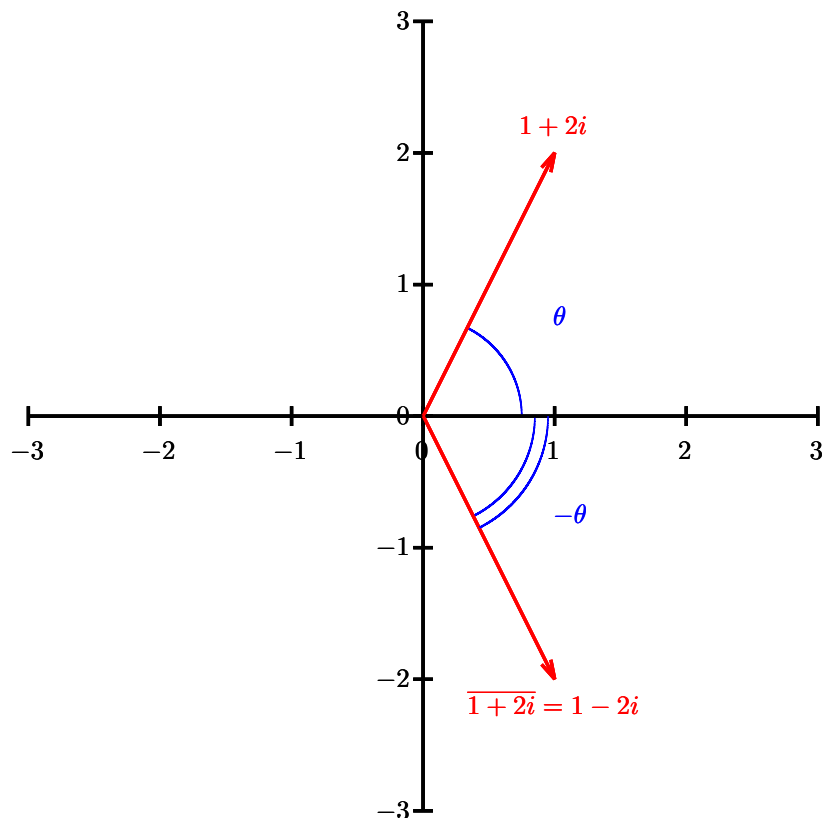
- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è minore della somma delle lunghezze degli altri due, z_2, v .
- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è maggiore del valore assoluto della differenza delle lunghezze degli altri due, z_2, v .

E considerando che $|z_1|$, la lunghezza di z_1 , è uguale a $|v|$, la lunghezza di v ne seguono le proprietà 4,5. $\square$

Definizione 3.14. [BBV11] Dato $a + ib \in \mathbb{C}$, il complesso $\overline{a + ib} = a - ib$ è detto coniugato di $a + ib$.

Sul piano di Argand-Gauss, il coniugato di un complesso z è il suo simmetrico rispetto all'asse reale

GNU4: Coniugato di $1+2i=1-2i$



Valgono le seguenti proprietà del coniugio

Proposizione 3.15. [BBB11] Dato $z, z_1 \in \mathbb{C}$,

1. $|\bar{z}| = |z|$.
2. Se $\arg(z) = \theta$, $\arg(\bar{z}) = -\theta$.
3. $\bar{\bar{z}} = z$.
4. $\overline{z + z_1} = \bar{z} + \bar{z}_1$.
5. $\overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \bar{z}_1$.
6. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ se $z \neq 0$.
7. $\bar{z} = z$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$.
8. $\bar{z} = -z$ se e solo se z è immaginario puro..
9. $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$ e $z\bar{z} = 0$ se e solo se $z = 0$.
10. Possiamo indicare l'inverso moltiplicativo usando coniugio e modulo. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Dimostrazione. Facili verifiche

□

Esempio 3.16. [BBB40] *Alcuni esempi di equazioni risolvibili in $\mathbb{C}$.*

- $z^2 + 1$, soluzioni $z = \pm i$.
- $x^2 + 2$, soluzioni $x = \pm i\sqrt{2}$.
- $x^2 + x + 1$, soluzioni $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- È facile vedere che tutte le equazioni di secondo grado hanno soluzioni in $\mathbb{C}$, basta usare la formula. In particolare, basta dare un'occhiata alla formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per vedere che tutti i polinomi di secondo grado a coefficienti reali con discriminante negativo hanno due radici complesse non reali distinte, una coniugata dell'altra, come nei tre casi dell'esercizio precedente 3.15.

Osservazione 3.17. [BBB41] $\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

3.2 Potenze e radici di un complesso.

La somma e la differenza di complessi in forma cartesiana sono facili da calcolare. Appena più complicati il prodotto e inverso. La potenza può presentare dei problemi.

Esempio 3.18. [BBB20] *Calcolare $i^3, i^7, i^{12}, i^{323}$. Dato che $i^2 = -1$ abbiamo che*

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = ii^2 = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

Notiamo che le potenze di i sono cicliche di ordine 4, e $i^n = i^r$ dove r è il resto della divisione di n per 4. Quindi

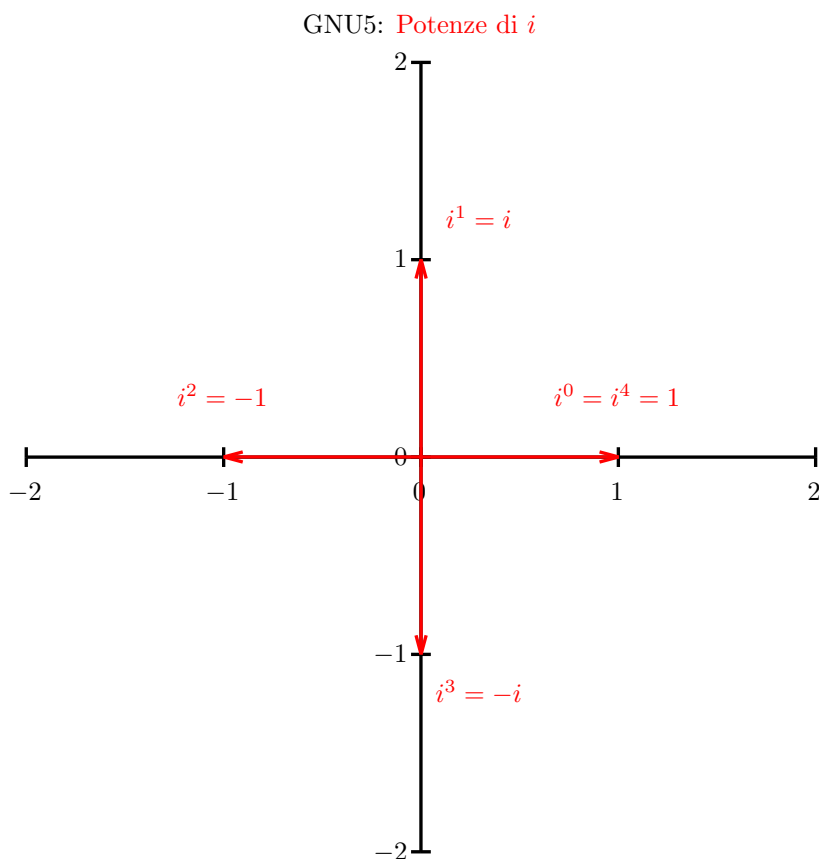
$$i^3 = -i, \quad i^7 = i^3 = -i, \quad i^{12} = i^0 = 1$$

e dato che $323 = 4 \cdot 80 + 3$, (vediamo in dettaglio, ma potremmo saltare direttamente al risultato)

$$i^{323} = i^{80 \cdot 4 + 3} = i^{4 \cdot 80} \cdot i^3 = (i^4)^{80} \cdot -i = 1^{80} \cdot -i = -i$$

Notiamo altresì che dall'identità $i^4 = i^3 \cdot i = 1$ discende immediatamente che

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = i^3 = -i$$



Il Teorema del binomio verrà affrontato nel corso di Analisi I. Qui diamo solo l'enunciato ed alcuni metodi di calcolo.

Esempio 3.19. [BBB21] Usando il teorema del binomio

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad a, b \in \mathbb{K}$$

La seconda uguaglianza discende dalle seguenti proprietà:

- $\forall n \in \mathbb{N}, n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ e $0! = 1$
- $\forall n, k \in \mathbb{N}, \text{ con } n \geq k, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\forall n, k \in \mathbb{N}, \text{ con } n \geq k, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\begin{aligned} (2 + i)^5 &= 2^5 + 5 \cdot 2^4 i + 10 \cdot 2^3 i^2 + 10 \cdot 2^2 i^3 + 5 \cdot 2 i^4 + i^5 \\ &= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i \\ &= -38 + 41i \end{aligned}$$

Osservazione 3.20. [BBK30] Quindi, fare le potenze di un complesso può essere lungo e noioso. E come calcolare le radici di un complesso?

Richiamo 3.21. [BBB30] Ricordiamo dalla trigonometria elementare la formula della somma per il seno e coseno

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{e} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

e che

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha \\ \sin \theta = \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \theta = \alpha + 2k\pi$$

Il prodotto e la divisione di complessi in forma trigonometrica, come la loro potenza, sono relativamente semplici

Proposizione 3.22. [BBB22] Dati i due complessi in forma trigonometrica

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Abbiamo che

1. $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)) = \frac{1}{\rho_1} (\cos(\theta_1) - i \sin(\theta_1))$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
4. $z_1^n = (\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1))^n = \rho_1^n (\cos(n\theta_1) + i \sin(n\theta_1))$ [Formula di DeMoivre]

Dimostrazione.

1. Il prodotto $\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ mi dà

$$\begin{aligned} & \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) = \\ & = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ & = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

per la regola sul seno e coseno dell'angolo somma.

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)} &= \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1} \cdot \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{1} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1) \\ &= \frac{1}{\rho_1} \cos(\theta_1) - i \sin(\theta_1) \end{aligned}$$

usando la formula $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ e le proprietà di seno e coseno.

3. Discende immediatamente dal punto precedente.
4. Lasciato per esercizio. Discende immediatamente dal primo punto, con una facile dimostrazione per induzione. Per l'induzione, facciamo riferimento al corso di Analisi.

□

Una immediata conseguenza è la formula per l'estrazione delle n radici n -esime di un complesso in forma trigonometrica.

Definizione 3.23. [BBB23] Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$. Una radice n -esima di w è un complesso z tale che $z^n = w$. L'insieme delle radici n -esime di w si indica come $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}}$.

Proposizione 3.24. [BBB24] Sia w un complesso non nullo e $n \geq 1$. Allora esistono esattamente n radici distinte di w . Se $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \text{ con } k = 0, \dots, n-1 \quad (3.1)$$

Abbiamo che $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ e gli z_k sono tutti distinti

Dimostrazione. Innanzitutto, grazie alla formula di DeMoivre, abbiamo che

$$z_k^n = \rho [\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)] = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = w$$

e quindi gli z_k sono radici di w (cfr. definizione di radice). Rimane da vedere che siano le uniche e siano tutte distinte.

Per l'unicità: se $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ è una radice n -esima di w , dato che

$$z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = w$$

dobbiamo avere, per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } n\alpha = \theta + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z}$$

per cui z è della forma 3.1

Dimostriamo ora che gli z_k , con $k : 1, \dots, n-1$ sono tutti distinti. Per costruzione, i loro argomenti sono distinti e compresi tra $\frac{\theta}{n}$ e $\frac{\theta+2\pi}{n}$. Quindi per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica gli z_k sono tutti distinti. □

Esempio 3.25. [BBB44] Risolvere $z^3 - 1 = 0$.

Basta estrarre le tre radici terze dell'unità: $z = \sqrt[3]{1}_{\mathbb{C}}$. Mettiamo 1 in forma trigonometrica

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Dalla formula

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) \right) \quad k: 0 \dots 2$$

e quindi

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \left(\cos \left(\frac{0}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0}{3} \right) \right) &= 1 & k = 0 \\ z_1 &= 1 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} & k = 1 \\ z_2 &= 1 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) &= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & k = 2 \end{aligned}$$

Definizione 3.26. [BBB25] *Si usa scrivere il complesso $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ come $\rho e^{i\theta}$. Questa è la forma esponenziale del complesso. Al nostro livello, questa è **semplicemente una notazione**.*

L'utilità della notazione è immediata, dato che sono rispettate tutte le usuali regole delle potenze, *anche se non lo dimostreremo*:

Osservazione 3.27. [BBB26] *[Proprietà della forma esponenziale] Dati $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_0^+$ e $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$*

1. *Principio di identità dei complessi in forma esponenziale*

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

2. $\rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$

3. $(\rho e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}}.$

4. $\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$

5. $|\rho e^{i\theta}| = \rho.$

6. $|e^{i\theta}| = 1.$

7. $\arg(\rho e^{i\theta}) = \theta.$

8. $\overline{(\rho e^{i\theta})} = \rho e^{-i\theta}.$

9. $e^{i\pi} = -1.$

10. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ allora $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$*

Osservazione 3.28. [BBB46] *[Formula delle radici in forma esponenziale] Se $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$*

$$\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}} \mid k : 0 \dots n-1 \right\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \mid k : 0 \dots n-1 \right\}$$

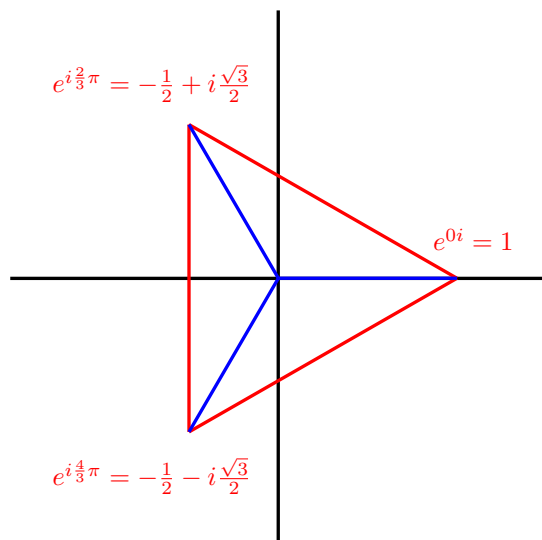
o anche, scritto in altro modo, sempre con $k : 0 \dots n-1$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}}_{k=0}, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=1}, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=2}, \dots, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=k}, \dots, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=n-1} \right\}$$

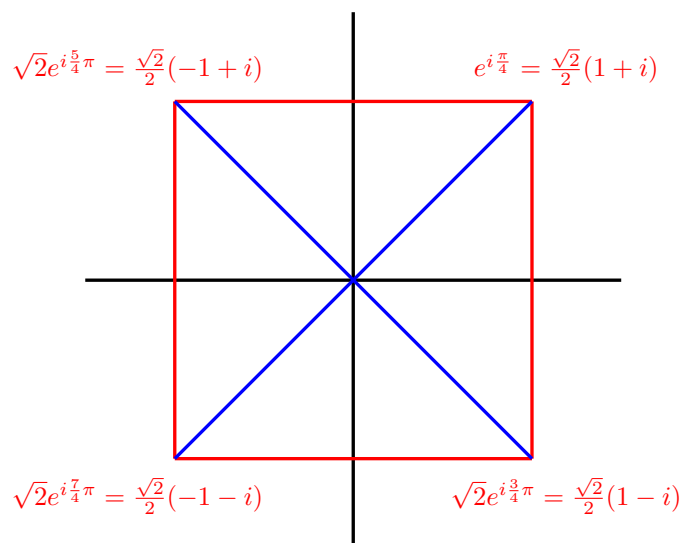
Discende immediatamente dall'osservazione precedente che

Corollario 3.29. [BBB60] *Le n radici n -esime di un complesso z sono i vertici di un poligono regolare con n lati nel piano di Argand-Gauss, dato che gli argomenti (angoli associati) di due radici "sucessive" $j, j+1$ differiscono sempre per lo stesso angolo.*

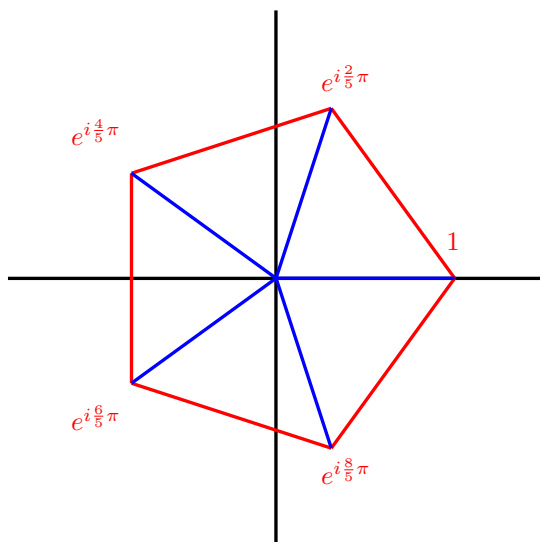
GNU6: Le radici terze di 1 formano i vertici di un triangolo equilatero



GNU7: Le radici quarte di -1 formano i vertici di un quadrato



GNU8: Le radici quinte di 1 formano i vertici di un pentagono regolare



Osservazione 3.30. [BBB95] Dato $z = e^{i\pi/4} \in \mathbb{C}$

1. $2 \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi/4}$ il modulo di z viene moltiplicato per 2. [Allunga]
2. $e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = e^{i7\pi/12}$ sommo $\pi/3$ all'argomento di z . [Ruota]
3. $2e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i7\pi/12}$ moltiplico il modulo di z per 2 E sommo $\pi/3$ al suo argomento. [Torce]

Per chi fosse interessato ad approfondire la formula di Eulero $e^{i\pi} - 1 = 0$ che noi abbiamo enunciato senza fornire dettagli, consigliamo il link

<https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/eulero/la-matematica-e-piena-di-eulero-la-piu-bella-formula-della-matematica/>

Capitolo 4

Quarta Lezione - Esercizi

4.1 Esercizi svolti

Ricordiamo la definizione di ordine totale per un anello.

Definizione 4.1. [BBP55] *Su un anello commutativo A un ordinamento totale compatibile con le operazioni è una relazione $>$ tale che*

1. $\forall a, b \in A$ abbiamo $a > b$ o $b > a$ o $a = b$. [Totalità]
2. $\forall a, b \in A$ $a > b$ e $b > a \Rightarrow a = b$. [Proprietà antisimmetrica]
3. $\forall a, b, c \in A$ $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$. [Proprietà transitiva]
4. $\forall a, b, c \in A$ abbiamo $a > b \Rightarrow a + c = b + c$. [Compatibilità con la somma]
5. $\forall a, b, c \in A$ con $c > 0$ abbiamo $a > b \Rightarrow ac > bc$. [Compatibilità col prodotto]
6. Conseguenze: $\forall a, b, c \in A$ con $c < 0$ abbiamo $a > b \Rightarrow bc > ac$.
7. $1 > 0$ e $-1 < 0$.

Notazione 4.2. [BBP42] *Con lieve abuso di notazione*

- Definiamo "maggiore o uguale"

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \text{ o } a = b$$

- se $a > b$ diciamo anche che $b < a$. Analogamente per $\geq, \leq$.

Se poniamo su $\mathbb{R}$ l'ordinamento usuale, vediamo che è impossibile porre su $\mathbb{C}$ un ordinamento compatibile con questo.

Esercizio 4.3. [BBP98] *Non esiste su $\mathbb{C}$ un ordinamento totale $>$ compatibile con le operazioni.*

Soluzione. Dato che $i \neq 0$, dobbiamo avere $i > 0$ o $i < 0$

- Se $i > 0$, allora $i \cdot i > i \cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ assurdo.
- Se $i < 0$, allora $-i > 0$, ma allora $(-i) \cdot (-i) > 0 \Leftrightarrow i^2 > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ assurdo.

□

Esercizio 4.4. [BBQ98] Portare il complesso $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ in forma cartesiana. Il modulo di z è 2 ed il suo argomento $\frac{\pi}{4}$. Svolgiamo semplicemente i conti.

Dato che $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, abbiamo $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Esercizio 4.5. [BBB13] Portiamo $2 - 3i \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica. Abbiamo $\rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ed abbiamo

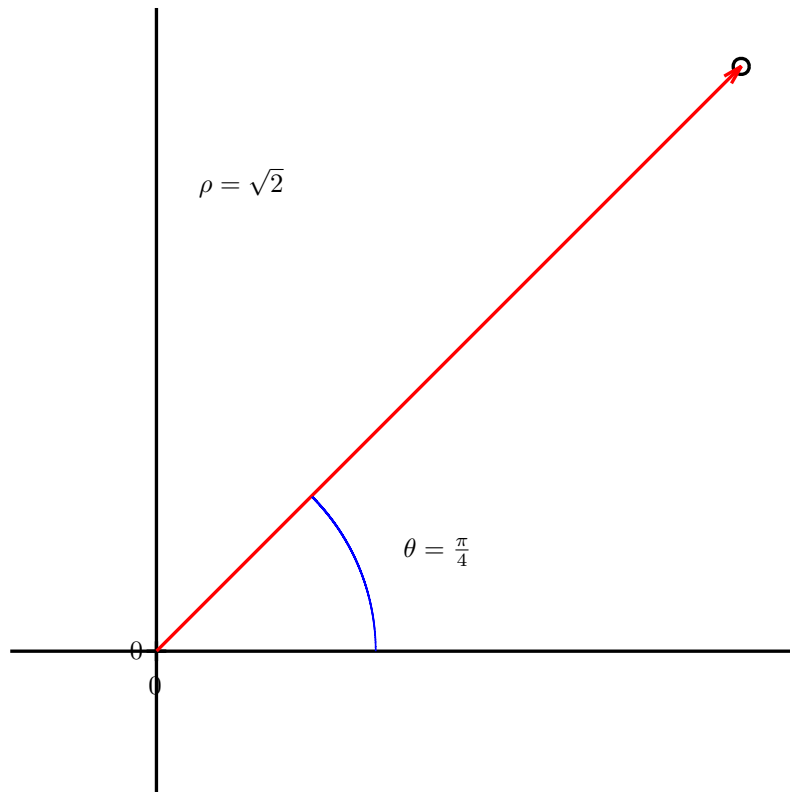
$$\begin{cases} a = \sqrt{13} \cos \theta \\ b = \sqrt{13} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{3}{2} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

Ricordando il grafico dell'arcotangente, funzione dispari positiva sui positivi e negativa sui negativi, $\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) > 0$, dato che θ è un angolo con coseno positivo e seno negativo, controllando sul piano di Argand-Gauss θ appartiene al quarto quadrante. La forma cartesiana di $2 - 3i$ è quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{13} \left(\cos \operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right) + i \sin \left(+\operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \right) \\ \sqrt{13} \left(\cos \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) - i \sin \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Esercizio 4.6. [BBB47] Calcolare le radici seste di $i + 1$. Mettiamo $1 + i$ in forma esponenziale e usiamo la formula. Usiamo il piano di Argand-Gauss.

GNU9: **Rappresentazione trigonometrica di $1 + i$**



$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[6]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \quad k: 0 \dots 5$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{24}} & k=0 \\ \sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+2\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{24}} & k=1 \\ \sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+4\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{17\pi}{24}} & k=2 \\ \sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+6\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{25\pi}{24}} & k=3 \\ \sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+8\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{33\pi}{24}} & k=4 \\ \sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+10\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{41\pi}{24}} & k=5 \end{aligned}$$

Notiamo che per $k=6$ avremmo $\frac{49\pi}{24} = \frac{\pi}{24} + 2\pi$ e quindi per $k > n-1$ ritroviamo le radici che avevamo già.

$$\sqrt[12]{2}e^{i\frac{49\pi}{24}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$$

Esercizio 4.7. [EE01] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z^4 + 1) = 0$

Soluzione.

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$$

quindi cerchiamo le radici quarte di $-1 = 1e^{i\pi}$. Le radici si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_4 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

con $k = 0, 1, 2, 3$ e otteniamo le quattro radici complesse:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & k=0 \\ z_1 &= e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & k=1 \\ z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & k=2 \\ z_3 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & k=3 \end{aligned}$$

Una fattorizzazione di $z^4 + 1$ su $\mathbb{C}[z]$ è quindi, per il teorema di Ruffini (che vale su qualunque $\mathbb{K}[x]$) è quindi

$$(z - e^{i\frac{\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{5\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{7\pi}{4}})$$

Notiamo che le quattro radici complesse sono a due a due coniugate (prima e quarta, seconda e terza) e che

$$(z - e^{i\frac{\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{7\pi}{4}}) = z^2 + 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})z + |e^{i\frac{\pi}{4}}|^2 = z^2 + \sqrt{2}z + 1$$

Dove $\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})$ è la parte reale di $(e^{i\frac{\pi}{4}})$, dato che il coniugato di $\rho e^{i\theta}$ è $\rho e^{-i\theta}$, che $e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e che

$$a + ib + \overline{a + ib} = a + ib + (a - ib) = 2a$$

□

Trovare per esercizio una fattorizzazione completa di $z^4 + 1$ su $\mathbb{R}[z]$ *Hints:*

- Si può ricorrere alla divisione di polinomi (funziona su qualunque $\mathbb{K}[x]$), dividendo $z^4 + 1$ per $z^2 + \sqrt{2}z + 1$.
- Si può procedere come sopra con i fattori lineari $e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Esercizio 4.8. [BBB56] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $4|z|^3 = z^5$

Soluzione. Mettiamo z in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$; l'equazione diviene

$$\begin{aligned} 4|\rho e^{i\theta}|^3 &= (\rho e^{i\theta})^5 \\ 4\rho^3 &= 4\rho^3 e^{i0} = \rho^5 e^{i5\theta} \end{aligned}$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza per i complessi in forma esponenziale abbiamo, ricordando che $\rho > 0$ dato che si tratta di un modulo, che:

$$\begin{cases} 4\rho^3 = \rho^5 \text{ con } \rho > 0 \\ 0 = 5\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^5 - 4\rho^3 = \rho^3(\rho^2 - 4) = 0 \text{ con } \rho > 0 \\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 0, 2 \\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dato che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ ho una soluzione, ho infinite soluzioni,

$\vdots$	$\vdots$
$k = -2$	$\theta = \frac{4}{5}\pi$
$k = -1$	$\theta = \frac{2}{5}\pi$
$k = 0$	$\theta = 0$
$k = 1$	$\theta = -\frac{2}{5}\pi$
$k = 2$	$\theta = -\frac{4}{5}\pi$
$k = 3$	$\theta = -\frac{6}{5}\pi$
$k = 4$	$\theta = -\frac{8}{5}\pi$
$k = 5$	$\theta = -\frac{10}{5}\pi$
$k = 6$	$\theta = -\frac{12}{5}\pi$
$\vdots$	$\vdots$

Ma queste soluzioni non sono tutte distinte, infatti notiamo che

- per $k = 5$, $\theta = -\frac{10}{5} = -2\pi$ che ci dà gli stessi seno e coseno di $k = 0$, $\theta = 0$, e quindi lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = 1$ e $k = 6$ ci danno lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = -1$, $\theta = \frac{2}{5}\pi$ ci dà lo stesso complesso di $k = 4$, $\theta = -\frac{8}{5} = \frac{2}{5} - 2\pi$.
- Eccetera...

Se ci limitiamo ai valori di k per cui $-\frac{2}{5}k\pi \in (-2\pi, 0]$, dato che poi i complessi si ripetono abbiamo che i θ delle soluzioni sono

$k = 0$	$\theta = 0$
$k = 1$	$\theta = -\frac{2}{5}\pi$
$k = 2$	$\theta = -\frac{4}{5}\pi$
$k = 3$	$\theta = -\frac{6}{5}\pi$
$k = 4$	$\theta = -\frac{8}{5}\pi$

Se preferiamo i nostri angoli in $[0, 2\pi)$, prenderemo altri valori di k , oppure più banalmente, aggiungiamo 2π a questi θ trovando

$$\theta = 0 \quad \theta = \frac{2}{5}\pi \quad \theta = \frac{4}{5}\pi \quad \theta = \frac{6}{5}\pi \quad \theta = \frac{8}{5}\pi$$

Le soluzioni dell'equazione $4|z|^3 = z^5$ sono quindi

$$z_0 = 2 \cdot e^{i0} = 2, \quad z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{5}\pi}, \quad z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{4}{5}\pi}, \quad z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{6}{5}\pi}, \quad z_4 = 2 \cdot e^{i\frac{8}{5}\pi}, \quad z_5 = 0$$

□

Esempio 4.9. [BBB45] *Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i = 0$$

Soluzione. Per il Teorema fondamentale dell'algebra abbiamo 7 soluzioni in $\mathbb{C}$, contate con la loro molteplicità, dato che abbiamo un'equazione polinomiale di grado 7. Troviamo le soluzioni. Raccogliamo a fattore comune come segue:

$$\begin{aligned} z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i &= 0 \\ z^5(z^2 + 2iz + i) + 2(z^2 + 2iz + i) &= 0 \\ (z^5 + 2)(z^2 + 2iz + i) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono date dall'unione delle soluzioni dei due fattori:

$$z^5 + 2 = 0 \quad \text{e} \quad z^2 + 2iz + i = 0$$

Risolviamo separatamente le due equazioni.

Risolviamo prima l'equazione $z^5 + 2 = 0$ che equivale a calcolare le radici quinte complesse di -2 . Innanzitutto scriviamo $-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$ e applichiamo la formula delle radici

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, \dots, n-1$$

Pertanto visto che $\rho = 2, \theta = \pi$ e $n = 5$ abbiamo che le radici quinte di -2 sono:

$$\sqrt[5]{2} e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{5}} \text{ con } k = 0, \dots, 4$$

Da questa formula otteniamo le cinque radici complesse:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{5}} & k &= 0 \\ z_1 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{3\pi}{5}} & k &= 1 \\ z_2 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{5\pi}{5}} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt[5]{2} & k &= 2 \\ z_3 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{7\pi}{5}} & k &= 3 \\ z_4 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{9\pi}{5}} & k &= 4 \end{aligned}$$

L'equazione $z^2 + 2iz + i = 0$ è un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Adesso risolviamo la seconda equazione che osserviamo trattarsi di un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Pertanto usiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ed otteniamo

$$\begin{aligned} z_{5,6} &= \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4i}}{2} \\ &= \frac{-2i \pm \sqrt{-4 - 4i}}{2} \\ &= \frac{-2i \pm 2\sqrt{-1 - i}}{2} \\ &= -i \pm \sqrt{-1 - i} \end{aligned}$$

Adesso dobbiamo trovare le radici quadrate di $-1 - i$. Innanzitutto calcoliamone il modulo e l'argomento. Poichè $a = -1$ e $b = -1$ si ha che $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{5}{4}\pi$ e quindi

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{i \frac{5}{4}\pi}$$

Per cui le radici quadrate di $-1 - i$ si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot e^{i \frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{2}} \quad k=0,1$$

ed otteniamo le sue due radici complesse:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \frac{5\pi}{8}} \quad w_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \frac{13\pi}{8}}$$

da cui si ottengono le soluzioni:

$$z_5 = -i + w_0 = -i + \sqrt[4]{2} e^{i \frac{5\pi}{8}} \quad z_6 = -i + w_1 = -i + \sqrt[4]{2} e^{i \frac{13\pi}{8}}$$

Abbiamo così trovato le sette radici complesse cercate

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{\pi}{5}} \\ z_1 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{3}{5}\pi} \\ z_2 &= -\sqrt[5]{2} \\ z_3 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{7}{5}\pi} \\ z_4 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{9}{5}\pi} \\ z_5 &= -i + \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5}{8}\pi} \\ z_6 &= -i + \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13}{8}\pi} \end{aligned}$$

□

Esempio 4.10. [BBB93] *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$z\bar{z}^2 = z^3$$

e disegnarle sul piano di Argand-Gauss.

Soluzione. Abbiamo

$$z(\bar{z}^2 - z^2) = 0 \implies z = 0 \text{ oppure } \bar{z}^2 - z^2 = 0$$

Quindi abbiamo la soluzione banale $z = 0$ ovvero $\rho = 0$.

Adesso possiamo supporre $z \neq 0$ e dividere ambedue i membri dell'equazione per z , ottenendo $\bar{z}^2 = z^2$.

Mettiamo il complesso in forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$, e dato che $z \neq 0$ possiamo supporre $\rho > 0$. L'equazione diviene:

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= z^2 \\ (\rho e^{-i\theta})^2 &= (\rho e^{i\theta})^2 \\ \rho^2 e^{-2i\theta} &= \rho^2 e^{2i\theta} \end{aligned}$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza per i complessi in forma esponenziale

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^2 & \text{vera } \forall \rho \in \mathbb{R} \\ -2\theta = 2\theta + 2k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo che

$$\theta = -\frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Da cui si deducono gli angoli

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = -\pi \quad \theta_3 = -\frac{3}{2}\pi$$

o volendo gli angoli in $[0, 2\pi)$ (mantenendo gli stessi seni e coseni)

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Quindi le soluzioni sono

$$z_0 = \rho e^{i0} \quad z_1 = \rho e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = \rho e^{i\pi} \quad z_3 = \rho e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad z_4 = 0 \text{ che avevamo trovato all'inizio}$$

con ρ qualunque, visto che non abbiamo condizioni su ρ .

Nel piano di Argand-Gauss le soluzioni di questa equazione sono quattro semi rette dall'origine con angoli rispettivamente $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$, origine compresa.

[Qui il disegno, a breve]

□

Esempio 4.11. [BBW11] *Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $\frac{z^8+1}{z^4+i} = 0$.*

Soluzione. Ricordiamo che $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, come si può facilmente verificare svolgendo i conti. Ponendo $a = z^4$ e $b = 1$ vediamo che

$$\frac{z^8 + 1}{z^4 + i} = \frac{(z^4 + i)(z^4 - i)}{z^4 + i} = z^4 - i$$

Le radici di $z^8 + 1$ sono otto (le otto radici complesse di -1); per quanto detto prima quattro sono radici di $z^4 + i$ e quattro di $z^4 - i$. Abbiamo

$$\frac{z^8 + 1}{z^4 + i} = 0 \Leftrightarrow z^4 - i = 0$$

Le soluzioni sono quindi le radici quarte complesse di i , che troviamo con la formula

$$\sqrt[4]{i}_{\mathbb{C}} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\mathbb{C}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}} \quad k = 0, \dots, 3 = e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{9\pi}{8}}, e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

□

Esempio 4.12. [BBB51] *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$(\bar{z} - 1)^3 = 2z - 2$$

Soluzione. Sostituiamo $\omega = \bar{z} - 1$ da cui si ricava che

$$\bar{z} = \omega + 1 \Rightarrow z = \bar{\omega} + 1$$

L'equazione diventa quindi

$$\omega^3 = 2(\bar{\omega} + 1) - 2 = 2\bar{\omega}.$$

Adesso scriviamo ω in forma esponenziale $\omega = \rho e^{i\theta}$ ed otteniamo

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 2\rho e^{-i\theta}$$

che per il principio di identità dei complessi in forma esponenziale diviene

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 2) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \sqrt{2} \\ \theta = \frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni distinte di questa equazione sono:

$\omega_0 = \sqrt{2}e^{i0} = \sqrt{2}$	da $\rho = \sqrt{2}, k = 0$
$\omega_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i$	da $\rho = \sqrt{2}, k = 1$
$\omega_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{2}} = -\sqrt{2}$	da $\rho = \sqrt{2}, k = 2$
$\omega_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{2}i$	da $\rho = \sqrt{2}, k = 3$
$\omega_4 = 0$	da $\rho = 0$

Ricordandoci che $z = \bar{z} + 1$ ricaviamo le soluzioni dell'equazione originaria $(\bar{z} - 1)^3 = 2z - 2$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2} \\ z_1 &= \sqrt{2}i + 1 = 1 + \sqrt{2}i \\ z_2 &= -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2} \\ z_3 &= -\sqrt{2}i + 1 = 1 - \sqrt{2}i \\ z_4 &= \bar{0} + 1 = 1 \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.13. [BBB57] *Trovare il numero di soluzioni in $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ del sistema*

$$\begin{cases} z^{100} - 1 = 0 \\ \operatorname{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

L'equazione ci dice che le soluzioni devono essere le radici di 1. Ce ne sono due reali, con parte immaginaria nulla, ± 1 . Le altre corrispondono a 98 punti simmetricamente disposti sulla circonferenza unitaria. La disuguaglianza ci dice che le soluzioni devono avere parte immaginaria positiva, ovvero giacere nel primo e terzo quadrante. Per simmetria, a parte le due soluzioni con parte immaginaria nulla ($z = \pm 1$), metà delle 98 soluzioni non reali rimaste avrà parte immaginaria positiva e metà parte immaginaria negativa. Quindi il sistema ha 49 soluzioni.

Esercizio 4.14. [M106] *Risolvere per $z \in \mathbb{C}$*

$$\begin{cases} e^z = e \\ |z| < 10 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione, usando la forma cartesiana di $z = a + ib$.

N.B. Dato che $z \in \mathbb{C}$, non necessariamente $z \in \mathbb{R}$ e^z è l'esponenziale di esponente z , non un complesso in forma esponenziale. Quindi $z \in \mathbb{R}$ NON $z \in [0, 2\pi)$

$$e^z = e \Leftrightarrow e^{x+iy} = e \Leftrightarrow e^x e^{iy} = e \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = e \\ y = 0 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi gli infiniti complessi $z = 1 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ ed in particolare

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k = -2$	$1 - i4\pi$	$\sqrt{1 + 16\pi^2}$
$k = -1$	$1 - i2\pi$	$\sqrt{1 + 4\pi^2}$
$k = 0$	1	1
$k = 1$	$1 + i2\pi$	$\sqrt{1 + 4\pi^2}$
$k = 2$	$1 + i4\pi$	$\sqrt{1 + 16\pi^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

di modulo

e dato che dobbiamo avere $|z| < 10$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+4\pi^2} &< 1 + \sqrt{4\pi^2} = 1 + 2\pi \simeq 7.28 \text{ Soluzione} \\ \sqrt{1+16\pi^2} &> 1 + \sqrt{16\pi^2} = 1 + 4\pi \simeq 1 + 12.56 = 13.57 > 10 \text{ Non soluzione} \end{aligned}$$

e per $k > 2$ il modulo è maggiore che per $k = 2$, e che la situazione per $k < 0$ è speculare a quella per $k > 0$. Le soluzioni sono solo tre, per $k = 0, \pm 1$, rispettivamente $z = 1, 1 \pm i2\pi$

4.2 Esercizi proposti

Esercizio 4.15. [BBU77] Disegnare su piano di Argand-Gauss i seguenti complessi

1. $(2+i)^5$.
2. $\sqrt[4]{2}_{\mathbb{C}}$ (le radici quarte complesse di $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$).
3. $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = 2$.
4. $z \in \mathbb{C}$ tali che $\arg(z) = 2$.

Esercizio 4.16. [BBY77] Mettere in forma esponenziale i seguenti complessi

1. $2 + 5i$.
2. $-1 - 2i$.
3. $\frac{1}{i}$.
4. $\frac{2-i}{1+i}$.

Esercizio 4.17. [BBQ77] Semplificare le seguenti espressioni complesse

1. $(3+i)(3-i) \left(\frac{1}{5} + i\frac{1}{10}\right)$.
2. $a^2 - b^2$.
3. $a^2 + b^2$.
4. $a^4 + b^4$.
5. $a^8 + b^8$.

Esercizio 4.18. [BBB77] Calcolare $(-1-i)^9$, $i^{2135789}$, $(1-5i)^5$

Esercizio 4.19. [BBB83] Calcolare $\sqrt[4]{1-i}$, $\sqrt[17]{-i}$, $\sqrt[17]{2-5i}$ e disegnarli sul piano di Argand-Gauss

Esercizio 4.20. [BBW83] Dato $z = e^{-i\pi/6} + e^{-i\pi/6}$

1. Esprimere z in forma cartesiana, trigonometrica, esponenziale.
2. Determinare le radici cubiche di z .

Esercizio 4.21. [BBP83] Trovare le radici complesse delle equazioni

1. $z^2 + z + 1 = 0$.

2. $z^2 - 2z - i = 0$.

3. $(3i - 9)z^2 + (5 - 3i)z + 2i = 0$.

4. $z^2i - (i + 4)z - 3i + 1 = 0$.

Esercizio 4.22. [BBB62] *Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:*

1. $z^4 - 16 = 0$.

2. $z^4 - 4 = 0$.

3. $z^{12} - 1 = 0$.

4. $\frac{z^{12}-1}{z^4-1} = 0$.

Esercizio 4.23. [BBR83] *Risolvere le seguenti equazioni complesse e disegnare le soluzioni sul piano di Argand-Gauss*

1. $e^z = e^{3z-\bar{z}}$

2. $e^{2z-1} = e^{z-\bar{z}}$

3. $e^{z\bar{z}} = 3$

Esercizio 4.24. [BBL83] *Risolvere le seguenti equazioni complesse e disegnare le soluzioni sul piano di Argand-Gauss*

1. $z^3\bar{z} = i$

2. $z^2\bar{z}^4 = z^6$

3. $z^2\bar{z}^4 = z^4$

Esercizio 4.25. [BBB48] *$(\sqrt[n]{1}_{\mathbb{C}}, \cdot)$ è un gruppo moltiplicativo con la moltiplicazione di $(\mathbb{C}, \cdot)$?*

Esercizio 4.26. [BBX48] *Dato $n > 1$, $(\sqrt[n]{1}_{\mathbb{C}}, \cdot)$ è un gruppo moltiplicativo con la moltiplicazione di $(\mathbb{C}, \cdot)$?*

4.3 Prima prova di autovalutazione

[Auto1] [Tempo stimato 2h]

1. Determinare l'inverso di $2 + 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Soluzione. $-\frac{2-\sqrt{3}}{23}$

□

2. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo con le operazioni standard? Se sì dare la formula per l'inverso di $a + b\sqrt{3}$.

Soluzione. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo, e $(a + \sqrt{3}b)^{-1} = \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}$

□

3. Sia $\mathbb{Z}_5$ l'insieme dei numeri interi con l'uguaglianza ridefinita: per $x, y \in \mathbb{Z}_5$

$$x = y \Leftrightarrow \text{il resto della divisione per 5 di } x \text{ e } y \text{ è uguale}$$

Quanti elementi distinti esistono in $\mathbb{Z}_5$?

Soluzione. 5

□

4. (Difficile) L'insieme $\mathbb{Z}_5$ è un gruppo rispetto alla somma? Un anello rispetto alla somma e alla moltiplicazione? Un campo rispetto alla somma e moltiplicazione?

Soluzione. Sì. Sì. Sì.

□

5. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ il sistema di equazioni $\begin{cases} z^3 - 2z^2 + i - 2 = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \end{cases}$

Soluzione. $z = i$

□

6. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{iz} = e^{2\bar{z}}$.

Soluzione. $z = \frac{2}{3}k\pi(1 - 2i)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

□

7. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $z^5 = \bar{z}^5$.

Soluzione. Le semirette $\theta = \frac{k}{5}\pi$, con $k = 0, \dots, 9$.

□

8. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{z+1} = e^{\bar{z}-1}$.

Soluzione. Non esistono soluzioni.

□

Parte II

Sistemi e matrici

Capitolo 5

Quinta Lezione - Sistemi e Gauss

5.1 Sistemi lineari su un campo

Esempio 5.1. [CCC00] **Non in classe**

- Risolvere $3x - 2 = 0$ in $\mathbb{R}$ equivale a determinare

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2 = 0\} \subset \mathbb{R} \text{ ovvero } \{2/3\}$$

- Risolvere $(3i - 1)x^2 + (i + 1)x - i = 0$ in $\mathbb{C}$ equivale a determinare

$$\{x \in \mathbb{C} \mid (3i - 1)x^2 + (i + 1)x - i = 0\} \subset \mathbb{C} \text{ ovvero } \left\{ \frac{-i - 1 + \sqrt{(i + 1)^2 + 4i(3i - 1)}}{2(3i - 1)} \right\} \subset \mathbb{C}$$

Esempio 5.2. [CCC01] **Non in classe** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

equivale a determinare

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ ovvero } \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Esempio 5.3. [CCC09] Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 3 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

equivale a determinare

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x - y - 5z = 3 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

che posso descrivere in svariati modi, esplicitando la x

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = -\frac{y}{2} - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \left\{ \left(-\frac{y}{2} - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}, y, z \right) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

oppure la y

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ y = 2x - 5z - 3 \right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \{(x, 2x - 5z - 3, z)\} \subset \mathbb{R}^3 \right.$$

oppure la z

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ z = -\frac{2}{5}x - \frac{y}{5} - \frac{3}{5} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \left\{ \left(x, y, -\frac{2}{5}x - \frac{y}{5} - \frac{3}{5} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^3 \right.$$

Chiaramente si tratta sempre dello stesso insieme S

Diamo una definizione formale di soluzioni:

Definizione 5.4. [CCC03] Sia S un sistema di equazioni a soluzioni in $\mathbb{K}^n$,

$$S : \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

dove $f_1, \dots, f_m$ sono funzioni $: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Allora le soluzioni di S sono l'insieme

$$\text{Sol}(S) = \left\{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} f_1(c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Definizione 5.5. [CCC04] Siano dati due sistemi di equazioni a soluzioni in $\mathbb{K}^n$,

$$S_1 : \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Diciamo che S_1 è equivalente ad S_2 , ($S_1 \equiv S_2$) se, equivalentemente,

1. $\text{Sol}(S_1) = \text{Sol}(S_2)$ (hanno le stesse soluzioni)
2. Posso trasformare le equazioni $f_1, \dots, f_m$ nelle equazioni $g_1, \dots, g_r$ attraverso operazioni che non cambiano l'insieme delle soluzioni.

Per esercizio, provare che le due definizioni precedenti sono equivalenti.

5.2 Metodo di Gauss

Esempio 5.6. [CCC11] Risolviamo su $\mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

Vogliamo risolvere in modo sistematico, eliminando prima le x e poi le y , procedendo dalla prima equazione. Scambiamo la prima e seconda riga

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

sostituiamo alla seconda riga la differenza tra la seconda riga e la prima riga moltiplicata per 2, e alla terza riga la differenza tra la terza riga e la prima moltiplicata per 3.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z - 2(x - y + 2z) = 1 - 2(1) \\ 3x + y - 5z - 3(x - y + 2z) = 2 - 3(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 3z = -1 \\ 4y - 11z = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo alla terza riga la differenza tra la terza riga e la seconda moltiplicata per $\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 3z = -1 \\ 4y - 11z - 4/5(5y - 3z) = 1 - 4/5(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 3z = -1 \\ -\frac{43}{5}z = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 3z = -1 \\ 43z = 1 \end{cases}$$

Dato che opereremo una serie di sostituzioni, dividiamo le righe per avere polinomi monici

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - \frac{3}{5}z = -\frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases}$$

Sostituiamo la z e poi la y

$$\begin{cases} x - y + 2\left(\frac{1}{43}\right) = 1 \\ y - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{43}\right) = -\frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{41}{43} \\ y = -\frac{8}{43} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \left(-\frac{8}{43}\right) = \frac{41}{43} \\ y = -\frac{8}{43} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{43} \\ y = -\frac{8}{43} \\ z = \frac{1}{43} \end{cases}$$

Notiamo che

- operare la sostituzione $z = \frac{1}{43}$ nella seconda riga $y - \frac{3}{5}z = -\frac{1}{5}$ è equivalente a sostituire la seconda riga con la somma tra la seconda riga e $\frac{3}{5}$ la terza

$$y - \frac{3}{5}z + \frac{3}{5}z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{43}\right)$$

- Sostituire alla seconda riga $2x + 3y + z = 1$ la differenza tra la seconda riga e la prima riga $x - y + 2z = 1$ moltiplicata per 2, che, come abbiamo visto, mi dà

$$5y - 3z = -1$$

equivale a operare la sostituzione $x = y - 2z + 1$ nella seconda riga

$$2(y - 2z + 1) + 3y + z = 1 \Rightarrow 5y - 3z = -1$$

Indichiamo questo procedimento sistematico di soluzione come *riduzione di Gauss* di un sistema. I singoli passi di soluzione saranno detti passi di tipo Gauss.

5.3 Sistemi e matrici

Vogliamo scrivere un sistema lineare in forma più compatta evitando la menzione esplicita delle variabili

Matrici e sistemi lineari

Definizione 5.7. [CCC12] Sia $A \in \mathbb{K}^{nm}$. Se scriviamo A come

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diciamo che A è una matrice con m righe ed n colonne. Gli elementi a_{ij} si dicono entrate della matrice. L'insieme delle matrici con m righe ed n colonne con entrate in $\mathbb{K}$ si indica come $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Indicheremo spesso la matrice A come (a_{ij}) , con $i : 1, \dots, m$, $j : 1, \dots, n$. Le limitazioni su i, j saranno spesso sottintese. Se $m = n$ la matrice si dice quadrata.

Definizione 5.8. [CCC13] Le righe di A si indicano come $A_1, \dots, A_m$, le colonne come $A^1, \dots, A^n$.

Esempio 5.9. [CCC14] Abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 4}(\mathbb{Q})$$

allora

$$A_1 = (1, 2, 3, 4) \text{ e } A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Definizione 5.10. [CCC15] Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Allora

1. La diagonale di A è data dagli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$.
2. Se tutti gli elementi di A fuori dalla diagonale sono nulli, la matrice A si dice diagonale.
3. Se tutti gli elementi di A sotto la diagonale sono nulli A si dice triangolare superiore.
4. Se tutti gli elementi di A sopra la diagonale sono nulli A si dice triangolare inferiore.

Esempio 5.11. [CCC16] Le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore.

Esercizio 5.12. [CCX17] Data l'operazione

$$\begin{aligned} + : \quad \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) \times \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) \\ ((a_{ij}), (b_{ij})) &\mapsto (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

provare che $(\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo commutativo con elemento neutro $0 = (0_{ij})$, la matrice che ha tutti gli elementi elemento i, j nulli.

Definizione 5.13. [CCC17] Sia

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare con m equazioni ed n incognite. Diciamo che al sistema è associata la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

mentre la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice incompleta e la colonna

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è detta colonna dei termini noti. Il sistema S si scrive anche

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Osservazione 5.14. [CCC19] Ricordiamo la definizione generale di equivalenza di sistemi: sia $\mathbb{K}$ campo e $A\underline{x} = \underline{b}$, $A'\underline{x} = \underline{b}'$ due sistemi di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con $A, A' \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$, $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono equivalenti se e solo se

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \text{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}') \quad \text{come insiemi}$$

5.4 Prodotto Scalare

Nella discussione sui sistemi lineari e matrici verrà spesso comodo introdurre il *prodotto scalare*.

Osservazione 5.15. [CCC21] Gli elementi $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ si dicono vettori e spesso indicheremo il vettore $(a_1, \dots, a_n)$ come $\underline{a}$. In questo contesto gli elementi di $\mathbb{K}$ si dicono scalari.

Definizione 5.16. [CCC22] Sia A un anello commutativo e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in A^n$. Allora l'operazione

$$\begin{aligned} \cdot: \quad A^n \times A^n &\rightarrow A \\ ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) &\mapsto (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n) = \sum_{i=1}^n v_iw_i \end{aligned}$$

è detta prodotto scalare. Nella maggior parte dei casi, A sarà un campo $\mathbb{K}$.

Esempio 5.17. [CCC23]

1. Se $\underline{v} = (1, 2, -4)$ e $\underline{u} = (1, 3, 2)$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$,

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -1 \in \mathbb{R}$$

2. Se $\underline{v} = (1 + i, 1 - i)$ e $\underline{u} = (i, 1 + 2i)$ sono vettori di $\mathbb{C}^2$,

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = (1 + i) \cdot i + (1 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 2i \in \mathbb{C}$$

Proposizione 5.18. [CCC24] Sia $\mathbb{K}$ campo, $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora

1. Il prodotto scalare è commutativo, ovvero $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$.
2. $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ il prodotto scalare si distribuisce sulla somma di vettori.
3. $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v}$ il prodotto scalare è omogeneo.

Dimostrazione.

1. Discende immediatamente dalla definizione.
2. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \cdot (w_1, \dots, w_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i w_i + v_i w_i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w} &= \left(\sum_{i=1}^n u_i w_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n v_i w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i w_i + v_i w_i) \end{aligned}$$

E quindi la tesi.

3. Basta fare i conti analogamente al primo punto, raccogliendo λ .

□

Osservazione 5.19. [CCC26] Sia $\mathbb{K}$ campo e $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con m equazioni ed n incognite. Possiamo indicare la prima equazione del sistema, $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ come

$$\begin{aligned} (a_{11}, \dots, a_{1n}) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ A_1 \cdot \underline{x} &= b_1 \end{aligned}$$

Analogamente per le altre equazioni, per esempio per $i \in \{1 \dots n\}$,

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= b_i \\ A_i \cdot \underline{x} &= b_i \end{aligned}$$

Il sistema S si può quindi scrivere come

$$\begin{cases} A_1 \cdot \underline{x} = b_1 & \text{prima riga} \\ A_2 \cdot \underline{x} = b_2 & \text{seconda riga} \\ \vdots \\ A_m \cdot \underline{x} = b_m & m - \text{esima riga} \end{cases}$$

o in breve,

$$(A_1, \dots, A_n) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

o, dando un significato alla notazione che avevamo usato in precedenza,

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Definizione 5.20. [CCC27] *L'operazione*

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, \underline{v}) &\mapsto \lambda(v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \end{aligned}$$

si dice prodotto esterno di $\mathbb{K}^n$, e corrisponde, geometricamente, a moltiplicare per λ il modulo di $\underline{v}$ lasciando per il resto il vettore invariato (ovvero ad allungare $\underline{v}$ di un fattore λ).

Proposizione 5.21. Se $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$ si ha che

1. $(\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$.
2. $\lambda(\underline{v} + \underline{w}) = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w}$.
3. $\lambda\mu\underline{v} = \lambda(\mu\underline{v})$.
4. $0\underline{v} = \underline{0}$, $\lambda\underline{0} = \underline{0}$, $1\underline{v} = \underline{v}$.

Dimostrazione. Immediata dalla definizione □

5.5 Operazioni sui sistemi

Vogliamo dimostrare che le operazioni sui sistemi di cui abbiamo parlato producono sistemi equivalenti.

Proposizione 5.22 (Scambio righe). [CCC30] Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con m equazioni ed n incognite. Seguendo la notazione per le righe abbiamo che

$$A = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_i, \dots, \underbrace{A_j}_j, \dots, A_m] \text{ con } i < j$$

Se

$$A' = [A_1, \dots, \underbrace{A_j}_i, \dots, \underbrace{A_i}_j, \dots, A_m]$$

$$\underline{b}' = (b_1, \dots, \underbrace{b_j}_i, \dots, \underbrace{b_i}_j, \dots, b_m)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni).

Dimostrazione. Ovvio, scambiare due equazioni non cambia le soluzioni del sistema. $\square$

Definizione 5.23. [CCC32] *[Combinazioni lineari di due oggetti] Dati due oggetti f, g e due elementi α, β di un anello A per cui sia definito $\alpha f + \beta g$, l'oggetto $\alpha f + \beta g$ si dice combinazione lineare degli oggetti f, g a coefficienti α, β .*

Osservazione 5.24. [CCX33] *In genere gli oggetti sono polinomi di $\mathbb{K}[x]$, vettori di $\mathbb{K}^n$, funzioni, matrici.*

Esempio 5.25. [CCX32]

1. $5(1, 2) + 3(0, 1) = (5, 10) + (0, 3) = (5, 13)$ è la combinazione lineare dei due vettori $(1, 2), (0, 1)$ a coefficienti $5, 3$.
2. $-(x^2 - 1) + 2(x + 2) = -x^2 + 2x + 5$ è la combinazione lineare dei due polinomi $x^2 - 1, x + 2$ a coefficienti $-1, 2$.

La nozione di combinazione lineare si generalizza facilmente ad un numero finito di oggetti.

Definizione 5.26. [CCX34] *[Combinazioni lineari di più oggetti] Dati n oggetti $f_1, \dots, f_n$ e n elementi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di un anello A per cui sia definito*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot (f_1, \dots, f_n)$$

dove $\cdot$ è il prodotto scalare. L'oggetto $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ si dice combinazione lineare degli oggetti $f_1, \dots, f_n$ a coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in A .

Proposizione 5.27 (Combinazione lineare di righe). [CCC31] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con m equazioni ed n incognite. Sostituire l'equazione j -esima del sistema con la combinazione lineare di se stessa ed un'altra equazione i -esima non cambia le soluzioni del sistema, se il coefficiente della prima equazione nella combinazione lineare è non nullo.*

Più formalmente, seguendo la notazione per le righe, abbiamo che

$$A = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_i, \dots, \underbrace{A_j}_j, \dots, A_m] \text{ con } i < j$$

$$\underline{b} = (b_1, \dots, \underbrace{b_i}_i, \dots, \underbrace{b_j}_j, \dots, b_m)$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, con $\beta \neq 0$

$$A' = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_i, \dots, \underbrace{\alpha A_i + \beta A_j}_j, \dots, A_m]$$

$$\underline{b}' = (b_1, \dots, \underbrace{b_i}_i, \dots, \underbrace{\alpha b_i + \beta b_j}_j, \dots, b_m)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono equivalenti.

Dimostrazione. Proviamo prima che ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ è anche soluzione di $A'\underline{x} = \underline{b}'$, e poi il viceversa.

- Sia $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora $\forall i : 1 \dots m$ abbiamo $A_i \cdot \underline{v} = b_i$; dobbiamo dimostrare che
 1. $\underline{v} \in \text{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$, ovvero che $\forall i : 1 \dots m, i \neq j$ $A_i \cdot \underline{v} = b_i$ che è immediato dall'ipotesi dato che si tratta di righe diverse dalla j -esima, e che
 2. per la riga j -esima $(\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$ per le proprietà del prodotto scalare.

$$(\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha A_i \cdot \underline{v} + \beta A_j \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$$

- Sia $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \text{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$. Allora

$$\forall i : 1 \dots m, i \neq j \quad A_i \cdot \underline{v} = b_i \text{ e } (\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$$

e vogliamo dimostrare che $\underline{v} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ ovvero che

$$\forall i : 1 \dots n \text{ abbiamo } A_i \cdot \underline{v} = b_i$$

Dato che questo è evidente per ogni $i \neq j$ perché $\underline{v}$ sia soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ rimane solo da dimostrare che

$$A_j \cdot \underline{v} = b_j$$

Ma

$$\begin{aligned} (\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} &= \alpha b_i + \beta b_j \\ \alpha A_i \cdot \underline{v} + \beta A_j \cdot \underline{v} &= \alpha b_i + \beta b_j \end{aligned}$$

Dato che $A_i \cdot \underline{v} = b_i \Rightarrow \alpha A_i \cdot \underline{v} = \alpha b_i$

$$\begin{aligned} \beta A_j \cdot \underline{v} &= \beta b_j \\ \beta(A_j \cdot \underline{v} - b_j) &= 0 \end{aligned}$$

Dato che $\beta \neq 0$ ne consegue che $A_j \cdot \underline{v} = b_j$ e quindi abbiamo la tesi.

□

Osservazione 5.28 (Moltiplicazione di una riga per scalare). [CCW33] *Nelle ipotesi della proposizione immediatamente precedente, sostituire l'equazione j -esima del sistema un suo multiplo per uno scalare non nullo non cambia le soluzioni del sistema.*

Proposizione 5.29 (Scambio colonne). [CCC33] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$. Ricordando che le colonne di A sono indicate come $A^1, \dots, A^n$ abbiamo che*

$$A = [A^1, \dots, \underbrace{A^i}_i, \dots, \underbrace{A^j}_j, \dots, A^n]$$

con $i < j$. Se

$$A' = [A^1, \dots, \underbrace{A^j}_j, \dots, \underbrace{A^i}_i, \dots, A^n], \quad x' = (x_1, \dots, \underbrace{x_j}_i, \dots, \underbrace{x_i}_j, \dots, x_n)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x}' = \underline{b}'$ sono equivalenti.

N.B. i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x} = \underline{b}'$ NON SONO EQUIVALENTI.

Dimostrazione. Ovvio, cambiare di posto le variabili non cambia le soluzioni del sistema, ma se non mi ricordo che ho cambiato posto alle variabili (scambiato il nome) e risolvo il sistema le soluzioni cambiano. $\square$

Definizione 5.30. [CCR31] Una matrice A si dice in forma a scala se il primo elemento non nullo di ogni riga è a destra del primo elemento non nullo di tutte le righe superiori. Questi elementi non nulli si dicono pivot.

Esempio 5.31. [CCC96] Data la matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & 11 \end{array} \right)$$

i pivot sono quelli indicati, ovvero 1 in posizione 1,1, 5 in posizione 2,4 e 14 in posizione 3,5. Le colonne dei pivot sono la prima, quarta e quinta.

Tra tutte le possibili operazioni sulle righe di una matrice, alcune sono classificate come operazioni di Gauss.

Definizione 5.32. [CCY31] Data una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ Le operazioni di Gauss per una matrice sono

1. lo scambio di righe $A_i \leftrightarrow A_j$.
2. La sostituzione di righe $A_j \rightarrow A_j - \lambda A_i$ per $i < j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j . Più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sotto il pivot di A_i nullo.
3. La sostituzione di righe $A_j \rightarrow A_j - \lambda A_i$ per $i > j$ e con un opportuno λ tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sopra il pivot di A_i nullo.

Lo scambio di colonne non è considerata un operazione di Gauss, dato che non lascia invariate le soluzioni.

Definizione 5.33. [CCD38] Dati due sistemi lineari $A\underline{x} = \underline{b}$, $C\underline{x} = \underline{d}$ diremo che le matrici $[A|\underline{b}]$ e $[C|\underline{d}]$ sono equivalenti se i sistemi lineari associati sono equivalenti, ovvero se hanno le stesse soluzioni.

Definizione 5.34. [CCD39] Una matrice quadrata di ordine n in cui i soli elementi non nulli sono sulla diagonale (gli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$) si dice matrice diagonale. Se gli elementi sulla diagonale di una matrice diagonale sono tutti uguali ad 1 questa matrice si denota come matrice identità di ordine n o matrice identica di ordine n o spesso come I_n . Le matrice diagonali sono un particolare tipo di matrici a scala. Per esempio,

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 5.35. [CCC39] Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di n equazioni lineari ad n incognite (quadrato) su $\mathbb{K}$. Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A|\underline{b}]$ nel sistema equivalente $[I_n|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss, dove I_n è la matrice identica di ordine n .

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero n di equazioni (ovvero sull'ordine n della matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$).

- Base, $n = 1$. Il sistema è

$$\{a_{11}x = b_1\}$$

Notiamo che

- Se $a_{11} = 0$ e $b_1 \neq 0$ il sistema è impossibile.
- Se $a_{11} = 0$ e $b_1 = 0$ tutte le $x \in \mathbb{K}$ sono soluzioni. Esistono quindi ∞ soluzioni.

Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $a_{11} \neq 0$, ed in questo caso il sistema è equivalente al sistema

$$\{x = \frac{b_1}{a_{11}}\}$$

con matrice associata $[I_1 | \frac{b_1}{a_{11}}]$

- Passo induttivo. Supponiamo la tesi vera per $n - 1$, vediamo che è vera per n .

Vogliamo quindi dimostrare che:

il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ammette un'unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A | \underline{b}]$ nel sistema equivalente $[I_n | \underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss.

sapendo che: (Ipotesi induttiva)

ogni sistema $A''\underline{x} = \underline{b''}$, con $A'' \in \text{Mat}_{n-1 \times n-1}(\mathbb{K})$ ammette un'unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A'' | \underline{b''}]$ nel sistema equivalente $[I_{n-1} | \underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss

- $\Leftarrow$ Se posso trasformare il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ nel sistema equivalente $I_n \underline{x} = \underline{c}$ mediante operazioni di Gauss, il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

ed è immediato che ha una ed una sola soluzione, $\underline{x} = \underline{c}$. Quindi ammette un'unica soluzione. Notiamo che non è stato necessario usare l'ipotesi induttiva.

- $\Rightarrow$ Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un'unica soluzione. Voglio dimostrare che posso ridurre $[A | \underline{b}]$ alla matrice equivalente $[I_n | \underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss.

Opero sulla matrice completa $[A | \underline{b}]$. Per la prima riga, considero il primo elemento a_{11} . Se è nullo, scambio la prima riga con una riga sotto di lei che abbia il primo elemento non nullo. Se non ne trovo nessuna, vuol dire che tutta la prima colonna è nulla, e dato che questo implica che non ho condizioni su x_1 , ed ho quindi ∞ soluzioni, mentre la soluzione esiste unica per ipotesi, questo è impossibile.

Posso quindi supporre che $a_{11} \neq 0$ e trasformare la matrice con operazioni di Gauss nella matrice

$$[A' | \underline{b}'] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right) \quad (i\text{-esima})^a \rightarrow (i\text{-esima})^a - \frac{a_{i1}}{a_{11}} I^a$$

$[A' | \underline{b}']$ è equivalente a $[A | \underline{b}]$. Posso scrivere $[A' | \underline{b}']$ come

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \mathbf{a}'_{22} & \mathbf{a}'_{23} & \cdots & \mathbf{a}'_{2n} & \mathbf{b}'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{a}'_{n2} & \mathbf{a}'_{n3} & \cdots & \mathbf{a}'_{nn} & \mathbf{b}'_n \end{array} \right)$$

la sottomatrice in neretto, che possiamo indicare come $[A''|\underline{b}'']$ ha ordine $n-1$ e soddisfa la tesi, quindi per l'ipotesi induttiva posso ridurla con Gauss alla matrice equivalente $I_{n-1}\underline{x} = \underline{c}''$. Indichiamo gli elementi di $[I_{n-1}|\underline{c}'']$ partendo per le righe dall'indice 2 per comodità.

Quindi il sistema associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array} \right)$$

Dividiamo la prima riga per a_{11}

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array} \right)$$

Adesso, posso ridurre la matrice incompleta a diagonale sostituendo $n-1$ volte la prima riga con la differenza della prima riga con la riga i -esima moltiplicata per a_{1i}

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array} \right) \quad I^a \rightarrow I^a - a_{1i}(i\text{-esima riga})$$

con $i: 2 \dots n$. Sto operando una sostituzione all'indietro. O, se si preferisce dirlo in altro modo, sto mettendo la matrice in forma normale. Indichiamo la forma finale del termine noto della prima riga (cambia ad ogni operazione) con c_1 .

□

Corollario 5.36. [CCC35] Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con tante incognite quante equazioni (la matrice incompleta è quadrata). Se il sistema ammette un'unica soluzione, possiamo sempre trovare un sistema equivalente $A'\underline{x} = \underline{b}'$ con A' matrice triangolare superiore con elementi sulla diagonale non nulli.

Osservazione-Definizione 5.37. [CCQ35] In sistema $[D|\underline{b}]$, con $D = (d_{ij})$ diagonale

- Se uno dei coefficienti d_{ii} è nullo, ed il corrispondente b_i non lo è, il sistema è impossibile.
- Se per ogni coefficiente d_{ii} nullo il corrispondente b_i è nullo, il sistema ha ∞ soluzioni, ed in particolare ogni variabile x_i può variare liberamente su $\mathbb{K}$. Sia k il numero dei coefficienti nulli, si dice che il sistema ha ∞^k soluzioni.

Non sempre i gradini della scala hanno la stessa lunghezza

Esempio 5.38. [CCC93] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z + 3t + s = 0 \\ x + y + z - 2t - s = 2 \\ x + y + z + t + 3s = 3 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Operiamo una riduzione di Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1, 3, 1,0],
        [1,1,1,-2,-1,2],
        [1,1,1, 1, 3,3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
      2^a-1*1^a [0, 0, 0, -5, -2, 2]
      3^a-1*1^a [0, 0, 0, -2, 2, 3]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 4]=-5

```
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
----- [0, 0, 0, -5, -2, 2]
      3^a-2/5*2^a [0, 0, 0, 0, 14/5, 11/5]
```

```
----- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
      1*2^a* [0, 0, 0, 5, 2, -2]
      5*3^a [0, 0, 0, 0, 14, 11]
```

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x + y + z + 3t + s = 0 \\ 5t + 2s = -2 \\ 14s = 11 \end{cases}$$

Sostituiamo $s = \frac{11}{14}$ e poi $t = -\frac{5}{7}$ nelle righe precedenti

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z + 3t + \frac{11}{14} = 0 \\ 5t + 2\frac{11}{14} = -2 \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y + z + 3t = -\frac{11}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z - 3\frac{5}{7} = -\frac{11}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = \frac{19}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z + \frac{19}{14} \\ t = -\frac{5}{7} \\ s = \frac{11}{14} \end{cases} \end{aligned}$$

se scegliamo di esplicitare la x . Le soluzioni del sistema sono quindi

$$\left\{ \left(-y - z + \frac{19}{14}, y, z, -\frac{5}{7}, \frac{11}{14} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

Notiamo che nella forma finale del sistema la matrice associata è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{14} \end{array} \right)$$

Notiamo che invece di operare le sostituzioni, avremmo potuto, come al solito, fare delle opportune operazioni di Gauss sulla matrice.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
      2^a*-1/5 [0, 0, 0, 1, 2/5, -2/5]
      3^a*+5/14 [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]
```

Cancello la colonna sopra il 5 pivot

```
      1^a*+1*3^a [1, 1, 1, 3, 0, -11/14]
      2^a*+2/5*3^a [0, 0, 0, 1, 0, -5/7]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]
```

Cancello la colonna sopra il 4 pivot

```
      1^a*+3*2^a [1, 1, 1, 0, 0, 19/14]
----- [0, 0, 0, 1, 0, -5/7]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]
```

5.6 Forma standard e normale

Osservazione 5.39. [CCC97] *Risulta evidente che in una matrice a scala è possibile cancellare tutti gli elementi sopra il pivot di una colonna di pivot con operazioni di Gauss lasciando immutati gli elementi a sinistra della colonna.*

Esempio 5.40. [CCC99] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t - w = 2 \\ z - t + w = 1 \\ t + w = 0 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice è già in forma a scala. Per risolvere il sistema associato, mettiamola in forma standard con operazioni di Gauss. Iniziamo usando il pivot della terza riga per cancellare gli elementi sopra di lui nella seconda e prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} I^a \rightarrow I^a - III^a \\ II^a \rightarrow II^a + III^a \end{array}$$

Usiamo il pivot della seconda riga per cancellare l'elemento sopra di lui nella prima riga

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \right) \quad I^a \rightarrow I^a - 3 * II^a$$

Il sistema associato alla matrice è

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & +2y & & & -8w & = & -1 \\ & & & z & +2w & = & 1 \\ & & & & t & +w & = 0 \end{array}$$

Da cui abbiamo, esplicitando le variabili legate ai pivot e portando a destra le variabili non legate ai pivot,

$$\begin{cases} x = -1 - 2y + 8w \\ z = 1 - 2w \\ t = -w \end{cases}$$

Esempio 5.41. [CCC98] Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 1 \\ 2y - 3z + 5t - w = 2 \\ z - t + w = 0 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice è già in forma a scala. Per risolvere il sistema associato, mettiamola in forma standard con operazioni di Gauss. Iniziamo usando il pivot della terza riga per cancellare gli elementi sopra di lui nella seconda e prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I^a \rightarrow I^a - III^a \\ II^a \rightarrow II^a + 3 * III^a \end{array}$$

Per comodità, dopo dividiamo la seconda riga per 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad II^a \rightarrow 1/2 * II^a$$

Usiamo il pivot della seconda riga per cancellare l'elemento sopra di lui nella prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad I^a \rightarrow I^a - II^a$$

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x & + t - w = 0 \\ & y & + t + w = 1 \\ & & z - t + w = 0 \end{cases}$$

da cui abbiamo, esplicitando le variabili legate ai pivot e portando a destra le variabili non legate ai pivot,

$$\begin{cases} x = -t + w \\ y = 1 - t - w \\ z = t - w \end{cases}$$

Definizione 5.42. [CCA69] Una matrice a scala con tutti gli elementi sopra i pivot nulli, è detta in forma standard. La matrice dell'esercizio 5.40 precedente, è in forma standard.

Esempio 5.43. [CCC95] Data la matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{14} \end{array} \right)$$

i pivot sono quelli indicati, ovvero 1 in posizione (1,1), 1 in posizione (2,4) e 1 in posizione (3,5). Le colonne dei pivot sono la prima, quarta e quinta.

Definizione 5.44. [CCC65] Una matrice in forma standard in cui le colonne dei pivot siano raggruppate a sinistra formando una matrice diagonale, con gli elementi su questa diagonale 1, sopra possibilmente una matrice nulla è in forma normale.

La matrice dell'esercizio 5.41 precedente è in forma normale.

Esempio 5.45. [CCE95] La matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{array} \right)$$

è in forma normale. Possiamo anche scriverla come

$$\left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{array} \right) \right] = \left[I_3 \middle| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{array} \right) \right]$$

Corollario 5.46. [CCC36] Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ a $[S|\underline{b}']$ (S è a scala) con operazioni di Gauss del tipo $i < j$. Ho che

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \text{Sol}(S\underline{x} = \underline{b}')$$

Corollario 5.47. [CCC37] Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ ad una matrice equivalente $[S|\underline{b}']$ (S è una matrice in forma standard) con operazioni di Gauss. Ho che

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \text{Sol}(S\underline{x} = \underline{b}')$$

Corollario 5.48. [CCC66] Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre, usando operazioni di Gauss ed opportuni scambi di colonne, ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ a $[N|\underline{b}']$ (N è in forma normale). Le soluzioni $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ si ottengono dalle soluzioni $\text{Sol}(N\underline{x} = \underline{b}')$ riportando al contrario gli scambi di colonne sulle entrate del vettore generico delle soluzioni.

Ricapitolando,

Osservazione 5.49. [CCW66] Ricordiamo che le operazioni di Gauss su una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

1. lo scambio di righe $A_i \leftrightarrow A_j$.
2. la sostituzione di righe $A_j \rightarrow A_j - \lambda A_i$ per $i < j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j (Più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sotto il pivot di A_i nullo).
3. la sostituzione di righe $A_j \rightarrow A_j - \lambda A_i$ per $i > j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j (Più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sopra il pivot di A_i nullo).

Osservazione 5.50. [CCZ31] *Quindi,*

- Con le prime due operazioni di Gauss posso portare qualunque matrice in forma a scala.
- Se uso anche la terza posso portare qualunque matrice in forma standard.
- Se ammettiamo anche scambi di colonna (non sono operazioni di Gauss), posso portare qualunque matrice in forma normale. Ricordiamo che se la matrice rappresenta un sistema e se vogliamo le soluzioni del sistema originario, dobbiamo scambiare tra loro le posizioni del vettore delle soluzioni coerentemente con gli scambi di colonne. Dato che sto sostanzialmente cambiando il nome delle variabili, la struttura delle soluzioni ($\#$, $\exists!$, $\exists \infty^k$) rimane la stessa

Osservazione 5.51. [CCC79] *Il metodo usuale è di esplicitare le variabili associate ai pivot, e portare le variabili non associate ai pivot a destra dell'uguaglianza.*

Capitolo 6

Sesta Lezione - Esercizi

6.1 Esercizi svolti

Problema 6.1. [CCC10] *Come faccio a testare se due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ sono uguali, o uno contiene l'altro?*

1. *Se i due insiemi sono finiti, controllo che abbiano stessa cardinalità e stessi elementi.*
2. *Se i due insiemi sono dati mediante equazioni (descrizione cartesiana, vedremo poi una definizione precisa), posso controllare se le due descrizioni equazionali si possono trasformare l'una nell'altra.*
3. *Se i due insiemi sono dati descrivendo un elemento generico (descrizione parametrica, vedremo poi una definizione precisa) possiamo controllare che ogni elemento del primo insieme appartenga al secondo e viceversa.*

Esempio 6.2. [CCE02] **Non in classe** *Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{C}^2$*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 4ix - 4 = 0\} \quad A_2 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 2xi - x + 2i = 0\}$$

Determinare se sono uguali o se uno contiene l'altro propriamente.

Soluzione. Abbiamo $x^2 - 4ix - 4 = (x - 2i)^2$, quindi

$$A_1 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 4ix - 4 = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid (x - 2i)^2 = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x - 2i = 0\} = \{2i\}$$

e dato che $x^2 - 2xi - x + 2i = (x - 1)(x - 2i)$, come si può vedere facilmente applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado ed il Teorema di Ruffini

$$A_2 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 2ix - 2 + 2i = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid (x - 1)(x - 2i) = 0\} = \{1, 2i\}$$

Quindi $A_2 \subsetneq A_1$. □

Esempio 6.3. [CCC02] *Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^2$*

$$A_1 = \{(1 + 2t, 2 - 4t) \mid t \in \mathbb{Q}\} \quad A_2 = \{(3 - t, -2 + 2t) \mid t \in \mathbb{Q}\}$$

Determinare se $A_1 = A_2$.

Soluzione. Innanzitutto, per evitare confusioni, cambiamo il nome della variabile legata di A_2 da t ad s . Ricordiamo che i nomi delle variabili "legate", che descrivono un insieme, hanno senso solo nella descrizione dell'insieme stesso.

$$A_2 = \{(3 - s, -2 + 2s)\}$$

Vogliamo quindi vedere se ogni elemento di A_1 sta in A_2 e viceversa. Ovvero, se per ogni $t \in \mathbb{Q} \exists s \in \mathbb{Q}$ tale che $(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s)$ (incognita s , legata all' $\exists$, parametro t legato al $\forall$) e viceversa (l'incognita sarà t ed il parametro, s). Abbiamo quindi il sistema a variabile s e parametro t

$$(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ 2 - 4t = -2 + 2s \end{cases}$$

Mettiamo il sistema nella solita forma

$$(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ 2 - 4t = -2 + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 - 2t \\ s = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi per ogni valore del parametro t esiste una $s = 2 - 2t$ che soddisfa il sistema, ed abbiamo quindi dimostrato che $A_1 \supseteq A_2$.

Il viceversa è immediato dai conti già fatti, per ogni valore del parametro s esiste una $t = 1 - \frac{1}{2}s$ che soddisfa il sistema, e quindi $A_2 \supseteq A_1$.

Quindi $A_1 = A_2$. □

Esercizio 6.4. [CCQ25] Sia $\mathbb{K}$ campo e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Allora

1. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Infatti

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) &= 0 \\ \underline{v}_1^2 + \dots + \underline{v}_n^2 = \sum_{i=1}^n \underline{v}_i^2 &= 0 \\ \forall i \ \underline{v}_i &= 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \end{aligned}$$

2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\underline{v} \cdot_{\mathbb{C}} \underline{v} = 0 \not\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Infatti $(1, i) \cdot (1, i) = 1 + i^2 = 0$

Possiamo operare sulle matrici come sui sistemi, per esempio usando il metodo di riduzione di Gauss.

Esercizio 6.5. [KK05] Determinare le soluzioni del sistema 4 equazioni in 4 incognite

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = 1 \\ x + 2y + 2z + 2t = 3 \\ 3x - 3y + z + 2t = -2 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Operiamo una riduzione di Gauss

```

Ab:=Mat[[3, 1, 1, -1, 0],
        [2, 1, 1, 2, 1],
        [1, 2, 2, 2, 3],
        [3, -3, 1, 2, -2]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 1, -1, 0]
      2^a-2/3*1^a [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
      3^a-1/3*1^a [0, 5/3, 5/3, 7/3, 3]
      4^a-1*1^a [0, -4, 0, 3, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 1, -1, 0]
----- [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
      3^a-5*2^a [0, 0, 0, -11, -2]
      4^a+12*2^a [0, 0, 4, 35, 10]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [3, 1, 1, -1, 0],
      [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1],
      [0, 0, 4, 35, 10],
      [0, 0, 0, -11, -2]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 1, -1, 0]
----- [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
----- [0, 0, 4, 35, 10]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, -11, -2]

```

Il sistema $\mathcal{F}$ è quindi equivalente a

$$\begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ y + z + 8t = 3 \\ 4z + 35t = 10 \\ -11t = -2 \end{cases}$$

che possiamo facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t = 1 \\ 4z + 35\frac{2}{11} = 10 \\ t = \frac{2}{11} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t = 1 \\ z = \frac{10}{11} \\ t = \frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{11} + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{11} = 1 \\ z = \frac{10}{11} \\ t = \frac{2}{11} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ y = \frac{7}{11} \\ z = \frac{10}{11} \\ t = \frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x & & + \frac{7}{11} + \frac{10}{11} - \frac{2}{11} = 0 \\ & y & & = \frac{7}{11} \\ & & z & = \frac{10}{11} \\ & & & t = \frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & & & = -\frac{5}{11} \\ & y & & = \frac{7}{11} \\ & & z & = \frac{10}{11} \\ & & & t = \frac{2}{11} \end{cases}$$

e quindi

$$\text{Sol}(A \cdot \underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}, \frac{2}{11} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{11} (-5, 7, 10, 2) \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

□

Esercizio 6.6. [EE97] **Non in classe** Risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + z - t = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ y + 2z + 2t = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa $[A \mid b]$ associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Riduciamo questa matrice con Gauss

```
Ab:=Mat([ [0,1,3,2,0],
           [1,4,1,-1,1],
           [2,1,1,0,2],
           [0,1,2,2,1] ]);
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [1, 4, 1, -1, 1],
      [0, 1, 3, 2, 0],
      [2, 1, 1, 0, 2],
      [0, 1, 2, 2, 1] ]
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 1, -1, 1]
0 sotto pivot[0, 1, 3, 2, 0]
3^a-2*1^a [0, -7, -1, 2, 0]
0 sotto pivot[0, 1, 2, 2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 1, -1, 1]
----- [0, 1, 3, 2, 0]
3^a+7*2^a [0, 0, 20, 16, 0]
4^a-1*2^a [0, 0, -1, 0, 1]
```



```

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=20
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 1, -1, 1]
----- [0, 1, 3, 2, 0]
----- [0, 0, 20, 16, 0]
      4^a+1/20*3^a [0, 0, 0, 4/5, 1]

```

La matrice è adesso in forma triangolare superiore, e dato che tutti i pivot sono diversi da zero, ammette un'unica soluzione. Troviamo questa soluzione mettendo la matrice incompleta in forma diagonale mediante operazioni di tipo Gauss, il che è equivalente ad operare una sostituzione all'indietro.

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 4, 1, -1, 1]
----- [0, 1, 3, 2, 0]
      3^a+1/20 [0, 0, 1, 4/5, 0]
      4^a+5/4 [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
      1^a-1*4^a [1, 4, 1, 0, 9/4]
      2^a+2*4^a [0, 1, 3, 0, -5/2]
      3^a+4/5*4^a [0, 0, 1, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a+1*3^a [1, 4, 0, 0, 13/4]
      2^a+3*3^a [0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 1, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a+4*2^a [1, 0, 0, 0, 5/4]
----- [0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 1, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5/4]

```

Dalla matrice in questa forma leggiamo immediatamente la soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \\ t = \frac{5}{4} \end{cases}$$

□

IL seguente esercizio ci permette di esaminare il comportamento dell'algoritmo di Gauss in presenza di un parametro tra le entrate della matrice.

Esercizio 6.7. [CCE38] *Al variare del parametro reale a , dire quando il sistema 3×3 associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & a & 2 & 2 \\ a-2 & 2a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha un'unica soluzione.

Dimostrazione. Soluzione

- Procediamo senza indugio: riduciamo la matrice con Gauss

```
M:=Mat([[a, a-1,1,2],
        [a-1, a,2,2],
        [a-2,2a,0,0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Procedo considerando a<>0, il caso a=0 verra' svolto a parte
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a - 1, 1, 2]
2^a-((a - 1)/a)*1^a [0, (2a - 1)/a, (a + 1)/a, 2/a]
3^a-((a - 2)/a)*1^a [0, (a^2 + 3a - 2)/a, (-a + 2)/a, (-2a + 4)/a]
Dato che a<>0 multiplico per a la seconda e terza riga, ottenendo la matrice
Mat([[a,      a - 1,      1,      2],
     [0,      2a - 1,  a + 1,      2],
     [0, a^2 + 3a - 2, -a + 2, -2a + 4]])
```

```
Procedo considerando a<>1/2, il caso a=1/2 verra' svolto a parte
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a - 1, 1, 2]
----- [0, 2a - 1, a + 1, 2]
3^a-((1/2a^2 + 3/2a - 1) [0, 0, (-1/2a^3 - 3a^2 + 2a)/(a - 1/2), (-3a^2 + 2a)/(a - 1/2)]
/(a - 1/2))*2^a
```

```
Dato che a<>1/2 multiplico per a-1/2 la terza riga,
e dato che a<>0 divido la terza riga per a, ottenendo la matrice
[a, a - 1,      1,      2]
[0, 2a - 1,      a + 1,      2]
[0,      0, -1/2a^2 - 3a + 2, -3a + 2]
```

Consideriamo quindi i tre casi

1. $a \neq 0, \frac{1}{2}$ Abbiamo tre elementi sulla diagonale, i primi due sicuramente diversi da zero. Per il terzo, dato che

$$-1/2a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

abbiamo due ulteriori casi:

- (a) $a \neq \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$. Abbiamo tre pivot e quindi un'unica soluzione.
- (b) $a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$ abbiamo che la terza riga è nulla tranne l'ultimo elemento. L'equazione associata diviene $0 = -3\frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2} + 2$ che è chiaramente impossibile.

2. $a = 0$. Possiamo sostituire nella matrice dove abbiamo posto la condizione, ovvero la matrice iniziale a con 0, ottenendo

```
M:=Mat([[0, -1,1,2],
        [-1, 0,2,2],
        [-2,0,0,0]]);
```

Moltiplichiamo la terza riga per -1 e la scambiamo con la prima

```
M:=Mat([[2,0,0,0],
        [-1, 0,2,2],
        [0, -1,1,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 0, 0, 0]
2^a-(-1/2)*1^a [0, 0, 2, 2]
0 sotto pivot[0, -1, 1, 2]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[2, 0, 0, 0],
     [0, -1, 1, 2],
     [0, 0, 2, 2]])
```

Ho tre pivot, e quindi un'unica soluzione.

3. $a = \frac{1}{2}$. Possiamo sostituire nella matrice dove abbiamo posto la condizione, ovvero la matrice

```
Mat([[a,      a - 1,      1,      2],
     [0,      2a - 1,  a + 1,      2],
     [0, a^2 + 3a - 2, -a + 2, -2a + 4]])
```

a con $\frac{1}{2}$, ottenendo la matrice

```
Mat([[1/2, -1/2, 1, 2],
     [0,      0, 3/2, 2],
     [0, -1/4, 3/2, 3]]);
```

Scambiando la seconda e terza riga, otteniamo la matrice

```
Mat([[1/2, -1/2, 1, 2],
     [0, -1/4, 3/2, 3],
     [0,      0, 3/2, 2]]);
```

che è già in forma a scala, con tre pivot, e quindi esiste un'unica soluzione.

Ricapitolando, il sistema ha un'unica soluzione tranne che per $a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$, quando è impossibile.

- Dato che non ci sono chieste le soluzioni, ma solo quando ne esiste una sola, possiamo scambiare la prima e terza colonna senza alterare il problema *per quanto vogliamo sapere, ovvero la numerosità delle soluzioni*. N.B. Non possiamo scambiare una delle prime tre colonne con la quarta, perché questa è la colonna dei termini noti, non dei coefficienti di una variabile. Otteniamo quindi la matrice

```
M:=Mat([[1,  a,  a-1, 2],
        [2, a-1,  a, 2],
        [0, a-2, 2a, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1,      a,  a - 1, 2]
2^a-(2)*1^a [0, -a - 1, -a + 2, -2]
0 sotto pivot[0,  a - 2,      2a, 0]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-a - 1

Pomgo $a < -1$ e procedo, il caso $a = -1$ sarà svolto a parte

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1, a, a - 1, 2]
----- [0, -a - 1, -a + 2, -2]
3^a-((-a + 2)/(a + 1))*2^a [0, 0, (a^2 + 6a - 4)/(a + 1), (-2a + 4)/(a + 1)]
Moltiplico per a+1, dato che lo so non nullo, ottenendo
Mat([[1,      a,      a - 1,      2],
     [0, -a - 1,      -a + 2,      -2],
     [0,      0, a^2 + 6a - 4, -2a + 4]])

```

Esaminiamo i due casi, ricordando che le radici di $a^2 + 6a - 4$ sono $a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -3 \pm \sqrt{13}$.

1. $a \neq -1$.
 - (a) se $a \neq -3 \pm \sqrt{13}$ ho tre pivot ed una sola soluzione.
 - (b) se $a = -3 \pm \sqrt{13}$, come sopra ho un sistema impossibile.
2. $a = -1$: opero la sostituzione nella matrice in cui ho posto la condizione,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 & 2 \\ 0 & -a-1 & -a+2 & -2 \\ 0 & a-2 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che dopo aver scambiato la seconda e terza riga diviene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

matrice a scala con tre pivot e quindi esiste una soluzione unica.

Come prima (ovviamente), esiste un'unica soluzione se e solo se $a \neq -3 \pm \sqrt{13}$, altrimenti il sistema è impossibile.

Oppure, rifrasando, il sistema è impossibile se $a = -3 \pm \sqrt{13}$, altrimenti esiste un'unica soluzione.

Notiamo che

- è convenuto scegliere una strada che semplifichi i conti rispetto a partire senza pensare.
- La teoria che abbiamo sviluppato ci garantisce che le soluzioni siano le stesse, NON che il processo risolutivo sia lo stesso. Alcune scelte possono portare a calcoli più lunghi e a casi spuri, inutili, come i casi $0, \frac{1}{2}$ del primo metodo sopra..

□

Esercizio 6.8. [CCC38] **Non in classe** *Risolvere il sistema*

$$S : \begin{cases} 3xt + yt + \frac{t(t-5)}{2}z = \frac{t(2-t)}{2} \\ x + y + tz = 0 \\ x - y - z = t \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. (t è quindi parametro).

Dimostrazione. Soluzione Questo equivale a descrivere più in dettaglio l'insieme delle soluzioni

$$\text{Sol}(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 3xt + yt + 1/2zt^2 - 5/2zt = -1/2t^2 + t \\ x + y + tz = 0 \\ x - y - z = t \end{cases} \right\}$$

Scriviamo il sistema nella forma equivalente mediante la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 3t & t & 1/2t^2 - 5/2t & -1/2t^2 + t \\ 1 & 1 & & 0 \\ 1 & -1 & & t \end{pmatrix}$$

Per semplificare i calcoli, riordiniamo le righe in modo da non avere nella posizione a_{11} un'entrata dipendente da t , riconducendoci mediante scambio di righe al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & t & 0 \\ 1 & -1 & & -1 & t \\ 3t & t & 1/2t^2 - 5/2t & -1/2t^2 + t \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat[ [1, 1, t, 0],
          [1, -1, -1, t],
          [3t, t, 1/2t^2 - 5/2t, -1/2t^2 + t]];
```

```
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
```

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, 1, t, 0]
      2^a-1*1^a [0, -2, -t - 1, t]
      3^a-3t*1^a [0, -2t, -5/2t^2 - 5/2t, -1/2t^2 + t]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, 1, t, 0]
----- [0, -2, -t - 1, t]
      3^a-t*2^a [0, 0, -3/2t^2 - 3/2t, -3/2t^2 + t]
```

Moltiplichiamo la seconda riga per -1 e la terza riga per $-\frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 2 & t+1 & -t \\ 0 & 0 & t(t+1) & t(t-\frac{2}{3}) \end{pmatrix}$$

Rimettendo il sistema nella forma equazionale

$$\begin{cases} x + y + tz = 0 \\ 2y + (t+1)z = -t \\ t(t+1)z = t(t-\frac{2}{3}) \end{cases}$$

Notiamo che in ogni passo di Gauss il coefficiente della combinazione lineare relativo alla riga che stavamo manipolando è sempre stato sicuramente non nullo. Quindi non è mai stato necessario spezzare i casi.

L'ultima equazione

$$t(t+1)z = t \left(t - \frac{2}{3} \right)$$

ha soluzione unica se e solo se $t \neq 0, -1$; tratteremo a parte questi due casi. e questa soluzione è

$$z = \frac{3t-2}{3(t+1)}$$

Sostituendo la z nella seconda equazione otteniamo

$$2y + (t+1) \frac{3t-2}{3(1+t)} = t$$

da cui

$$y = \frac{1-3t}{3}$$

Sostituendo la z e la y nella prima equazione otteniamo

$$x + \frac{3t-1}{3} + t \frac{3t-2}{3(1+t)} = 0$$

da cui

$$x = \frac{1-4t}{3(t+1)}$$

e quindi le soluzioni sono

$$Sol(S) = \left\{ \left(\frac{1-4t}{3(t+1)}, \frac{1-3t}{3}, \frac{3t-2}{3(1+t)} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Trattiamo a parte i due casi $t = 0, -1$.

$t = 0$ Il sistema diviene, sostituendo $t = 0$ nella forma triangolare superiore,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

e quindi le soluzioni, per $t = 0$, sono

$$Sol(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \right\}$$

ovvero

$$Sol(S) = \{(-y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(-\lambda, \lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$t = -1$ In questo caso la terza equazione del sistema diviene

$$0 = \frac{-(2+3)}{2}$$

che è chiaramente impossibile, e quindi il sistema è impossibile.

Riassumendo, il sistema S

- per $t = -1$ è impossibile.
- Per $t = 0$ ha ∞ soluzioni

$$Sol(S) = \{(-\lambda, \lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(-1, 1, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{-\lambda(1, -1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Per $t \neq 0, -1$ ha un'unica soluzione (al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$)

$$Sol(S) = \left\{ \left(\frac{1-6t^2}{3t+3}, \frac{3t-1}{3}, \frac{3t-2}{3(1+t)} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

□

Esercizio 6.9. [EE7] Risolvere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Scegliamo di non fare scambi di righe.

Andiamo avanti con Gauss con la trasformazione $III^a \rightarrow III^a + \frac{2}{t} \cdot I^a$. Dato che stiamo dividendo per t , dobbiamo porre $t \neq 0$. risolveremo a parte più tardi il caso $t = 0$.

Dato che $t \neq 0$ possiamo operare con Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & \frac{2t-2}{t} & \frac{t+2}{t} & \frac{5t+2}{t} \end{array} \right) \quad III^a \rightarrow III^a + \frac{2}{t} \cdot I^a$$

N.B. Avremmo potuto anche operare sulla terza riga con la trasformazione $III^a \rightarrow t \cdot III^a + 2 \cdot I^a$. Avremmo dovuto considerare a parte il caso $t = 0$ perché avremmo avuto nullo il coefficiente riga che stiamo sostituendo

Possiamo moltiplicare per t la terza riga, dato che $t \neq 0$, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 2t-2 & t+2 & 5t+2 \end{array} \right) \quad III^a \rightarrow t \cdot III^a$$

Continuiamo con la seconda colonna

$$\left(\begin{array}{cccc} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t+2 & 5t \end{array} \right) \quad III^a \rightarrow III^a - 2 \cdot II^a$$

Ed abbiamo messo il sistema in forma triangolare superiore.

Abbiamo già la condizione $t \neq 0$, e quindi il primo pivot. Abbiamo il secondo pivot se $t \neq 1$, il terzo se $t \neq 2$. Se $t \notin \{0, 1, 2\}$ il sistema ha un'unica soluzione. Verificheremo a parte i tre casi particolari. Calcoliamo ora le soluzioni con la sostituzione all'indietro. La terza riga ci dice che

$$(1 - \frac{1}{2}t)z = \frac{5}{2}t \implies z = \frac{5t}{2-t}$$

Sostituendo nella seconda riga otteniamo

$$(t-1)y + t\frac{5t}{2-t} = 1 \implies y = \frac{5t^2 + t - 2}{t^2 - 3t + 2}$$

e sappiamo che $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) \neq 0$ per le condizioni poste. Sostituendo nella prima riga otteniamo

$$\begin{aligned} -tx + (t-1)\frac{5t^2 + t - 2}{t^2 - 3t + 2} + \frac{5t}{2-t} &= 1 \\ -tx + \frac{5t^2 + t - 2}{t-2} - \frac{5t}{t-2} - 1 &= 0 \\ \frac{-xt^2 + 2xt + 5t^2 - 5t}{(t-2)} &= 0 \\ -xt^2 + 2xt + 5t^2 - 5t &= 0 \\ x &= \frac{5t-5}{t-2} \end{aligned}$$

Quindi se $t \notin \{0, 1, 2\}$ ho la soluzione, unica al variare del parametro t (questo vuol dire che per ogni dato $t \in \mathbb{K}$ c'è una ed una sola soluzione)

$$\left(\frac{5t-5}{t-2}, \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}, \frac{5t}{2-t} \right) = \frac{1}{t-2} \left(5t-5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right)$$

notando che $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ e raccogliendo $\frac{1}{t-2}$

Analizziamo adesso i casi particolari.

$t = 1$ Sostituiamo $t = 1$ nella forma triangolare superiore

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t+2 & 5t \end{pmatrix}$$

(possiamo farlo perché siamo arrivati a calcolare la forma triangolare superiore senza supporre che $t \neq 1$)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dalla seconda riga otteniamo l'equazione $z = 1$ e dalla terza l'equazione $z = 5$. Il sistema è pertanto impossibile.

$t = 2$ Sostituiamo $t = 2$ nella forma triangolare superiore (possiamo farlo perché siamo arrivati a calcolare la forma triangolare superiore senza supporre che $t \neq 2$) ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga otteniamo l'equazione $0 \cdot z = 10$ che non ha soluzione. Quindi il sistema è impossibile.

$t = 0$ Il sistema, sostituendo $t = 0$ nella forma iniziale

$$\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

diviene

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ -y = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

che ha immediatamente soluzione unica $x = \frac{5}{2}, y = -1, z = 0$. Abbiamo dovuto sostituire nella forma iniziale del sistema *e non nella forma triangolare superiore* perché quest'ultima è stata calcolata supponendo $t \neq 0$.

Ricapitolando, il sistema

- Per $t = 1, 2$ è impossibile.
- Per $t = 0$ ha soluzione unica $(\frac{5}{2}, -1, 0)$
- Per $t \notin \{0, 1, 2\}$ (caso generico) ha soluzione unica $\frac{1}{t-2} \left(5t - 5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right)$.

Notiamo che sostituendo $t = 0$ nella formula della soluzione del caso generico otteniamo

$$\frac{1}{t-2} \left(5t - 5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{5}{2}, -1, 0 \right)$$

Quindi potremmo compattare la descrizione:

- Per $t = 1, 2$ è impossibile.
- Per $t \notin \{1, 2\}$ (caso generico) ha soluzione unica $\frac{1}{t-2} \left(5t - 5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right)$

Questo accade perché abbiamo trattato a parte il caso $t = 0$ soltanto perché abbiamo scelto un particolare elemento come primo pivot. Altre scelte avrebbero potuto portare ad altri casi particolari, che ugualmente sarebbero confluiti nel caso generale. $\square$

Provate a rifare l'esercizio scambiando la prima e terza riga della matrice iniziale.

Esercizio 6.10. [MM77] Determinare le soluzioni in $\mathbb{R}$ del sistema

$$\begin{cases} 3x + y + z + 3t = 1 \\ x + 4y + t = 1 \\ 5x + 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa $[A|b]$ associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Notiamo che se mettessimo come prime colonne la terza e la quarta, la riduzione Gaussiana sarebbe molto più semplice. Possiamo farlo, tenendo presente che questo equivale a introdurre nuove variabili $x' = z$, $y' = t$, $z' = x$, $t' = y$ e a risolvere il sistema nelle nuove variabili associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Svolgiamo i passi di riduzione di Gauss necessari a mettere il sistema in forma triangolare superiore, basta sostituire la quarta riga con la quarta riga meno $2/5$ le terza, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

Risolviamo con la sostituzione all'indietro *nelle variabili* x', y', z', t' ed otteniamo facilmente

$$t' = 3, \quad z' = -1, \quad y' = -10, \quad x' = 31,$$

da cui

$$t = y' = -10, \quad z = x' = 31, \quad y = t' = 3, \quad x = z' = -1,$$

□

N.B. Avremmo potuto risolvere la terza e quarta equazione ricavando la soluzione unica in $x = x_0$, $y = y_0$, e sostituire poi $x = x_0$, $y = y_0$ nella prima e seconda riga, ottenendo un sistema di due equazioni nelle due variabili y, t facilmente risolubile.

Esercizio 6.11. [MM16] **Non in classe** Risolvere in $\mathbb{K}$ il sistema lineare associato alla matrice completa

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Soluzione. Mettiamo la matrice incompleta in forma il più possibile vicino alla diagonale mediante operazioni di Gauss:

```
Ab:=Mat[[ 2,  3,  1, -1, 2, 1, 1],
         [ 2,  3,  1,  0, 0, 1, 0],
         [ 0,  0,  2,  1, 2, 2, 2],
         [-2, -3,  0, -1, 6, 0, 4],
         [ 2,  3, -1, -2, 4, 0, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
      4^a+1*1^a [0, 0, 1, -2, 8, 1, 5]
```

```

5^a-1*1^a [0, 0, -2, -1, 2, -1, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[2, 3, 1, -1, 2, 1, 1],
     [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2],
     [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1],
     [0, 0, 1, -2, 8, 1, 5],
     [0, 0, -2, -1, 2, -1, -1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
----- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
4^a-1/2*2^a [0, 0, 0, -5/2, 7, 0, 4]
5^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 4, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
----- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
4^a+5/2*3^a [0, 0, 0, 0, 2, 0, 3/2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 4, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 5]=2
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
----- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 0, 2, 0, 3/2]
5^a-2*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]

```

Abbiamo ridotto la matrice $[A|b]$ in forma a scala. Vediamo ora di fare la sostituzione all'indietro mediante operazioni di Gauss

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a**1/2 [1, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 1/2, 1/2]
2^a**1/2 [0, 0, 1, 1/2, 1, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
4^a**1/2 [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 6 pivot
1^a-1/2*5^a [1, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 0, 3/2]
2^a-1*5^a [0, 0, 1, 1/2, 1, 0, 3]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 5 pivot
1^a-1*4^a [1, 3/2, 1/2, -1/2, 0, 0, 3/4]
2^a-1*4^a [0, 0, 1, 1/2, 0, 0, 9/4]
3^a+2*4^a [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]

```

```

----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
1^a+1/2*3^a [1, 3/2, 1/2, 0, 0, 0, 1]
2^a-1/2*3^a [0, 0, 1, 0, 0, 0, 2]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
1^a-1/2*2^a [1, 3/2, 0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 2]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]

```

Da cui otteniamo le equazioni:

$$x + \frac{3}{2}y = 0, \quad z = 2, \quad t = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{3}{4}, \quad v = -2$$

Le soluzioni sono

$$\left\{ \left(-\frac{3}{2}\lambda, \lambda, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -2 \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

□

Esercizio 6.12. [KK06] **Non in classe** Risolvere su $\mathbb{Q}$ il sistema di 4 equazioni in 4 incognite con matrice completa

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -7 & 2 \end{array} \right)$$

Soluzione. Riduciamo la matrice $[A|b]$ con Gauss

```

Ab:=Mat[[5, 2, 1, -1, 0],
        [7, 1, 3, 2, -1],
        [3, 3, -1, -4, 1],
        [1, 4, -3, -7, 2]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=5
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [5, 2, 1, -1, 0]
2^a-7/5*1^a [0, -9/5, 8/5, 17/5, -1]
3^a-3/5*1^a [0, 9/5, -8/5, -17/5, 1]
4^a-1/5*1^a [0, 18/5, -16/5, -34/5, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-9/5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [5, 2, 1, -1, 0]
----- [0, -9/5, 8/5, 17/5, -1]
3^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
4^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, 0]

```

Ci sono elementi nulli sulla diagonale dell'incompleta. Abbiamo quindi infinite o nessuna soluzione.

Il sistema dato è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y + z - t &= 0 \\ -\frac{9}{5}y + \frac{8}{5}z + \frac{17}{5}t &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 2y + z - t &= 0 \\ -9y + 8z + 17t &= -5 \end{cases}$$

Dato che ogni riga nulla della matrice incompleta corrisponde ad un termine noto nullo (le righe sono nulle anche nella matrice completa), ci sono infinite soluzioni che possiamo riscrivere, esplicitando x, y , come

$$\begin{cases} x &= -\frac{5}{9}z - \frac{5}{9}t - \frac{2}{9} \\ y &= \frac{8}{9}z + \frac{17}{9}t + \frac{5}{9} \end{cases}$$

La procedura standard è di esplicitare le variabili associate ai pivot non nulli e di trattare le altre variabili come parametri. Pertanto chiamiamo $t = \alpha$ e $z = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

$$\text{Sol}(\underline{Ax} = \underline{b}) = \left\{ \left(-\frac{5}{9}\beta - \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\beta + \frac{17}{9}\alpha + \frac{5}{9}, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

□

Esercizio 6.13. [LL81] *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ risolvere il sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k^2 + 3k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$[A \mid \underline{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k^2 + 3k \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Scambiamo la seconda e quarta riga, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k^2 + 3k \end{array} \right)$$

Riduciamo con Gauss

```
Use R:=Q[x,y,z,t,k];
M:=Mat([[1, 2,0, 1, 0],
        [2, 3,1, 2, 0],
        [0, 0,6,k+5, 0],
        [0,k-1,1, -1,k^2+3k]]);
```

```

-----
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0]
      2^a-2*1^a [0, -1, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 6, k + 5, 0]
      0 sotto pivot[0, k - 1, 1, -1, k^2 + 3k]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0]
----- [0, -1, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 6, k + 5, 0]
      4^a+k - 1*2^a [0, 0, k, -1, k^2 + 3k]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=6
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0]
----- [0, -1, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 6, k + 5, 0]
      4^a-1/6k*3^a [0, 0, 0, -1/6k^2 - 5/6k - 1, k^2 + 3k]

```

Esaminiamo l'ultima riga: osserviamo che $k^2 + 5k + 6 = (k + 2)(k + 3)$, moltiplichiamo per -6 e l'ultima riga della matrice si riduce alla seguente:

$$(0, 0, 0, (k + 2)(k + 3), -6k(k + 3))$$

1. Se $k = -2$ l'ultima riga ci dice che il sistema è impossibile, dato che l'equazione corrispondente è

$$0 \cdot t = -6(-2)(1) \Rightarrow 0 = 12$$

2. Se $k = -3$ la matrice diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ed il sistema associato è

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ -y + z = 0 \\ 3z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ t = -3z \end{cases}$$

Abbiamo scelto arbitrariamente di esplicitare x, y, t in funzione di z per semplicità. Pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni ed esse sono

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{(\lambda, \lambda, -3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. Se $k \neq -2, -3$ il sistema ha quattro pivot, quindi un'unica soluzione, che troviamo facendo i conti, per esempio mettendo la matrice in forma normale,

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-----
          2^a*-1      [1, 2, 0, 1, 0]
          3^a*+1/6     [0, 1, -1, 0, 0]
          4^a*-6/(k^2 + 5k + 6) [0, 0, 1, 1/6k + 5/6, 0]
          [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

Cancello la colonna sopra il 4 pivot

          1^a-1*4^a      [1, 2, 0, 0, 6k/(k + 2)]
          [0, 1, -1, 0, 0]
          3^a-1/6k + 5/6*4^a [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
          [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

Cancello la colonna sopra il 3 pivot

----- [1, 2, 0, 0, 6k/(k + 2)]
          2^a+1*3^a      [0, 1, 0, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
----- [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
          [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

          1^a-2*2^a      [1, 0, 0, 0, -2k]
          [0, 1, 0, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
          [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
          [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]

```

La soluzione è unica al variare di $k \in \mathbb{R}$ e

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-2k, \frac{k^2 + 5k}{k + 2}, \frac{k^2 + 5k}{k + 2}, \frac{-6k}{k + 2} \right) \right\}$$

□

Esempio 6.14. [DDW00] *Risolvi il sistema*

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ovvero descriviamo in forma semplice l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

Costruiamo la matrice completa del sistema e riduciamo con Gauss

```

A:=Mat([[1, -1,-1,2],
        [3, -2, 3,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);

```

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, -1, -1, 2]
      2^a-3*1^a [0, 1, 6, -6]
```

Scala2DiagonaleVerbose(L);

;

Metto tutti i pivots a 1

```
----- [1, -1, -1, 2]
----- [0, 1, 6, -6]
```

Cancello la colonna sopra il 2^o pivot

```
1^a*-1*2^a [1, 0, 5, -4]
----- [0, 1, 6, -6]
```

Quindi

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{cases} x + 5z = -4 \\ y + 6z = -6 \end{cases} \right\}$$

Quindi se applichiamo le due condizioni $x = -5z - 4$ $y = -6z - 6$ al vettore generico di

$$\mathbb{K}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{K}\}$$

per ottenere il vettore generico di $\mathcal{A}$ otteniamo $(-5z - 4, -6z - 6, z)$ senza nessuna ulteriore condizione su z .

Quindi

$$\mathcal{A} = \{(-5z - 4, -6z - 6, z) \in \mathbb{K}^3 \mid z \in \mathbb{K}\}$$

6.2 Esercizi proposti

Osservazione 6.15. [GGD01] Quando diciamo che un sistema ha ∞^s soluzioni, intendiamo che l'insieme delle soluzioni ha bisogno di almeno s parametri per essere descritto. Questa nozione sarà dettagliata in seguito.

Esercizio 6.16. [GG01] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un' unica soluzione: $(x, y, z, t) = (0, 2, -1, 1)$. □

Esercizio 6.17. [GG02] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ 3x + y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + 2z + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = \left(\frac{4}{11}, 0, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$. □

Esercizio 6.18. [GG03] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni $(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}, y, z, -\frac{1}{4}\right)$. □

Esercizio 6.19. [GG04] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Il sistema è impossibile. □

Esercizio 6.20. [GG05] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ x + y + z + t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione $(x, y, z, t) = \left(2, \frac{3}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{1}{4}\right)$. □

Esercizio 6.21. [CCA15] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice, conservando le soluzioni nei primi due casi, conservando le soluzioni, se necessario, solo a meno di un riordino delle variabili per la normalizzazione.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.22. [CCA14] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.23. [CCA13] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.24. [CCA12] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & -6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.25. [CCC08] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y = 0\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy = 0\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 6.26. [CCC07] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1+t, 1-t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ A_2 &= \{(1+t^2, 1-t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ A_3 &= \{(1+t^3, 1-t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Capitolo 7

Settima Lezione - Matrici

7.1 Indipendenza lineare

Uno dei concetti basilari dell'Algebra Lineare: nel contesto dei sistemi di equazioni si può esprimere così : quali equazioni sono utili e quali inutili in un sistema di equazioni? Ovvero, quali si possono ricavare dalle altre? Queste equazioni "inutili" si definiranno linearmente dipendenti, quelle "utili", linearmente indipendenti.

Esempio 7.1. [CCC64] *RisolviAMO in $\mathbb{K}$ il sistema*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Vediamo facilmente che nessuna delle due equazioni è superflua.

Esempio 7.2. [CCC60] *RisolviAMO in $\mathbb{K}$ il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Vediamo facilmente che la terza equazione è la somma delle altre due, ed è quindi superflua.

Esempio 7.3. [CCC53] *RisolviAMO in $\mathbb{K}$ il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ -x - 7y + 5z = -1 \end{cases}$$

Riduciamo con Gauss la matrice completa associata al sistema

```
A:=Mat([ [1,1,1,1],
          [2,5,-1,2],
          [-1,-7,5,-1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
```

$$\begin{array}{l} 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \quad [0, 3, -3, 0] \\ 3^{\text{a}} + 1 \cdot 1^{\text{a}} \quad [0, -6, 6, 0] \end{array}$$

Ho trovato il pivot in posizione $A[2, 2]=3$

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

$$\begin{array}{l} \text{-----} \quad [1, 1, 1, 1] \\ \text{-----} \quad [0, 3, -3, 0] \\ 3^{\text{a}} + 2 \cdot 2^{\text{a}} \quad [0, 0, 0, 0] \end{array}$$

Notiamo che la terza riga è stata ridotta a zero, e quindi un sistema equivalente al dato è

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Facendo l'operazione (di Gauss) sulla seconda riga al contrario $2^{\text{a}} \rightarrow 2^{\text{a}} + 2 \cdot 1^{\text{a}}$ otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \end{cases}$$

Abbiamo scoperto che la terza equazione è combinazione lineare delle prime due e quindi inutile.

Problema 7.4. [CCC54] Dato un sistema di equazioni, come faccio a riconoscere le equazioni superflue?

Notazione 7.5. [CCC43] Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$. Indichiamo il vettore $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \in \mathbb{K}^{ns}$ come $\underline{v}$.

Definizione 7.6. [CCC41] Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$. Diciamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare nulla ha forzatamente tutti i coefficienti nulli. Più formalmente, se

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Scritto in forma più compatta

$$\forall \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n, \quad \underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\lambda} = 0(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Vettori che non siano linearmente indipendenti si dicono *linearmente dipendenti*. Volendo, la definizione che non si riferisce esplicitamente all'indipendenza è la seguente:

Definizione 7.7. [CCC44] I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ sono linearmente dipendenti se e solo se

$$\exists \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n, \quad \underline{\lambda} \neq \underline{0} \text{ tale che } \underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

o, scritto in modo meno compatto, se e solo se

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq \underline{0}, \text{ tali che } \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

Esempio 7.8. [CCC91] È facile vedere che i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ non sono linearmente dipendenti (sono quindi linearmente indipendenti) applicando la definizione: sto cercando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non tutti nulli tali che

$$\begin{aligned} \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema lineare è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, quindi non esiste una soluzione non nulla e quindi i tre vettori non sono linearmente dipendenti. Sono quindi linearmente indipendenti.

Definizione 7.9. [CCC68] Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ si dice omogeneo. Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$.

Osservazione 7.10. [CCC92] Per verificare che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ siano linearmente indipendenti o meno, basta verificare che il sistema lineare $\underline{v} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ abbia una unica soluzione (quella nulla è sempre presente, il sistema è omogeneo).

Osservazione 7.11. [CCC75] Posso copiare le definizioni che ho dato per i vettori per polinomi univariati e multivariati, equazioni, funzioni, matrici etc. etc..... Tutto quello che mi serve è la somma, la moltiplicazione per uno scalare e la definizione precisa di uguaglianza.

Definizione 7.12. [CCC50] Siano $f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. Diciamo che $f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})$ sono linearmente indipendenti se

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 f_1(\underline{x}) + \dots + \lambda_n f_n(\underline{x}) \stackrel{\mathbb{K}[\underline{x}]}{=} 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Analogamente, per le funzioni

Definizione 7.13. [CCA51] Siano $f_1, \dots, f_n$ funzioni $: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Diciamo che $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti se

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \equiv 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$$

Richiamo 7.14. [CCC51] Ricordiamo che due funzioni

$$\begin{array}{ccc} f: & A & \rightarrow B \\ & a & \mapsto f(a) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: & A & \rightarrow B \\ & a & \mapsto g(a) \end{array}$$

sono uguali come funzioni ($f \equiv g$) se e solo se

$$\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$$

Se un insieme di vettori è linearmente dipendente, ne posso esprimere uno mediante una combinazione lineare degli altri.

Proposizione 7.15. [CCC45] Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $1 \leq j \leq n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$ tale che

$$\underline{v}_j = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_{j-1} \underline{v}_{j-1} + \lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1} + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

o, scritto in modo più compatto,

$$\underline{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \underline{v}_i$$

Dimostrazione. Dato che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti allora esiste $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

Per ipotesi esiste un $\alpha_j \neq 0$. Possiamo allora scrivere

$$\alpha_j \underline{v}_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i \underline{v}_i \Rightarrow \underline{v}_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \underline{v}_i$$

e la tesi è dimostrata prendendo $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ per $i : 1, \dots, n, i \neq j$. □

Osservazione 7.16. [CCP45] È immediato dalla proposizione precedente che posso esprimere mediante una combinazione lineare degli altri vettori tutti e soli i vettori il cui coefficiente nella combinazione lineare è non nullo.

Esempio 7.17. [CCF11] I vettori $\underline{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (2, 1, 1)$, $\underline{v}_3 = (3, 2, 2)$, $\underline{v}_4 = (0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti?

Soluzione. I quattro vettori sono linearmente dipendenti, dato che la quadrupla $(1, 1, -1, 0)$ di coefficienti, non tutti nulli, mi dà la combinazione lineare nulla

$$(1)(1, 1, 1) + (1)(2, 1, 1) + (-1)(3, 2, 2) + (0)(0, 0, 1) = \underline{0}$$

ovvero $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}$.

Notiamo che da questa relazione possiamo esplicitare $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ o $\underline{v}_3$

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_2 \text{ o } \underline{v}_2 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 \text{ oppure } \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

ma non $\underline{v}_4$, perché il suo coefficiente nella combinazione lineare è 0. □

Il campo da cui posso scegliere gli scalari (i coefficienti della combinazione lineare) può essere importante

7.2 Prodotto di matrici

Una motivazione

Notazione 7.18. [DDD00] Spesso faremo riferimento alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

come $(a_{ij})_{ij}$ o (a_{ij}) con $i : 1 \dots m$, $j : 1 \dots n$.

Ricordiamo che

Osservazione 7.19. [DDD10] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ed il vettore } \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere il sistema di equazioni lineare $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \text{ come } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Che, usando il prodotto scalare, possiamo scrivere come

$$\begin{cases} A_1 \cdot \underline{x} = b_1 \\ \vdots \\ A_i \cdot \underline{x} = b_i \\ \vdots \\ A_m \cdot \underline{x} = b_m \end{cases}$$

in breve,

$$(A^1, \dots, A^n) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

o

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Esempio 7.20. [DDC10] Risolvere i tre sistemi

$$S_1 : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x' + y' - z' = 1 \\ x' - y' - z' = 1 \\ 2x' + 2y' + 3z' = 1 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x'' + y'' - z'' = 0 \\ x'' - y'' - z'' = 1 \\ 2x'' + 2y'' + 3z'' = 2 \end{cases}$$

Indichiamo le tre colonne dei termini noti come

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il primo sistema mediante una riduzione di Gauss a triangolare superiore

```
Ab:=Mat([[1, 1,-1,3],
         [1,-1,-1,0],
         [2, 2, 3,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -1, 3]
      2^a-1*1^a [0, -2, 0, -3]
      3^a-2*1^a [0, 0, 5, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -1, 3]
----- [0, -2, 0, -3]
      0 sotto pivot[0, 0, 5, -5]
```

Notiamo che i tre pivot sono tutti nelle prime tre colonne. Portiamo la matrice incompleta in forma diagonale

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=5
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits
-----
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, -1, 3]
```

```

      2^a*-1/2  [0, 1, 0, 3/2]
      3^a*+1/5  [0, 0, 1, -1]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a*-1*3^a  [1, 1, 0, 2]
-----
      [0, 1, 0, 3/2]
-----
      [0, 0, 1, -1]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a*+1*2^a  [1, 0, 0, 1/2]
-----
      [0, 1, 0, 3/2]
-----
      [0, 0, 1, -1]

```

Quindi

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right) \right\} \text{ ovvero } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che, come affermato nella Proposizione 5.35, anche nel procedimento di sostituzione all'indietro, nessuna operazione è dipesa da particolari valori nella colonna dei termini noti.

Potremmo risolvere gli altri due sistemi

$$A\underline{x}' = \underline{b}' \quad A\underline{x}'' = \underline{b}''$$

nello stesso modo usando Gauss, ma dato che la matrice incompleta dei tre sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è uguale, e basandoci sulle osservazioni precedenti, invece di mettere in forma a scala le altre due matrici $(A \mid b_2), (A \mid b_3)$ possiamo mettere a scala la matrice

$$(A \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3)$$

dato che durante il procedimento di risoluzione i pivot, come già notato, possono essere sempre comunque limitati alla matrice incompleta, e quindi le colonne dei termini noti non influiscono sulle operazioni di Gauss che vengono effettuate. Avremo in un colpo solo le risoluzioni dei tre sistemi facendo le stesse operazioni di prima sulla matrice incompleta e replicando le operazioni di prima sulle altre colonne dei termini noti, $\underline{b}', \underline{b}''$.

```

Abbb:=Mat([[1, 1,-1,3,1,0],
           [1,-1,-1,0,1,1],
           [2, 2, 3,1,1,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Abbb);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-----
      [1, 1, -1, 3, 1, 0]
      2^a-1*1^a  [0, -2, 0, -3, 0, 1]
      3^a-2*1^a  [0, 0, 5, -5, -1, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-----
      [1, 1, -1, 3, 1, 0]
-----
      [0, -2, 0, -3, 0, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, 5, -5, -1, 2]

```



```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
      2^a*-1/2 [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
      3^a*+1/5 [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a*-1*3^a [1, 1, 0, 2, 4/5, 2/5]
----- [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
----- [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot

      1^a*+1*2^a [1, 0, 0, 1/2, 4/5, 9/10]
----- [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
----- [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]

```

Abbiamo ritrovato la soluzione del primo sistema e abbiamo trovato le soluzioni del secondo e terzo sistema

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{x}'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ -1/2 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere il sistema come

$$A(\underline{x} \mid \underline{x}' \mid \underline{x}'') = (\underline{b} \mid \underline{b}' \mid \underline{b}'')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x'_1 & x''_1 \\ x_2 & x'_2 & x''_2 \\ x_3 & x'_3 & x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x'_1 + x'_2 - x'_3 & x''_1 + x''_2 - x''_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 & x'_1 - x'_2 - x'_3 & x''_1 - x''_2 - x''_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x'_1 + 2x'_2 + 3x'_3 & 2x''_1 + 2x''_2 + 3x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.3 Prodotto di matrici - definizione formale

Definizione 7.21 (Prodotto di matrici). [DDD02] Siano $A, B \in \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{K}$ Definiamo il prodotto $\odot$ delle matrici A, B come

$$A \odot B \text{ con } (A \odot B)_{i,j} = (A_i \cdot B^j) \quad i, j : 1 \dots n$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & \dots & A_1 \cdot B^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n \cdot B^1 & \dots & A_n \cdot B^n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

Più formalmente

$$\begin{aligned} \odot : \quad \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{K} \times \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{K} &\rightarrow \text{Mat}_{n \times n} \mathbb{K} \\ (A, B) &\mapsto (A_i \cdot B^j)_{i,j} \end{aligned}$$

Esempio 7.22. [DDD60]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 & x'_1 & x''_1 \\ x_2 & x'_2 & x''_2 \\ x_3 & x'_3 & x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x'_1 + x'_2 - x'_3 & x''_1 + x''_2 - x''_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 & x'_1 - x'_2 - x'_3 & x''_1 - x''_2 - x''_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x'_1 + 2x'_2 + 3x'_3 & 2x''_1 + 2x''_2 + 3x''_3 \end{pmatrix}$$

Osservazione 7.23. [DDC60] *In genere indicheremo il prodotto di matrici $A \odot B$ come $A \cdot B$ o anche AB*

Esempio 7.24. [DDD13]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.25. [DDD11]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} & (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} & (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} & (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{oppure} = \begin{pmatrix} 1(1,4,7) + 0(2,5,8) + 0(3,6,9) \\ 0(1,4,7) + 0(2,5,8) + 1(3,6,9) \\ 1(1,4,7) + 1(2,5,8) + 1(3,6,9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

Molto utili per il calcolo pratico del prodotto matriciale in molti casi sono le due osservazioni seguenti:

Corollario 7.26. [DDD81] *Il risultato della moltiplicazione di una matrice A a sinistra per una matrice M è una matrice la cui riga i -esima è la combinazione lineare delle righe di A a coefficienti le componenti della riga i -esima di M .*

Ed analogamente

Osservazione 7.27. [DDD82] *Il risultato della moltiplicazione di una matrice A a destra per una matrice M è una matrice la cui colonna j -esima è la combinazione lineare delle colonne di A a coefficienti le componenti della colonna j -esima di M .*

Esempio 7.28. [DDD83] *Riprendendo l'esercizio 7.24, vediamo che seguendo l'osservazione 7.27 sopra,*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.4 Anello delle matrici

Studiamo le proprietà di alcune operazioni sulle matrici: somma, prodotto esterno, prodotto interno

Osservazione 7.29. [DDD05] *Ricordiamo che due matrici $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ appartenenti a $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ sono uguali se e solo se*

$$\forall i, j : 1 \dots n, \quad a_{ij} = b_{ij}$$

Osservazione 7.30. [DDD06] *Ricordiamo che l'operazione*

$$\begin{aligned} + : \quad \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \times \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \\ (a_{ij}, b_{ij}) &\mapsto (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

si dice somma di matrici.

Osservazione-Definizione 7.31. [DDD77] *Ricordiamo che l'insieme $(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo commutativo con neutro 0_n , la matrice $n \times n$ con entrate tutte nulle.*

Definizione-Proposizione 7.32. [DDD08] *L'operazione*

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{K} \times \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{Mat}_{n \times n} \\ (\lambda, a_{ij}) &\mapsto (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$

si dice prodotto esterno o prodotto per uno scalare *ed ha tutte le solite proprietà del prodotto esterno.*

Esempio 7.33. [DDS08] *Le matrici in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$?

Soluzione. Dato che abbiamo la somma ed il prodotto esterno, possiamo usare l'usuale definizione di indipendenza lineare. La domanda si traduce nella domanda: l'equazione matriciale nelle variabili x, y, z

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

ha solo la soluzione nulla $0_{2 \times 2}$?

$$\begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} x & 2x+y+z \\ 3x+y & 4x+z \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

E le tre matrici sono quindi linearmente indipendenti □

N.B. Quando questo non crei confusione, le matrici nulle $0_{m \times n}$ saranno indicate, per semplicità, come 0.

Proposizione 7.34. [DDD07] *L'insieme $(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ è un anello non commutativo con neutro additivo 0 e neutro moltiplicativo I_n , la matrice quadrata diagonale di ordine n con 1 sulla diagonale.*

Dimostrazione. È facile verificare tutte le proprietà. In particolare, date $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}$

- $I_n \cdot A = A \cdot I_n$ per ogni $A \in \text{Mat}_{n \times n}$. Segue immediatamente dalla definizione.
- Per vedere che il prodotto di matrici è in genere non commutativo, basta vedere che esistono $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}$ tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Abbiamo già visto che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

□

Notiamo che, essendo l'anello non commutativo, valgono tutte e due le proprietà distributive, destra e sinistra.

$$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \quad \begin{aligned} (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ C \cdot (A + B) &= C \cdot A + C \cdot B \end{aligned}$$

Vale anche le proprietà di omogeneità

$$\forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$$

Spesso indicheremo le matrici I_n come I .

Richiamo 7.35. [DDD99] *Una matrice non nulla $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è detta zero-divisore se esiste una matrice non nulla $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che*

$$A \cdot B = 0$$

Esempio 7.36. [DDD78]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Queste matrici sono zero divisori.

Osservazione 7.37. [DDD79] *Segue immediatamente dalla definizione di prodotto di matrici che per $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \text{Mat}_{n \times s}(\mathbb{K})$ si ha*

$$(A \cdot B)_{ij} = (A_i \cdot B^j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

con $i : 1 \dots m$, $j : 1 \dots s$.

7.5 Matrici invertibili

Ricordiamo che il prodotto di matrici non è commutativo. Una matrice può avere inverso rispetto all'operazione di prodotto tra matrici, naturalmente.

Definizione 7.38. [EEE00] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Una matrice $X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ si dice inversa moltiplicativa destra di A , o semplicemente inversa destra, se $A \cdot X = I_n$. Si dice inversa moltiplicativa sinistra di A , o semplicemente inversa sinistra, se $X \cdot A = I_n$. Una matrice che sia sia inversa destra che sinistra di A si dice inversa di A e si scrive come A^{-1} . Ricordare: mai come $\frac{1}{A}$.*

Esempio 7.39. [EEE01] *Troviamo l'inversa destra della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$$

Soluzione. Introduciamo la matrice di incognite

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$$

e risolviamo il sistema

$$A \cdot X = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

col metodo che abbiamo visto precedentemente, ovvero riducendo con Gauss la matrice

```
M:=Mat([[1,3,1,0],
        [2,2,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 1, 0]
        2^a-2*1^a [0, -4, -2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-4
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 3, 1, 0]
        2^a*-1/4 [0, 1, 1/2, -1/4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot

        1^a*-3*2^a [1, 0, -1/2, 3/4]
----- [0, 1, 1/2, -1/4]
```

La soluzione, e quindi l'inversa destra di A , è quindi

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dato che la soluzione del sistema è unica, l'inversa destra

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

è unica. □

Osservazione 7.40. [EEE02] *Dato che abbiamo fatto solo operazioni di Gauss, questo calcolo è indipendente dal campo, sarebbe stato lo stesso calcolo su $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,*

Esempio 7.41. [EEE03] *Troviamo l'inversa sinistra della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$$

dell'esempio 7.39.

Soluzione. Proviamo a vedere se l'inversa destra è anche inversa sinistra, ed effettivamente

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lasciamo per esercizio il verificare che questa inversa sinistra è unica, ovvero che

$$X \cdot A = I_2 \Rightarrow X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo si può fare risolvendolo esplicitamente il sistema $X \cdot A = I_2$ e vedendo che l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, oppure, più rapidamente, che il sistema $X \cdot A = I_2$ ha un'unica soluzione e quindi ha come unica soluzione $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. □

Problema 7.42. [EE04]

1. *L'inversa destra è sempre uguale all'inversa sinistra?*
2. *L'inversa è sempre unica?*
3. *Trovare un metodo efficiente per calcolare l'inversa.*
4. *Determinare se una matrice è invertibile senza calcolare esplicitamente l'inversa.*

Per i primi tre problemi, possiamo dare una risposta immediata:

Proposizione 7.43. [EE04] *Se esistono inverse destra e sinistra di una matrice quadrata, sono uguali.*

Dimostrazione. Data $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, siano $X, Y \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ le sue inverse destre e sinistre rispettivamente. Dobbiamo dimostrare che $X = Y$.

Per ipotesi abbiamo

$$AX = I_n \quad YA = I_n$$

Allora

$$Y \cdot A = I_n \Rightarrow (Y \cdot A) \cdot X = I_n \cdot X \Leftrightarrow Y \cdot (A \cdot X) = X \Leftrightarrow Y \cdot I_n = X \Leftrightarrow Y = X$$

□

Proposizione 7.44. [EEY04] *L'inversa se esiste è unica*

Dimostrazione. Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, siano $X, Y \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ sue inverse. Dobbiamo dimostrare che $X = Y$.

Per ipotesi abbiamo

$$AX = I_n \quad AY = I_n$$

Allora

$$\begin{aligned} AX = AY &\Leftrightarrow AX - AY = 0_n \\ &\Leftrightarrow A(X - Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow XA(X - Y) = X0_n \\ &\Leftrightarrow I_n(X - Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow (X - Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow X = Y \end{aligned}$$

□

Definizione 7.45. [FFF24] *Il vettore di $\mathbb{K}^n$ che ha tutte le componenti nulle tranne la i -esima si indica come e_i o vettore canonico i -esimo.*

$$\begin{aligned} (0, 0, 1, 0, 0) &= e_3 \in \mathbb{K}^5 \\ (1, 0, 0, 0) &= e_1 \in \mathbb{K}^4 \end{aligned}$$

Con abuso di notazione, ometteremo quando non necessario l'indicazione precisa della dimensione dello spazio di riferimento, per evitare notazioni tipo e_3^4 per indicare $(0, 0, 1, 0)$.

Osservazione 7.46. [EEQ05] *Possiamo scrivere la matrice I_n come $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, intendendo sia le righe che le colonne. Più formalmente*

$$(I_n)_i = e_i \quad (I_n)^i = e_i$$

Osservazione 7.47. [EEZ04] *Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, posso calcolare l'inversa destra risolvendo il sistema matriciale*

$$AX = I_n$$

ovvero gli n sistemi lineari

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = e_1, \dots, A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = e_n$$

Notiamo che questo è equivalente a mettere la matrice A in forma normale.

- Se ci sono righe nulle, il sistema non ha un'unica soluzione per la Proposizione 5.35, e la matrice A non ha inversa destra e quindi non è invertibile.
- Se non ci sono righe nulle, la forma normale è

$$[I_n \mid X]$$

e leggo l'inversa destra direttamente dalla matrice, $A^{-1} = X$

Esempio 7.48. [EEE47] *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat([[1,2,3,1,0,0],
        [4,5,6,0,1,0],
        [7,8,9,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
      2^a-4*1^a [0, -3, -6, -4, 1, 0]
      3^a-7*1^a [0, -6, -12, -7, 0, 1]
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
----- [0, -3, -6, -4, 1, 0]
      3^a-2*2^a [0, 0, 0, 1, -2, 1]
```

SISTEMA IMPOSSIBILE MATRICE NON INVERTIBILE

Esempio 7.49. [EEE40] *calcolare se possibile l'inversa destra della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat([[1,2,3,1,0,0],
        [4,5,6,0,1,0],
        [7,8,8,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
      2^a-4*1^a [0, -3, -6, -4, 1, 0]
      3^a-7*1^a [0, -6, -13, -7, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
----- [0, -3, -6, -4, 1, 0]
      3^a-2*2^a [0, 0, -1, 1, -2, 1]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
      2^a*-1/3 [0, 1, 2, 4/3, -1/3, 0]
      3^a*-1 [0, 0, 1, -1, 2, -1]

Cancello la colonna sopra il 3 pivot
```


$$\begin{array}{rcl}
1^{\wedge}a-3*3^{\wedge}a & [1, 2, 0, 4, -6, 3] \\
2^{\wedge}a-2*3^{\wedge}a & [0, 1, 0, 10/3, -13/3, 2] \\
\hline
& [0, 0, 1, -1, 2, -1]
\end{array}$$

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

$$\begin{array}{rcl}
1^{\wedge}a-2*2^{\wedge}a & [1, 0, 0, -8/3, 8/3, -1] \\
\hline
& [0, 1, 0, 10/3, -13/3, 2] \\
\hline
& [0, 0, 1, -1, 2, -1]
\end{array}$$

L'inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} -8/3 & 8/3 & -1 \\ 10/3 & -13/3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 7.50. [EEE08] Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti

1. A ha inversa destra.
2. A ha inversa sinistra.
3. A è invertibile.
4. Il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha unica soluzione $\underline{x} = \underline{0}$.
5. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha unica soluzione.

Dimostrazione.

- Dimosteremo in seguito, usando il determinante, che le prime due condizioni sono equivalenti. Per la Proposizione 7.43, la terza condizione è quindi equivalente alle prime due.
- Le condizioni 4 e 5 sono equivalenti, dato l'esistenza di una soluzione unica per una matrice quadrata si decide, facendo una riduzione di Gauss, guardando solo la matrice incompleta.
- La condizione 3 implica la 4, dato che

$$A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{0} \Rightarrow I_2\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

- La condizione 5 implica la 1, dato che se il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha un unica soluzione per ogni $\underline{b}$ anche il sistema

$$A \cdot [x_1, \dots, x_n] = [b_1, \dots, b_n] \Leftrightarrow AX = B$$

ha unica soluzione e quindi A è invertibile.

□

Proposizione 7.51. [EEE11] Date $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che $A \cdot B$ è invertibile se e solo se A, B sono invertibili e in questo caso $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dimostrazione. Vediamo che se A, B sono invertibili $A \cdot B$ è invertibile e la sua inversa è proprio $B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\begin{aligned}(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot I_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= I_n\end{aligned}$$

e quindi la matrice $(A \cdot B)^{-1}$ è l'inversa di $A \cdot B$.

Vediamo ora l'altra implicazione. Supponiamo che $A \cdot B$ sia invertibile e dimostriamo che A, B sono invertibili.

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} &= I_n && \text{Dato che } A \cdot B \text{ è invertibile} \\ A \cdot [B \cdot (A \cdot B)^{-1}] &= I_n\end{aligned}$$

e questo mi dice che il prodotto di A per la matrice $B \cdot (A \cdot B)^{-1}$ è I_n , e quindi A ha inversa destra, quindi è invertibile. Posso fare lo stesso ragionamento su B ed ho quindi la tesi. $\square$

7.6 Prodotto di matrici non quadrate

Possiamo facilmente generalizzare il prodotto matriciale $A \cdot B$ a matrici non quadrate, avendo cura che sia possibile fare i prodotti scalari, ovvero che il numero delle colonne di A sia uguale al numero di righe di B .

Definizione 7.52. [DDD04] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$. Allora la matrice $A \cdot B \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$ così definita

$$A \cdot B = (A_i \cdot B^j)_{i,j} \quad \text{con } i : 1 \dots m, j : 1 \dots k$$

si dice prodotto matriciale di A, B .

Notiamo che il numero delle colonne di A è uguale al numero di righe di B . I prodotti $A_i \cdot B^j$ hanno quindi senso

Valgono tutte le osservazioni e le definizioni che abbiamo visto sul prodotto di matrici quadrate, adattate naturalmente a questo caso. Le matrici non quadrate non formano un anello, visto che non è possibile definire un prodotto interno per matrici in $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ con $m \neq n$ del tipo che ci interessa.

Esempio 7.53. [DDD12]

1. Il prodotto delle due matrici di dimensioni 2×3 e 3×2 ha dimensioni 2×2

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [4,5,6]]);
```

```
B:=Mat([[1,2],
        [4,5],
        [1,1]]);
```

```
A*B;
Mat[[12, 15],
     [30, 39]];
```

2. Il prodotto delle due matrici di dimensioni 1×3 e 3×1 ha dimensioni 1×1

```
A:=Mat([[1,2,3]]);
B:=Mat([[1],
        [4],
        [1]]);
A*B;
Mat[[12]]
```

Si tratta in effetti, in questo caso, di un prodotto scalare

3. Il prodotto delle due matrici di dimensioni 4×1 e 1×4 ha dimensioni 4×4

```
A:=Mat([[1],
        [4],
        [1],
        [0]]);
B:=Mat([[1,2,0,3]]);
A*B;
Mat[ [1, 2, 0, 3],
     [4, 8, 0, 12],
     [1, 2, 0, 3],
     [0, 0, 0, 0]]
```

4. Il prodotto delle due matrici di dimensioni 3×2 e 2×4 ha dimensioni 3×4

```
A:=Mat([[1,2],
        [4,1],
        [1,0]]);
B:=Mat([[1,2,0,3],
        [0,2,1,1]]);
A*B;
Mat([[1, 6, 2, 5],
     [4, 10, 1, 13],
     [1, 2, 0, 3]])
```

Esercizio 7.54. [DDD23] Il prodotto matriciale di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = B$$

è definito ?

Soluzione. Il prodotto matriciale di sopra non è definito perché il numero di colonne di $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ è diverso dal numero di righe di $B \in \text{Mat}_{\times 3}(2) \mathbb{K}$. Infatti non è possibile fare, per esempio, il prodotto scalare

$$(1, 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

□

7.7 Matrice trasposta

Definizione 7.55. [EEE20] *Data una matrice*

$$A = (a_{ij})_{ij} \quad i : 1 \dots m, j : 1 \dots n$$

la matrice

$$(a_{ji})_{ij} \quad i : 1 \dots m, j : 1 \dots n$$

è detta matrice trasposta di A e si scrive A^T . Trasporre una matrice lascia invariata la diagonale e scambia gli elementi sopra di essa con i corrispondenti elementi al di sotto. Da un altro punto di vista, trasporre una matrice ne scambia le righe con le colonne.

Osservazione 7.56. [EEX20] *Notiamo che l'operazione di trasposizione di una matrice $(a_{ij})_{ij}$ si può definire anche come*

$$((a_{ij})^T)_{ij} = (a_{ji})_{ij}$$

Esercizio 7.57. [EEE48]

```
M:=Mat([[1,1,1],
        [2,2,2],
        [3,3,3]]);
Transposed(M);
Mat[ [1, 2, 3],
      [1, 2, 3],
      [1, 2, 3]]
```

Esercizio 7.58. [EEW48]

```
M:=Mat([[1,2,3],
        [4,5,6],
        [7,8,8]]);
Transposed(M);
Mat[ [1, 4, 7],
      [2, 5, 8],
      [3, 6, 8] ]
```

Proposizione 7.59 (Proprietà della trasposta). [EEE17] *Siano $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $\forall t \in \mathbb{K} \quad (tA)^T = tA^T$.
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Dimostrazione.

1. Immediata.
2. Immediata.
3. Immediata.

4.

5. Vediamo che $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ [Non svolta in classe]

$$\begin{aligned} ((A \cdot B)^T)_{ij} &= \left(\left(\left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right) \right)_{ij} \right)^T = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki} \\ (B^T \cdot A^T)_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^m (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk} \end{aligned}$$

e dato che il prodotto di scalari è commutativo le due sommatorie sono uguali.

Notiamo che

- per la prima riga, la prima uguaglianza segue dalla definizione di prodotto di matrici

$$(a_{ij})_{ij} \cdot (b_{ls})_{ls} = \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right)_{ij}$$

e la seconda dalla definizione di trasposta $((a_{ij})^T)_{ij} = (a_{ji})_{ij}$.

- Analogamente per la seconda riga.

□

Esercizio 7.60. [EEE16]

```
A:=Mat([ [1,2,3],
          [0,1,0],
          [1,1,1] ] );
```

```
B:=Mat([ [1,2,0],
          [1,2,0],
          [1,2,1] ] );
```

```
A*B;
```

```
Mat([ [6, 12, 3],
       [1, 2, 0],
       [3, 6, 1] ]
```

```
Transposed(A*B);
```

```
Mat([ [6, 1, 3],
       [12, 2, 6],
       [3, 0, 1] ]
```

```
Transposed(B)*Transposed(A);
```

```
Mat([ [6, 1, 3],
       [12, 2, 6],
       [3, 0, 1] ]
```

7.8 Matrici a Blocchi

Definizione 7.61 (Matrici a blocchi). [CCQ00] Una matrice $M \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ si può scrivere come

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

dove A, B, C, D sono opportune matrici. La matrice M scritta in questo modo si dice *matrice a blocchi* e la matrici A, B, C, D si dicono *blocchi della matrice M* . Possiamo facilmente generalizzare la definizione a matrici con un numero qualunque di blocchi.

Esempio 7.62. [CCQ01] Esempi di matrici a blocchi

1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 9 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

4.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline A & 0 & B \\ \hline C & C & C \end{array} \right)$$

Osservazione 7.63. [CCD17] Una matrice $M \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ in forma normale si può scrivere come

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

ove 0 è una opportuna matrice di zeri, e A, B opportune matrici.

Osservazione 7.64. [EEE41] [Prodotto a blocchi] Date matrici A_1, A_2, B_1, B_2 di opportune dimensioni sullo stesso campo,

$$(A_1 \quad A_2) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Quando gli ordini delle matrici, sullo stesso campo, rendono possibile calcolare i vari prodotti.

Esercizio 7.65. [EEE43] *Data la matrice a blocchi*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

trovare una formula per A^n .

Soluzione. Calcoliamo qualche potenza finchè non abbiamo un'idea della formula, che poi dimostreremo per induzione.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^2 &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 \cdot I_3 + \underline{v} \cdot \underline{0} & I_3 \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot 1 \\ \hline \underline{0} \cdot I_3 + 1 \cdot \underline{0} & \underline{0} \cdot \underline{v} + 1 \cdot 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & I_3 \cdot \underline{v} + \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^3 &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 3\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Abbiamo calcolato A^2, A^3 . Pensiamo che la formula sia

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)^k = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)$$

Dimostriamolo per induzione sull'esponente della matrice, k .

- Base. $k = 3$. Già fatto.
- Passo induttivo. Supponiamo che valga

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)^k = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)$$

e dimostriamo che vale

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)^{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & (k+1)\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)^{k+1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)^k \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & (k+1)\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

□

Capitolo 8

Ottava lezione - Esercizi

8.1 Indipendenza lineare

Esercizio 8.1. [CCB42] *I numeri complessi $1+i$, 4 sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$? Su $\mathbb{R}$?*

1. Risolviamo per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ il sistema omogeneo

$$\{\alpha(1+i) + \beta 4 = 0 \Leftrightarrow \{\beta = -\frac{1+i}{4}\alpha$$

le soluzioni sono quindi

$$\left\{ \left(\lambda, -\frac{1+i}{4}\lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

dato che ci sono altre soluzioni oltre a $\underline{0}$ i numeri complessi $1+i$, 4 sono linearmente dipendenti su $\mathbb{C}$.

2. Risolviamo per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo

$$\{\alpha(1+i) + \beta 4 = 0 \Leftrightarrow \{\alpha + 4\beta + \alpha i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

l'unica soluzione è quindi $\underline{0}$ ed i numeri complessi $1+i$, 4 sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.2. [CCS42] *Il vettore $\underline{0}$ è dipendente anche da se stesso, infatti $3 \cdot \underline{0} = \underline{0}$ ma $3 \neq 0$.*

Esercizio 8.3. [KK13] *Stabilire se i tre vettori $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 4, 7) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.*

Soluzione: Usando la definizione di indipendenza lineare, questa domanda equivale a chiedersi se il sistema

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(2, 4, 7) = \underline{0}$$

ammette solo la soluzione $\underline{0}$. Dato che $(1, 2, 3) + (1, 2, 4) = (2, 4, 7)$ il sistema ammette anche la soluzione $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = -1$; i tre vettori non sono quindi linearmente indipendenti. $\square$

Esercizio 8.4. [LL82] *Dati i polinomi in $\mathbb{R}[x]$*

$$p_1(x) = x^7 + 3x^5 - 3x^2 + 1$$

$$p_2(x) = 5x^7 + 2x^2 + 3$$

$$p_3(x) = -4x^5 + 3x^2 + 2$$

$$p_4(x) = 6x^7 - x^5 + 2x^2 + 6$$

stabilire se sono linearmente indipendenti e in caso contrario, determinare una relazione lineare tra di essi.

Soluzione. Usiamo la definizione di indipendenza lineare, cercando le soluzioni del sistema omogeneo in $\alpha, \beta, \gamma, \theta$

$$\alpha(x^7 + 3x^5 - 3x^2 + 1) + \beta(5x^7 + 2x^2 + 3) + \gamma(-4x^5 + 3x^2 + 2) + \theta(6x^7 - x^5 + 2x^2 + 6) \equiv 0_{\mathbb{R}[x]}$$

ovvero, raccogliendo le potenze della x

$$x^7(\alpha + 5\beta + 6\theta) + x^5(3\alpha - 4\gamma - \theta) + x^2(-3\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\theta) + \alpha + 3\beta + 2\gamma + 6\theta \equiv 0_{\mathbb{R}[x]}$$

che per il principio di identità dei polinomi ci dà il sistema in quattro equazioni, quattro incognite

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta + 6\theta = 0 \\ 3\alpha - 4\gamma - \theta = 0 \\ -3\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\theta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma + 6\theta = 0 \end{cases}$$

che risolviamo con Gauss

```
A:=Mat[[1, 5, 0, 6,0],
        [3, 0, -4, -1,0],
        [-3, 2, 3, 2,0],
        [1, 3, 2, 6,0]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 5, 0, 6, 0]
      2^a-3*1^a [0, -15, -4, -19, 0]
      3^a+3*1^a [0, 17, 3, 20, 0]
      4^a-1*1^a [0, -2, 2, 0, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-15
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 5, 0, 6, 0]
----- [0, -15, -4, -19, 0]
      3^a+17/15*2^a [0, 0, -23/15, -23/15, 0]
      4^a-2/15*2^a [0, 0, 38/15, 38/15, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-23/15
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 5, 0, 6, 0]
----- [0, -15, -4, -19, 0]
----- [0, 0, -23/15, -23/15, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
```

Già dalla penultima matrice, che ha due righe multiple una dell'altra, possiamo vedere che non esiste un'unica soluzione, quindi i quattro polinomi sono linearmente dipendenti.

Cerchiamo quindi una relazione lineare tra i polinomi, ovvero una soluzione non nulla del sistema

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta + 6\theta = 0 \\ -15\beta - 4\gamma - 19\theta = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha = -\theta \\ \beta = -\theta \\ \gamma = -\theta \end{cases}$$

Quindi

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{(-d, -d, -d, d) \mid d \in \mathbb{R}\}$$

e quindi $(1, 1, 1, -1) \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) - p_4(x) \stackrel{\mathbb{R}[x]}{=} 0$$

è una relazione lineare tra i quattro polinomi. □

Esercizio 8.5. [CCB00] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$*

$$x^3 + x + 2, x^2 - 1, 3x - 2, 6$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$?

Soluzione. Basta vedere il numero di soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{aligned} \alpha(x^3 + x + 2) + \beta(x^2 - 1) + \gamma(3x - 2) + \delta 6 &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha + 3\gamma)x + 2\alpha - \beta - 2\gamma + 6\delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma + 6\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

Quindi $\text{Sol} = \{0\}$ ed i quattro polinomi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ □

Esercizio 8.6. [CCB03] *le funzioni*

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x & x \mapsto \cos x & x \mapsto x \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$?

Soluzione. Usando la definizione di indipendenza lineare, dobbiamo vedere se l'unica soluzione dell'equazione a variabili $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma x \equiv \mathbf{0}$$

è la tripla $(\alpha, \beta, \gamma) = \underline{0}$, dove $\mathbf{0}$ è la funzione nulla

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$$

L'uguaglianza sulle funzioni diviene, per il principio di identità delle funzioni,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin x_0 + \beta \cos x_0 + \gamma x_0 = 0$$

e queste sono infinite equazioni nelle tre variabili α, β, γ , una equazione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dato che questa uguaglianza vale per tutti gli $x_0 \in \mathbb{R}$, vale in particolare per $x_0 = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$, che scelgo per la semplicità dei calcoli relativi, avrei potuto prendere altri numeri.

$$\begin{cases} \alpha \sin 0 + \beta \cos 0 + \gamma 0 = 0 & x_0 = 0 \\ \alpha \sin \pi + \beta \cos \pi + \gamma \pi = 0 & x_0 = \pi \\ \alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2} = 0 & x_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ovvero, dato che $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ -\beta + \gamma\pi = 0 \\ \alpha + \gamma\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Quindi necessariamente $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e le tre funzioni sono quindi linearmente indipendenti.

Ricordiamo che il nome della variabile associato a $\forall$, che si comporta come parametro, può essere cambiato a piacere. Avremmo potuto considerare la relazione

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin a + \beta \cos a + \gamma a = 0$$

oppure

$$\forall \spadesuit \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin \spadesuit + \beta \cos \spadesuit + \gamma \spadesuit = 0$$

□

8.2 Prodotto di matrici

Esercizio 8.7. [DDD24] *Dimostrare che per il prodotto di matrici non vale la legge di cancellazione del prodotto ovvero, per $A, B, C \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ non vale necessariamente*

$$AB + AC = 0 \Rightarrow B + C = 0$$

Soluzione. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} A \cdot B + A \cdot C &= A \cdot (B + C) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} B + C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

□

Corollario 8.8. [EEE12] *Abbiamo che $(\{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \exists A^{-1}\}, \cdot)$ è un gruppo rispetto al prodotto di matrici con neutro I_n .*

Dimostrazione. L'insieme è chiuso rispetto al prodotto e soddisfa tutte le condizioni di gruppo. □

Osservazione 8.9. [DDD15] *Dimostrare che date due matrici $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ abbiamo che*

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Se le due matrici commutano (se $AB = BA$) allora ritroviamo la formula usuale

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Esercizio 8.10. [DDD32] *Trovare una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che $A^2 = 0$*

Soluzione. Proviamo con una matrice 2×2 quasi nulla, ma con diagonale nulla (altrimenti ripetiamo una riga non nulla nel quadrato)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

□

Definizione 8.11. [DDD14] *Una matrice non nulla $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è detta nipotente se esiste $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che*

$$A^k = 0$$

8.3 Matrici elementari

Vediamo che le operazioni di Gauss possono essere interpretate come moltiplicazioni per matrici speciali, dette *matrici elementari*.

Per lo scambio di righe:

Definizione-Proposizione 8.12. [DDD50] *La matrice identità I_n con le righe i -esima e j -esima scambiate si indica come S_n^{ij} . Data una matrice $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, la matrice $S_n^{ij} \cdot B$ è uguale alla matrice B ma con le righe i -esima e j -esima scambiate.*

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto matriciale.

□

Esercizio 8.13. [DDD51]

$$S_5^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} S_5^{24} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per la cancellazione:

Definizione-Proposizione 8.14. [DDD53] La matrice identità I_n con le riga i -esima sostituita dalla riga $(I_n)_i + \lambda(I_n)_j$ (la somma della riga i -esima e della riga j -esima moltiplicata per λ) si indica come $G_n^{ij}(\lambda)$. Data una matrice $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, la matrice $G_n^{ij}(\lambda) \cdot B$ è uguale alla matrice B ma con le riga i -esima B_i sostituita da $B_i + \lambda B_j$.

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto matriciale. □

Esercizio 8.15. [DDD54]

$$G_3^{21}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e vediamo che moltiplicare a sinistra per $G_3^{21}\left(-\frac{3}{2}\right)$ l'opportuna matrice equivale a fare un'operazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad II^a \rightarrow II^a - \frac{3}{2} I^a$$

Definizione 8.16. [DDD57] Le matrici del tipo S_n^{ij} , $G_n^{ij}(\lambda)$ si dicono matrici elementari.

8.4 Matrici non quadrate

Osservazione 8.17. [EEE13] Diciamo che una matrice non necessariamente quadrata $A \in \text{Mat}_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}(\mathbb{K})$ ha inversa destra $X \in \text{Mat}_{\mathbf{n} \times \mathbf{m}}(\mathbb{K})$ se $A \cdot X = I_m$. Analogamente, diciamo che ha inversa sinistra $Y \in \text{Mat}_{\mathbf{n} \times \mathbf{m}}(\mathbb{K})$ se $Y \cdot A = I_n$. Le due inverse non possono essere uguali per semplici ragioni di ordine se la matrice non è quadrata.

Esercizio 8.18. [EEE14] Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare una sua inversa destra ed una sua inversa sinistra.

Esercizio 8.19. [DDD22] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dire se è nilpotente.

Soluzione. Svolgiamo i conti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $A^2 \neq 0$. Vediamo $A^3 = A \cdot A^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $A^3 = 0$ e A è nilpotente. □

Esercizio 8.20. [DDA24] *Determinare una matrice X in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tale che*

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Procediamo con la forza bruta: costruiamo la matrice di incognite

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

e vediamo quando

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt - 1 \\ xz + zt & yz + t^2 + 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ xy + yt - 1 = 0 \\ xz + zt = 0 \\ yz + t^2 + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema è complesso, e a noi è richiesta solo una soluzione. Proviamo a dare dei valori opportuni ad una variabile per semplificare il sistema, sperando che il sistema semplificato abbia soluzioni. Poniamo $t = i$ l'ultima equazione che diviene $yz = 0$. Scegliamo $z = 0$. Il sistema diviene quindi

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ xy + yi - 1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \\ t = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ yi - 1 = 0 \\ z = 0 \\ t = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{i} = -i \\ z = 0 \\ t = i \end{cases}$$

Quindi una soluzione è

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 8.21. [MMX56] *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

determinare, se esiste, l'inversa di A .

Soluzione. Proviamo a calcolare l'inversa per forza bruta, visto il numero di zeri presenti in A . Stiamo quindi cercando una matrice incognita $X \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tale che

$$A \cdot X = I_4$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} + x_{31} - 1 & 3x_{12} + x_{32} & 3x_{13} + x_{33} & 3x_{14} + x_{34} \\ x_{11} & x_{12} - 1 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} - 1 & x_{24} \\ 2x_{31} + x_{41} & 2x_{32} + x_{42} & 2x_{33} + x_{43} & 2x_{34} + x_{44} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

ed otteniamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_{11} + x_{31} = 1 \\ 3x_{12} + x_{32} = 0 \\ 3x_{13} + x_{33} = 0 \\ 3x_{14} + x_{34} = 0 \\ x_{11} = 0 \\ x_{12} = 1 \\ x_{13} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{23} = 1 \\ x_{24} = 0 \\ 2x_{31} + x_{41} = 0 \\ 2x_{32} + x_{42} = 0 \\ 2x_{33} + x_{43} = 0 \\ 2x_{34} + x_{44} = 1 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 0 \\ x_{12} = 1 \\ x_{13} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{23} = 1 \\ x_{24} = 0 \\ x_{31} = 1 \\ x_{32} = -3 \\ x_{33} = 0 \\ x_{34} = 0 \\ x_{41} = -2 \\ x_{42} = 6 \\ x_{43} = 0 \\ x_{44} = 1 \end{array} \right.$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 8.22. [MMX59] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

determinare, se esiste, l'inversa di A .

Soluzione. Procediamo con il metodo dell'identità:

```
AI4:=Mat[[3 , 0 , 1 , 0, 1, 0, 0, 0],
          [1 , 0 , 0 , 0, 0, 1, 0, 0],
          [0 , 1 , 0 , 0, 0, 0, 1, 0],
          [0 , 0 , 2 , 1, 0, 0, 0, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI4);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a-(1/3)*1^a [0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
```

Scambio la 2^a e la 3^a riga

Adesso la matrice e'

```
Mat([[3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0],
      [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
      [0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0],
      [0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]])
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```
----- [3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1/3

Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot

```
----- [3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0]
4^a-(-6)*3^a [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1

```
1^a*(1/3) [1, 0, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
3^a*(-3) [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Cancello la colonna sopra il pivot nella 4 colonna

```
----- [1, 0, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
```

```
----- [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna

```
1^a-(1/3)*3^a [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna

```
----- [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

□

Esercizio 8.23. [MM25] *Calcolare, se esiste, l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Procediamo col calcolo mediante l'aggiunta dell'identità. Costruiamo la matrice

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e riduciamola in forma diagonale mediante il procedimento di Gauss.

```
AI3:=Mat[[2, 3, 1, 1, 0, 0],
          [-1, 2, 2, 0, 1, 0],
          [6, 2, -2, 0, 0, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI3);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, 1, 0, 0]
2^a+1/2*1^a [0, 7/2, 5/2, 1/2, 1, 0]
3^a-3*1^a [0, -7, -5, -3, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=7/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, 1, 0, 0]
----- [0, 7/2, 5/2, 1/2, 1, 0]
3^a+2*2^a [0, 0, 0, -2, 2, 1]
```

La terza riga della matrice incompleta è nulla quindi A non è invertibile. ma avrei potuto capirlo immediatamente dopo la riduzione della prima colonna: la seconda e terza riga della matrice incompleta sono multiple l'una dell'altra, e quindi il determinante dell'incompleta, e quindi A , è nullo. $\square$

8.5 Esercizi proposti

Esercizio 8.24. [MMW25] Date due matrici $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, è vero che

$$AB = 0 \Rightarrow BA = 0 ?$$

Hint: No, cercare un controesempio.

Esercizio 8.25. [DDW22] Date

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare

1. Calcolare $A \cdot B$, $(A + B) \cdot C$, $(3A + 2C) \cdot (A - C)$.
2. Un inversa destra di A . Un inversa sinistra di A . Se esistono.
3. Un inversa destra di B . Un inversa sinistra di B . Se esistono.
4. Un inversa destra di C . Un inversa sinistra di C . Se esistono.
5. Risolvere le equazioni $AX = C$, $XA = C$, $AX + BX + CX = 0$

Esercizio 8.26. [FFE01] Il vettore $(1, 2, 3, 1, 3, 4, 4)$ può essere combinazione lineare dei vettori $(4, 2, 1, 0, 1, -4, 4)$, $(3, 2, -1, 0, 3, 2, 1)$, $(6, 2, 4, 0, 3, 3, 4)$?

Sol: No

Esercizio 8.27. [FFE02] Determinare delle relazioni lineari tra le righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -11 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: } -2A_1 + A_2 + 3A_3 = 0, -5A_1 - 2A_2 + 3A_4 = 0$$

Esercizio 8.28. [FFE03] Determinare due colonne linearmente indipendenti tra quelle di

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -11 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

e le relazioni di dipendenza lineare per le altre due.

Sol: Le ultime due colonne sono combinazione lineare delle prime due, che sono linearmente indipendenti. Le relazioni sono $-4A^1 + 3A^2 + 3A^4 = 0$, $-11A^1 + 9A^2 + 3A^3 = 0$

Esercizio 8.29. [FFE04] *Determinare combinazioni lineari di $\underline{v}_1 = (1, 3)$, $\underline{v}_2 = (-1, 2)$ che mi diano $\underline{u}_3 = (1, 1)$, $\underline{u}_4 = (2, 5)$, $\underline{u}_5 = (0, 3)$.*

Sol: $3/5\underline{v}_1 - 2/5\underline{v}_2 = \underline{u}_1$, $9/5\underline{v}_1 - 1/5\underline{v}_2 = \underline{u}_2$, $3/5\underline{v}_1 + 3/5\underline{v}_2 = \underline{u}_3$.

Esercizio 8.30. [DDA21] *Svolgere le seguenti moltiplicazioni di matrici*

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Soluzione} \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Soluzione} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Soluzione} \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Soluzione} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Soluzione} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

6.

Esercizio 8.31. [DDA11] *Dimostrare che il prodotto di matrici diagonali è ancora diagonale.*

Esercizio 8.32. [DDA12] *Dimostrare che tutte le matrici diagonali con gli elementi sulla diagonale non nulli hanno inversa e determinare tale inversa.*

Esercizio 8.33. [DDA17] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare se possibile una matrice non nulla $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = 0_2$

Soluzione. Non è possibile. □

Esercizio 8.34. [DDD17] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Trovare se possibile due matrici diverse, non nulle $B_1, B_2 \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tali che $A \cdot B_1 = 0_2 = A \cdot B_2$.

Soluzione. Una possibile soluzione è

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.35. [DDD80] *Determinare 302 matrici radici quadrate di I_2 , ovvero 302 matrici $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tali che $A^2 = I_n$.*

Esercizio 8.36. [DDD18] *Trovare tutte le matrici in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ nilpotenti. [Difficile]*

Esercizio 8.37. [DDD20] *Trovare due matrici in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ nilpotenti con $a_{11} = 0$*

Esercizio 8.38. [DDX80] *Determinare 302 matrici radici quadrate di $-I_2$, ovvero 302 matrici $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tali che $A^2 = -I_n$.*

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = \{1, 2, 3, \dots, 302\}$$

□

Esercizio 8.39. [DDD95] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Trovare se possibile una matrice non banale (non nulla, non l'identità) $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = B \cdot A$

Soluzione. $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

□

Esercizio 8.40. [DDD88] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Trovare tutte le matrici $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$

Soluzione. $B = \begin{pmatrix} y+t & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{K}$

□

Esercizio 8.41. [DDD96] *Dimostrare che il prodotto di matrici quadrate triangolari superiori dello stesso ordine è ancora triangolare superiore. [Hint: usare l'induzione]*

Esercizio 8.42. [DDA96] *Una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ diversa dalla matrice identica si dice idempotente di indice n se esiste un intero $n > 1$ tale che $A^n = I$.*

1. *Determinare una matrice idempotente non banale in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.*
2. *Determinare una matrice idempotente non banale in $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.*
3. *Determinare una matrice idempotente non banale in $\text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.*
4. *Determinare tutte le matrici idempotenti di indice 2 in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.*

Esercizio 8.43. [EEA18] *Dimostrare che il prodotto di matrici triangolari superiori è triangolare superiore*

Esercizio 8.44. [EEQ18] *Calcolare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:*

$$\begin{aligned}
1. & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 27 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \\
2. & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
3. & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.45. [EEW18] Risolvere la seguente equazione matriciale per l'incognita X

$$X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8.46. [EES18] Risolvere la seguente equazione matriciale per l'incognita X

$$3X \cdot \left(2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8.47. [EER21] Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Risolvere $(3X + A)(A + 2I) = 0$ per l'incognita X .

Esercizio 8.48. [EES19] determinare se possibile quattro matrici X tali che

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8.49. [EES20] determinare se possibile quattro matrici X tali che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8.50. [CCA11] Determinare se i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, 4, 0), \quad \underline{v}_3 = (1, -1, 1), \quad \underline{v}_4 = (2, 2, 5)$$

sono linearmente indipendenti. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 8.51. [CCA00] Determinare se i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, 3, 4, 0), \quad \underline{v}_3 = (0, 1, -1, 1), \quad \underline{v}_4 = (1, 2, 2, 5), \underline{v}_5 = (1, 0, 4, 0)$$

sono linearmente indipendenti. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 8.52. [CCD00] *Quale è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^n$?*

Esercizio 8.53. [CCA02] *Determinare se i polinomi*

$$x^2 + 2x + 1, \quad x^2 - 2x + 1, \quad x^2 + x + 1$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 8.54. [CCA03] *Determinare se i polinomi*

$$3x^2 + 2x - 5, \quad x^2 - 3x + 2, \quad 4x^2 + 10x - 14$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 8.55. [CCA04] *Determinare se le funzioni*

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^2(x) & x \mapsto \cos^2(x) & x \mapsto 5 \end{array},$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. In caso contrario, determinare tra loro una relazione lineare.

Esercizio 8.56. [CCB01] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$*

$$x^4, x^3, x^2, x, 1$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$?

Esercizio 8.57. [CCD01] *Quale è il massimo numero di polinomi linearmente indipendenti in $\mathbb{K}[x]$?*

Esercizio 8.58. [CCB29] *I polinomi $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{K}[x]$, tutti di grado diverso tra loro, sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$?*

Esercizio 8.59. [CCB47] *I numeri reali $1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$? Su $\mathbb{Q}$?*

Esercizio 8.60. [CCB04] *Determinare se le funzioni*

$$\begin{array}{llll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^2 x & x \mapsto \sin(2x) & x \mapsto \cos(2x) & x \mapsto \sqrt{11} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.61. [CCB48] *Determinare se le funzioni*

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x & x \mapsto x + 1 & x \mapsto \sqrt{|x|} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.62. [CCB02] *Sia $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Quale è il massimo numero di funzioni linearmente indipendenti in F ?*

Esercizio 8.63. [EEE53] *Dimostrare che la legge di cancellazione del prodotto*

$$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \quad AB = AC \Rightarrow B = C$$

vale se A è invertibile.

Esercizio 8.64. [DDA32] *Dimostrare che se $(A, +, \cdot)$ è un anello, allora A non ha zero divisori se e solo se vale in A la legge di cancellazione del prodotto. Un anello senza zero-divisori si dice integro.*

8.6 Seconda prova di autovalutazione

[Auto2] [Tempo stimato: 2h15m]

1. Risolvere usando Gauss il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{5}\lambda \\ y = 1 - \frac{3}{5}\lambda \\ z = -2 \\ t = \lambda \end{cases}$$

□

2. Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + z = -3 \\ x + yk + y + zk - 2tk + 2t = -2k - 1 \\ xk + 2x + yk + 3y + zk^2 + 2zk + z - 2tk + 2t = -k^2 - 4k - 4 \end{cases}$$

Soluzione.

- $k \neq 0, 1$: ∞^1 soluzioni.
- $k = 0, 1$: ∞^2 soluzioni.

□

3. Date $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Calcolare MA

Soluzione.

$$MA = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \\ 10 & 8 & 8 & 16 \\ 9 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

□

4. Risolvere l'equazione matriciale

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$X = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 22 & 2 & 2 \\ 27 & -27 & 27 \\ -7 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Parte III

Determinante e rango

Capitolo 9

Nona lezione - Determinante

9.1 Determinante

Vediamo cosa si può dire sull'invertibilità delle matrici 2×2 :

Esempio 9.1 (Matrici 2×2). [EEE05] *Sia $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$; vogliamo trovare tutte le matrici $X \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ tali che*

$$A \cdot X = I_2$$

Determiniamo l'inversa destra risolvendo il sistema $A \cdot X = I_2$

```
Use R:=Q[x,y,z,t,a,b,c,d];
M:=Mat([[a,b,1,0],
        [c,d,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
FACCIO A PARTE IL CASO a=0
POSSO SUPPORRE a<>0
```

```
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a,          b,    1, 0]
          2^a-c/a*1^a [0, (-bc + ad)/a, -c/a, 1]
```

```
CASO a<>0, bc - ad=0 TRATTO IL CASO A PARTE
POSSO SUPPORRE bc - ad<>0
Scala2DiagonaleVerbose(L);
          1^a*+1/a      [1, b/a,          1/a,          0]
2^a*-a/(bc - ad) [0,    1, c/(bc - ad), -a/(bc - ad)]
```

```
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
1^a-b/a*2^a [1, 0, -d/(bc - ad), b/(bc - ad)]
----- [0, 1, c/(bc - ad), -a/(bc - ad)]
```

```
CASO a=0
```

```

M:=Mat([[0,b,1,0],
        [c,d,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [c, d, 0, 1],
      [0, b, 1, 0]]

```

DEVO AVERE $c \neq 0$. SE $a=0$, $c=0$ TRATTO IL CASO A PARTE

DEVO AVERE $b \neq 0$. SE $a=0$, $c \neq 0$, $b=0$ TRATTO IL CASO A PARTE

PROSEGUO CON $a=0$, $c \neq 0$, $b \neq 0$

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a*+1/c [1, d/c, 0, 1/c]
2^a*+1/b [0, 1, 1/b, 0]

```

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

```

1^a-d/c*2^a [1, 0, -d/(bc), 1/c]
----- [0, 1, 1/b, 0]

```

Esaminiamo i cinque casi

- $a \neq 0, bc - ad \neq 0$. *Soluzione*

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-d}{bc-ad} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ soluzione unica}$$

- $a \neq 0, bc - ad = 0$. *Il sistema diviene*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & -c/a & 1 \end{array} \right)$$

che è impossibile. Si vede facilmente dalla seconda riga, che con la seconda colonna dei termini noti mi dà $0z + 0t = 1$.

- $a = 0, b, c \neq 0$. *Il sistema diviene (usiamo la forma triangolare superiore)*

$$\begin{pmatrix} \frac{-d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{bc-ad} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix}_{a=0} = \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)_{|a=0}$$

soluzione unica, e quindi questo caso è compreso nel primo, si tratta di uno di quei casi in cui le condizioni vengono dal processo di riduzione, non sono intrinseci.

- $a = 0, c = 0$. *Il sistema diviene*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} bz = 1 \\ bt = 0 \\ dz = 0 \\ dt = 1 \end{cases}$$

Dalla prima e quarta equazione, $z, d \neq 0$. Dalla terza $dz = 0$. Assurdo, il sistema è impossibile.

e

- $a = 0, c \neq 0, b = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La prima riga ci dice che il sistema è impossibile.

Possiamo quindi ricapitolare

- Se $ad - bc \neq 0$ l'inversa destra di A , esiste e precisamente $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Altrimenti, ovvero se $ad - bc = 0$, la matrice A non ha inversa destra, e quindi non è invertibile.

Si verifica facilmente, come già sappiamo, che la matrice $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ è anche inversa sinistra di A .

Esempio 9.2. [EEE51] Calcolare se possibile l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $ad - bc = 2 - 2 = 0$ e quindi la matrice non è invertibile.

Esempio 9.3. [EEE50] Calcolare se possibile l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $ad - bc = 1 - 3 = -2$ e quindi la matrice è invertibile. Usiamo la formula

$$\frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Definizione 9.4. [EEE60] Data una matrice quadrata $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ e due interi i, j tali che $1 \leq i, j \leq n$, definiamo minore (i, j) di A , e scriviamo $A_{i,j}$ la matrice appartenente a $\text{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ ottenuta dalla cancellazione della i -esima riga e della j -esima colonna di A .

Esempio 9.5. [EEE61] Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ allora } A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Usiamo la solita convenzione per cui le righe della matrice $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono indicate come $A_1, \dots, A_n$ e le colonne come $A^1, \dots, A^n$.

Teorema 9.6 (Determinante). [EEE64] *Esiste un'unica applicazione*

$$\det: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che date $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

1. *Se* $A = (a_{11}) \in \text{Mat}_{1 \times 1}(\mathbb{R})$, $\det(A) = a_{11}$.
2. *Sviluppo di Laplace sulla riga* i -esima, $i : 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \quad \text{N.B. } i \text{ è fissato}$$

3. *Sviluppo di Laplace sulla colonna* j -esima, $j : 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \quad \text{N.B. } j \text{ è fissato}$$

4. *Teorema di Binet* $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Dimostrazione. Non è richiesta la dimostrazione. Per i dettagli, Abate capitolo 9. □

Vediamo ora alcune proprietà del determinante. Nelle ipotesi del teorema precedente:

Corollario 9.7. [EEE67] $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Dimostrazione. Basta sviluppare per una riga o colonna qualunque. □

Esempio 9.8. [EEE79] *Calcoliamo il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Soluzione. Sviluppiamo per la seconda riga

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 5(1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 6(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) \\ &= 24 - 60 + 36 = 0 \end{aligned}$$

□

Esempio 9.9. [EEE80] *Calcoliamo il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione. Sviluppiamo per la seconda colonna

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^3 \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 0 \\ &= 0 - 1 - 0 = -1\end{aligned}$$

□

Corollario 9.10. [EEE65] $\det(0_n) = 0$ e $\det(I_n) = 1$.

Dimostrazione. La prima uguaglianza è immediata. La seconda segue immediatamente dalla definizione sviluppando per una riga qualunque ed usando l'induzione, ma la matrice identica è un caso particolare di matrice diagonale, quindi ci rifacciamo alla dimostrazione del determinante di matrici diagonali. □

Corollario 9.11. [EEE68] Se una riga (o una colonna) di A è nulla ho $\det(A) = 0$.

Dimostrazione. Basta calcolare il determinante sviluppando per quella riga (o colonna). □

Corollario 9.12. [EEE88] Il determinante di una matrice diagonale D è il prodotto degli elementi sulla diagonale, ovvero

$$\det D = \prod_{i=1}^n d_{ii}$$

In particolare, è non nullo se e solo se tutti gli elementi sulla diagonale sono non nulli.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione sull'ordine della matrice diagonale

$$D = \text{Diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) = \left(\begin{array}{c|cccc} d_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & d_{22} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{array} \right)$$

- Base: $n = 1$ Ovvio.
- Passo induttivo: possiamo supporre, per l'ipotesi induttiva, che la tesi sia vera per tutte le matrici diagonali di ordine $n - 1$, e quindi per il blocco in basso a destra, il minore A_{11} , che è diagonale di ordine $n - 1$. Sviluppiamo secondo la prima riga.

$$\det(D) = d_{11} \det A_{11} = d_{11} \prod_{i=2}^n d_{ii} = \prod_{i=1}^n d_{ii}$$

ed abbiamo concluso.

□

Corollario 9.13. [EEE91] Sia A una matrice triangolare superiore. Allora

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. [Hint: ricalcare la dimostrazione per le matrici diagonali vista al corollario precedente]. $\square$

Corollario 9.14. [EEE69] Abbiamo $\det(A^T) = \det(A)$

Dimostrazione. Posso calcolare il determinante sviluppando sia per riga che per colonna, e le righe di A sono le colonne di A^T e viceversa. $\square$

9.2 Operazioni di Gauss e determinante

Moltiplicazione di una riga/colonna per uno scalare

Definizione-Proposizione 9.15. [EEW76] Data $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, l'operazione di moltiplicazione della riga i -esima di A per $\lambda \in \mathbb{K}$ si può effettuare mediante la sua moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$S_n^i(\lambda) = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1}, \lambda \underline{e}_i, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n]$$

Analogamente per le colonne, con moltiplicazione a destra.

Esempio 9.16. [EEY02] Per esempio,

$$\begin{aligned} S_3^2(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposizione 9.17. [EEE78] Data $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, moltiplicare una riga (colonna) di A per uno scalare λ moltiplica il determinante per λ .

Dimostrazione. Si vede immediatamente sviluppando il determinante con Laplace secondo la i -esima riga e raccogliendo λ tra tutti gli addendi. Analogamente per le colonne.

La dimostrazione può anche essere dedotta, immediatamente, dal teorema di Binet. $\square$

Esempio 9.18. [EEW02]

1.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

2.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 6 \cdot \left(1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= 6(1 \cdot 4 - 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)) = -6
\end{aligned}$$

Abbiamo raccolto 3 dalla seconda riga e 2 dalla terza riga. Abbiamo poi sviluppato con Laplace per la prima riga.

Scambio di righe e colonne

Osservazione 9.19. [EEU71] Ricordiamo che S_n^{ij} è la matrice elementare uguale alla matrice identità tranne che ha le righe i, j scambiate.

Esempio 9.20. [EEY71]

$$S_5^{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 9.21. [EEW71] Abbiamo che $\det S_n^{ij} = -1$

Dimostrazione. Sviluppiamo il determinante ed i determinanti dei minori successivi per le righe non scambiate ottenendo che

$$\det(S_{ij}^n) = \det(S_{ij}^{n-1}) = \dots = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

□

[Proposto: formalizzare la dimostrazione con un procedimento di induzione]

Esempio 9.22. [EEW01] Vediamo che $\det S_5^{1,4} = -1$

$$\det S_5^{1,4} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Abbiamo sviluppato rispettivamente per la seconda riga, per la seconda riga, per la terza riga.

Corollario 9.23. [EEE71] Sia $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ e B^{ij} la matrice ottenuta da A scambiando le righe i e j . Allora

$$\det B^{ij} = -\det(A)$$

Dimostrazione. Dato che $B^{ij} = S^{ij} \cdot A$ e che $\det S^{ij} = -1$, per il teorema di Binet, consegue che

$$\det(B_{ij}) = \det(S_n^{ij} A) = \det(S_n^{ij}) \det(A) = \cdots = -\det(A)$$

Analogamente per le colonne, moltiplicando la matrice A per S_n^{ij} a destra. $\square$

Passo di riduzione di Gauss

Osservazione 9.24. [EEV71] Ricordiamo che $G_n^{ij}(\lambda)$ è la matrice identità con al posto della riga j -esima (e_j) la riga $e_j + \lambda e_i$.

Esempio 9.25. [EET71]

$$G_5^{32}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 9.26. [EEG71] Abbiamo che $\det G_n^{ij}(\lambda) = 1$

Dimostrazione. Dato che una matrice $G_n^{ij}(\lambda)$ è triangolare superiore od inferiore (a seconda se $i > j$ o $i < j$), e gli elementi sulla diagonale sono tutti uguali ad 1, il determinante è 1. $\square$

Osservazione 9.27. [EEX71] Ricordiamo che data $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, la matrice

$$B = [A_1, \dots, A_{j-1}, A_j + \lambda A_i, A_{j+1}, \dots, A_n]$$

risultato dell'operazione di Gauss

$$A_j \longrightarrow A_j + \lambda A_i$$

si può ottenere come

$$B = G_n^{ij}(\lambda) \cdot A$$

Notiamo che, per il teorema di Binet,

$$\det B = \det(G_n^{ij}(\lambda) \cdot A) = \det G_n^{ij}(\lambda) \det A = 1 \cdot \det A = \det A$$

Abbiamo visto l'effetto che le operazioni di Gauss hanno sul determinante della matrice. Vediamo quindi cosa succede riducendo con Gauss una matrice a scala, in forma standard, in forma normale

Corollario 9.28. [EEC99] Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, l'operazione sulle colonne $C_j \longrightarrow C_j + \lambda C_i$ (sostituire la colonna j -esima con la somma della colonna j -esima per la colonna i -esima moltiplicata per lo scalare λ) lascia invariato il determinante.

Dimostrazione. L'operazione sulle righe lascia il determinante invariato, ed il determinante di A è uguale al determinante di A^T , le cui righe sono le colonne di A e su cui l'operazione $C_j \longrightarrow C_j + \lambda C_i$ diviene $R_j \longrightarrow R_j + \lambda R_i$, che sappiamo non cambiare il determinante. $\square$

Possiamo riassumere quanto visto con i seguenti enunciati:

Proposizione 9.29. [EEF99] Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, ed usando la notazione A_i per le righe e A^i per le colonne, abbiamo che

1. L'operazione $A_j \longrightarrow \alpha A_j + \beta A_i$, che si può realizzare moltiplicando a sinistra A per la matrice

$$[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{j-1}, \alpha \underline{e}_j + \beta \underline{e}_i, \underline{e}_{j+1}, \dots, \underline{e}_n]$$

ottenendo la matrice

$$[A_1, \dots, A_{j-1}, \alpha A_j + \beta A_i, A_{j+1}, \dots, A_n]$$

moltiplica il determinante per α .

2. L'operazione $A^j \longrightarrow \alpha A^j + \beta A^i$, che si può realizzare moltiplicando a destra A per la matrice

$$[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{j-1}, \alpha \underline{e}_j + \beta \underline{e}_i, \underline{e}_{j+1}, \dots, \underline{e}_n]$$

ottenendo la matrice

$$[A^1, \dots, A^{j-1}, \alpha A^j + \beta A^i, A^{j+1}, \dots, A^n]$$

moltiplica il determinante per α .

Dimostrazione. Dalle proposizioni precedenti, oppure possiamo notare che in ambedue i casi il determinante della matrice per cui moltiplichiamo A è uguale ad α e la tesi segue per il teorema di Binet. $\square$

Osservazione 9.30. [EEA98] *Nel caso precedente, se $i > j$ abbiamo una matrice triangolare inferiore, se $i < j$ triangolare superiore per le righe. Viceversa per le colonne.*

Osservazione 9.31. [EEZ99] *Nelle ipotesi della proposizione 9.29*

1. Se $\alpha = 1$ abbiamo un passo di riduzione di Gauss.
2. Se $\alpha = 0$, il determinante della matrice risultato è 0.
3. Se $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ stiamo moltiplicando la riga (colonna) j -esima per α ed il determinante di A è il determinante della matrice risultato moltiplicato per α .

Proposizione 9.32. [EEX99] *Per una matrice quadrata A e la sua riduzione in forma normale N , ottenuta con lo scambio di k righe ed s colonne e la moltiplicazione di righe per gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ abbiamo che*

$$\det(N) = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^t \lambda_i \det A$$

Dimostrazione. La riduzione in forma normale S si può ottenere da A mediante una serie di operazioni di scambio riga e/o colonna, riduzioni di Gauss e moltiplicazione di righe per scalare. Quindi $N = LAR$ dove L è il risultato del prodotto di k matrici del tipo S_n^{ij} , $G_n^{ij}(\lambda)$ e $S_n^i(\mu)$ (scambio colonne, riduzione, moltiplicazione riga per scalare) in un certo ordine,

- k matrici S_n^{ij} , (scambio riga).
- t matrici $S_n^i(\lambda)$, una per ogni pivot $p_i = \frac{1}{\lambda_i}$.
- Un certo numero di matrici $G_n^{ij}(\lambda)$.

e R è il risultato del prodotto di s matrici S_n^{ij} (scambio colonna), a destra.

Ricordando che

- $\det S_n^{ij} = -1$.
- $\det S_n^i(\lambda) = \lambda$.

- $\det G_n^{ij}(\lambda) = 1$.

Per il teorema di Binet

$$\begin{aligned}
 N &= L \cdot A \cdot R \\
 \det(N) &= \det(L \cdot A \cdot R) \\
 \det(N) &= \det(L) \det(A) \det(R) \\
 \det(N) &= (-1)^k \left(\prod_{i=1}^t \lambda_i \right) \det(A) (-1)^s \\
 \det(N) &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^t \lambda_i \det A
 \end{aligned}$$

□

Corollario 9.33. [EEX45] *In particolare,*

- $\det A = 0$ se e solo se c'è almeno una riga di zeri in N .
- Se $\det A \neq 0$, ovvero se $N = I_n$, abbiamo n pivot $p_1, \dots, p_n$ con $p_i = \frac{1}{\lambda_i}$ e

$$\begin{aligned}
 \det(N) &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^t \lambda_i \det A \\
 1 = \det I_n &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^n \lambda_i \det A
 \end{aligned}$$

da cui

$$\det A = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^n p_i$$

Corollario 9.34. [EEY47] *Una matrice quadrata ha inversa destra se e solo ha determinante non nullo.*

Dimostrazione. Immediata dal corollario precedente.

□

Proposizione 9.35. [EEN99] *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.*

Dimostrazione.

- Abbiamo che $\det A \neq 0$ se e solo se A ha inversa destra.
- Dimostriamo che $\det A \neq 0$ se e solo se A ha inversa sinistra.

Infatti

$$\begin{aligned}
 A \text{ ha inversa sinistra} &\Leftrightarrow X \cdot A = I_n \text{ per opportuna } X \\
 &\Leftrightarrow (X \cdot A)^T = (I_n)^T \\
 &\Leftrightarrow A^T \cdot X^T = I_n \\
 &\Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \det(A^T) = \det(A) \neq 0
 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che A ha inversa destra e sinistra se e solo se $\det A \neq 0$, quindi per la Proposizione 7.43, A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. $\square$

Definizione 9.36. [EEK46] *Una matrice quadrata si dice singolare se ha il determinante nullo.*

Osservazione 9.37. [EEY46] *Per il corollario precedente, per una matrice quadrata essere invertibile è equivalente ad essere non singolare.*

Corollario 9.38. [EEE70] *Se la matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è invertibile abbiamo*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Binet. Da $A^{-1}A = I_n$ Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}A) &= \det(I_n) \\ \det(A^{-1}) \det(A) &= 1 \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \end{aligned}$$

 $\square$

Corollario 9.39 (Trasposta e inversa). [EEQ17] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora A invertibile se e solo se A^T invertibile, ed abbiamo*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Dimostrazione. Che A sia invertibile se e solo se A^T è invertibile segue immediatamente da $\det(A^T) = \det A$ e dalla Proposizione 9.35 precedente.

Per la seconda parte

$$A^{-1}A = I_n \Leftrightarrow (A^{-1}A)^T = I_n \Leftrightarrow A^T (A^{-1})^T = I_n$$

quindi $(A^{-1})^T$ è inversa destra, quindi inversa di A^T , e quindi $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. $\square$

Corollario 9.40 (Righe/colonne uguali). [EEE75] *Una matrice A con due righe (o colonne) uguali ha determinante nullo.*

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, supponiamo che la prima e seconda riga siano uguali. Appliciamo un'operazione di Gauss che lascia invariato il determinante

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad II^a - I^a = 0$$

dato che la matrice ha una riga nulla. Analogamente per le colonne. $\square$

Un esempio completo di calcolo del determinante

Esempio 9.41. [EEE83]

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} &= 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad I^a \rightarrow 1/5 \cdot I^a \\
 &= 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad II^a \rightarrow II^a - 3 \cdot I^a \\
 &\quad \text{Sviluppo per la seconda riga} \\
 &= -10 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= -10 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad III^a \rightarrow III^a - 2 \cdot I^a \\
 &\quad \text{Sviluppo per la terza riga} \\
 &= 10 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
 &\quad \text{calcolo a parte questo determinante} \\
 &= 10 \cdot (-7) = -70
 \end{aligned}$$

9.3 Determinante e lineare indipendenza

Proposizione 9.42. [EEEX46] *Le righe e le colonne di una matrice quadrata sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice è non singolare.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di lineare indipendenza e dalla caratterizzazione dell'invertibilità data dal Teorema 7.50.

Infatti per $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ $\det A \neq 0$ se e solo se A è invertibile se e solo se il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha un'unica soluzione se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti. Per le righe, si ripete il ragionamento precedente con A^T , che è non singolare perché A è non singolare. □

Esempio 9.43. [FFQ81] *I vettori $(1, 2, 0)$, $(4, 2, 0)$, $(4, 4, 5)$ sono linearmente indipendenti? Sì, dato che*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 5(-6) = -30 \neq 0$$

Sviluppando per la terza colonna

Osservazione 9.44. [FFF25] Vediamo il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice 3×3 con i vari metodi. Il costo di una divisione viene calcolato uguale a quello di una moltiplicazione. Il costo di una somma viene ritenuto irrilevante rispetto al costo di una moltiplicazione.

- Calcolare il determinante di una matrice 3×3 con la regola del Sarrus richiede 12 moltiplicazioni.
- Calcolare il determinante di una matrice 3×3 con lo sviluppo di Laplace richiede 9 moltiplicazioni.
- Calcolare il determinante di una matrice 3×3 con riduzione a scala mediante Gauss richiede 8 moltiplicazioni.

Si vede immediatamente che il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ con lo sviluppo di Laplace è molto alto.

Mediante sviluppo di Laplace

- Matrice 4×4 : quattro determinanti di matrici 3×3 e quattro moltiplicazioni: $4(9) + 4 = 40$ moltiplicazioni.
- Matrice 5×5 : cinque determinanti di matrici 4×4 e cinque moltiplicazioni: $5(40) + 5 = 205$ moltiplicazioni.
- Matrice 6×6 : sei determinanti di matrici 5×5 e sei moltiplicazioni: $6(205) + 6 = 1236$ moltiplicazioni.

Esercizio 9.45. [FFW25] Determinare il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante sviluppi di Laplace.

Esercizio 9.46. [FFQ25] Determinare il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante riduzione a scala.

Osservazione 9.47. [HHH61] Notiamo che il determinante della matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

che è 4, è uguale al prodotto dei determinati dei singoli blocchi

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 = 4$$

Proposizione 9.48. [HHH71] Data la matrice quadrata

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

con matrici A, B, C di dimensioni opportune abbiamo che

$$\det M = \det A \cdot \det C$$

Dimostrazione. Lasciata come esercizio. Hint: operare una riduzione di Gauss

□

Capitolo 10

Decima lezione - Esercizi

10.1 Esercizi svolti

Esempio 10.1. [EEZ32] Effettuiamo l'operazione $A_3 \rightarrow 2A_3 - 5A_4$ (operiamo sulle righe di A) sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I^a \\ II^a \\ 2 \cdot III^a - 5 \cdot IV^a \\ IV^a \end{matrix}$$

Questo equivale alla moltiplicazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice per cui moltiplichiamo $A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ a sinistra può essere scritta come

$$[e_1, e_2, 2e_3 - 5e_4, e_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il risultato come

$$[A_1, A_2, 2A_3 - 5A_4, A_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 10.2. [EEZ37] Effettuiamo l'operazione $A^3 \rightarrow 3A^3 + 7A^2$ (operiamo sulle colonne di A) sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$3A^3 + 7A^2 = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Questo equivale alla moltiplicazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 2 & 20 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice per cui moltiplichiamo $A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ a destra può essere scritta come

$$[\underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_3 + 7\underline{e}_2, \underline{e}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il risultato come

$$[A^1, A^2, 3A^3 + 7A^2, A^4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 2 & 20 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 10.3. [EEE49]

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [0,1,0],
        [1,1,1]]);
```

```
Inverse(A);
Mat[[-1/2, -1/2, 3/2],
     [ 0,    1,    0],
     [1/2, -1/2, -1/2] ]
```

```
Transposed(Inverse(A));
Mat[[-1/2, 0, 1/2],
     [-1/2, 1, -1/2],
     [3/2, 0, -1/2] ]
```

```
Inverse(Transposed(A));
Mat[[-1/2, 0, 1/2],
     [-1/2, 1, -1/2],
     [ 3/2, 0, -1/2]]
```

Corollario 10.4 (Regola del Sarrus). [FFF07] *Segue immediatamente dalla definizione del determinante che, date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad e \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ovvero il determinante di A è la somma del prodotto degli elementi su ogni diagonale meno la somma del prodotto degli elementi su ogni antidiagonale della matrice S , costruita aggiungendo ad A , a destra, la sua prima e seconda colonna.

Esempio 10.5. [FFF09] *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Usando la regola del Sarrus, basta costruire la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 6 = 0$$

La regola del Sarrus è un caso particolare della *Formula di Leibnitz*. La riportiamo qui per completezza, ma non è nel programma del corso.

Proposizione 10.6 (Formula di Leibnitz). [FFA25] *Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

dove S_n è l'insieme delle permutazioni di n oggetti, $\sigma(i)$ la permutazione dell' i -esimo oggetto e

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Una permutazione σ è detta *pari* o *dispari* a seconda che sia ottenibile come prodotto di un numero pari o dispari di trasposizioni, ovvero permutazioni che si limitino a scambiare tra loro due elementi.

Il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante la formula di Leibnitz è di $n!(n-1)$ moltiplicazioni. Questa regola ha quindi scarsa utilità pratica per matrici di ordine grande.

Esercizio 10.7. [B27] *Calcolare il determinante di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

Soluzione.

```
M:=Mat([[1, -1, 1, 1],
        [1, -1, -1, -1],
        [1, 1, -1, -1],
        [1, 1, 1, -1]]);
```

```
RiduciScalaVerbose(M);
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
```

```
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [1, -1, 1, 1]
      2^a-(1)*1^a [0, 0, -2, -2]
      3^a-(1)*1^a [0, 2, -2, -2]
      4^a-(1)*1^a [0, 2, 0, -2]
```

```
Scambio la 2^a e la 3^a riga - e mi segno di averlo fatto.
```

```
Adesso la matrice e'
```

```
Mat([[1, -1, 1, 1],
     [0, 2, -2, -2],
     [0, 0, -2, -2],
     [0, 2, 0, -2]])
```

```
Divido la seconda, terza e quarta riga per due - e mi segno di averlo fatto.
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
```

```
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [1, -1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, -1]
      0 sotto pivot [0, 0, -1, -1]
      4^a-(1)*2^a [0, 0, 1, 0]
```

Non è necessario arrivare fino alla completa riduzione a scala, si tratta di una matrice B 4×4 a blocchi 2×2 , e quindi il suo determinante è uguale a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

Abbiamo fatto uno scambio di riga ed abbiamo diviso tre righe per 2 e quindi

$$\det A = (-1)^1 \cdot 2^3 \cdot \det B = -8$$

□

Esercizio 10.8. [esercitazione21] Data l'equazione matriciale $XA = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

Dopo aver determinato le dimensioni della matrice X , dire se il sistema ha una unica soluzione e in caso affermativo, esplicitare la matrice X .

Soluzione. Abbiamo il sistema $XA = B$ con le matrici A di dimensione 3×3 e B di dimensione 2×3 . Supponiamo che la matrice X abbia dimensione $p \times q$ quindi per la definizione della moltiplicazione di matrici le dimensioni di XA devono essere $p \times 3 = 2 \times 3$. Quindi le dimensioni di X sono 2×3 .

Per rispondere alla seconda domanda, se A è invertibile, riscriviamo il sistema come segue:

$$XA = B \implies XAA^{-1} = BA^{-1} \implies X = BA^{-1}$$

Quindi calcoliamo il determinante di A ; se è diverso da 0 sappiamo che A è invertibile. Calcoliamo il determinante di A :

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+ 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1 + 2) - 1 \cdot (-1 - 6) + 3 \cdot (-1 - 3) = -3 \neq 0\end{aligned}$$

Pertanto A è invertibile e il sistema ha un'unica soluzione $X = BA^{-1}$.

Per determinare la matrice X calcoliamo innanzitutto l'inversa di A col metodo dell'identità:

```
A1:=Mat[[2, 1, 3, 1,0,0],
        [1, 1, 2, 0,1,0],
        [3, -1, -1, 0,0,1]];
L:=RiduciScalaVerbose(A1);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, 3, 1, 0, 0]
2^a-1/2*1^a [0, 1/2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a-3/2*1^a [0, -5/2, -11/2, -3/2, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, 3, 1, 0, 0]
----- [0, 1/2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+5*2^a [0, 0, -3, -4, 5, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-3
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a*+1/2 [1, 1/2, 3/2, 1/2, 0, 0]
2^a*+2 [0, 1, 1, -1, 2, 0]
3^a*-1/3 [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
Cancello la colonna sopra il 3pivot
1^a-3/2*3^a [1, 1/2, 0, -3/2, 5/2, 1/2]
2^a-1*3^a [0, 1, 0, -7/3, 11/3, 1/3]
----- [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
Cancello la colonna sopra il 2pivot
1^a-1/2*2^a [1, 0, 0, -1/3, 2/3, 1/3]
----- [0, 1, 0, -7/3, 11/3, 1/3]
----- [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
```

Pertanto la matrice inversa è:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto calcoliamo la matrice X :

$$\begin{aligned}
 X = BA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Esercizio 10.9. [esercitazione23] *Determinare il determinante e se possibile l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Procediamo col calcolo mediante l'aggiunta dell'identità, perché ci permette di calcolare determinante e inversa allo stesso tempo. Costruiamo la matrice

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e riduciamola in forma diagonale mediante il procedimento di Gauss.

```

AI3:=Mat[[ 2,  2,  3,  1,0,0],
          [ 1, -1,  2,  0,1,0],
          [-2, -1, -1,  0,0,1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI3);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 2, 3, 1, 0, 0]
2^a-1/2*1^a  [0, -2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+1*1^a  [0, 1, 2, 1, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2,  2,  3,   1,  0, 0]
----- [0, -2, 1/2, -1/2,   1, 0]
3^a+1/2*2^a  [0,  0, 9/4,  3/4, 1/2, 1]

```

Il determinante è il prodotto dei pivot $\det A = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{9}{4} = -9$ pertanto possiamo calcolare l'inversa:

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a**1/2  [1, 1, 3/2, 1/2, 0, 0]
2^a*-1/2  [0, 1, -1/4, 1/4, -1/2, 0]
3^a**4/9  [0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]

```

```

Cancello la colonna sopra il 3pivot
1^a-3/2*3^a  [1, 1, 0, 0, -1/3, -2/3]
2^a+1/4*3^a  [0, 1, 0, 1/3, -4/9, 1/9]
-----[0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
1^a-1*2^a      [1, 0, 0, -1/3, 1/9, -7/9]
-----[0, 1, 0, 1/3, -4/9, 1/9]
-----[0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]

```

Quindi la matrice inversa è :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

□

Esempio 10.10. [FFF71] Calcolare al variare di $a, b \in \mathbb{K}$ il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ 1 & b+2 & a+b \\ a-b & a+b & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$$

Scambio la prima e seconda riga perché voglio procedere con Gauss. Mi segno che ho effettuato uno scambio di righe, dovrò cambiare segno al determinante che trovo. Riduco con Gauss la prima colonna.

```

Use R:=Q[a,b];
A:=Mat([[1,b+2,a+b],
        [a+1,a,1],
        [a-b,a+b,a]]);
RiduciScalaVerbose(A); -- Cancello solo la prima colonna sotto a_11
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-----[1, b + 2, a + b]
2^a-a - 1*1^a [0, -ab - a - b - 2, -a^2 - ab - a - b + 1]
3^a-a + b*1^a [0, -ab + b^2 - a + 3b, -a^2 + b^2 + a]

```

Sviluppo quindi con Laplace, per la prima colonna

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} -ab - a - b - 2 & -a^2 - ab - a - b + 1 \\ -ab + b^2 - a + 3b & -a^2 + b^2 + a \end{pmatrix} = a^2b + 2ab^2 + 2ab - a - 3b$$

Quindi

$$\det(A) = -(a^2b + 2ab^2 + 2ab - a - 3b) = -a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b$$

Esercizio 10.11. [FFQ05] La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo (facile verifica, ma lo vederemo riducendola). Vediamo che le sue colonne

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 4) \quad \underline{v}_2 = (1, 2, 5) \quad \underline{v}_3 = (1, 3, 6)$$

sono linearmente dipendenti. Vogliamo determinare dei coefficienti α, β, γ di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficienti che danno una loro combinazione lineare nulla).

Per definizione di dipendenza lineare basta determinare le soluzioni del il sistema lineare omogeneo

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha(1, 1, 4) + \beta(1, 2, 5) + \gamma(1, 3, 6) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Risolviamo con Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1],
        [1,2,3],
        [4,5,6]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 1, 2]
      3^a-4*1^a [0, 1, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1]
----- [0, 1, 2]
      3^a-1*2^a [0, 0, 0]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1]
----- [0, 1, 2]
----- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-1*2^a [1, 0, -1]
----- [0, 1, 2]
----- [0, 0, 0]
```

Ricordiamo che questa matrice è associata al sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

L'esistenza della riga nulla nella riduzione ci conferma che le colonne (e le righe) di A sono linearmente dipendenti. Abbiamo che le soluzioni del sistema sono $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$, o se preferiamo $\{(\gamma, -2\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. le soluzioni sono

$$\gamma v_1 - 2\gamma v_2 + \gamma v_3 = 0 \quad \gamma \neq 0$$

Una relazione di dipendenza lineare tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ è quindi data da

$$\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0$$

Dato che tutti i coefficienti della relazione sono non nulli, potremmo esprimere ogni vettore in funzione degli altri due; otterremmo

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3 \\ \underline{v}_2 &= \frac{1}{2}\underline{v}_2 + \frac{1}{2}\underline{v}_3 \\ \underline{v}_3 &= \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2\end{aligned}$$

10.2 Tag variable Gauss

Proposizione 10.12 (Tag variable Gauss). [FFF11] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matrice di righe $A_1, \dots, A_m$, $v_1, \dots, v_m$ variabili, B la matrice

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \underline{w}_1 & p_1(v_1, \dots, v_m) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{w}_m & p_m(v_1, \dots, v_m) \end{array} \right)$$

con $p_i(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{K}[v_1, \dots, v_m]$ polinomio omogeneo di grado 1 tale che per ogni $i : 1, \dots, m$

$$B_i = (\underline{w}_i, p_i(v_1, \dots, v_m)) \text{ e } p_i(A_1, \dots, A_m) = \underline{w}_i \in \mathbb{K}^n$$

ed S ottenuta da B con uno scambio di riga o un'operazione $S_j = B_j + \lambda B_i$

Allora ogni riga S_i di S , con $i : 1, \dots, m$, si può scrivere nella forma

$$S_i = (\underline{w}'_i, p'_i(v_1, \dots, v_m)) \quad (10.1)$$

con $p'_i(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{K}[v_1, \dots, v_m]$ polinomio omogeneo di grado 1 tale che

$$p'_i(A_1, \dots, A_m) = \underline{w}'_i \in \mathbb{K}^n \quad (10.2)$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Corollario 10.13. [FFQ21] Dato che abbiamo dimostrato questa proprietà per un passo di riduzione di Gauss (scambio riga o riduzione), e che vale per il caso iniziale

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_m & v_m \end{array} \right)$$

(è un caso particolare della dimostrazione precedente), la tesi vale per S risultato di una riduzione a scala di B come sopra, ovvero se B si riduce ad S a scala.

Esempio 10.14. [FFX20] Determinare le relazioni lineari tra i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 2), \underline{v}_2 = (1, 1, 0, 3), \underline{v}_3 = (3, 4, 3, 8), \underline{v}_4 = (-1, 1, 6, -5),$$

Mettiamo i vettori per riga in una matrice, aggiungiamo una colonna di variabili tag e riduciamo.

```

Use R:=Q[v[1..4]];
M:=Mat([[ 1, 2, 3, 2,v[1]],
         [ 1, 1, 0, 3,v[2]],
         [ 3, 4, 3, 8,v[3]],
         [-1, 1, 6,-5,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2, v[1]]
      2^a-1*1^a [0, -1, -3, 1, -v[1] + v[2]]
      3^a-3*1^a [0, -2, -6, 2, -3v[1] + v[3]]
      4^a+1*1^a [0, 3, 9, -3, v[1] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2, v[1]]
----- [0, -1, -3, 1, -v[1] + v[2]]
      3^a-2*2^a [0, 0, 0, 0, -v[1] - 2v[2] + v[3]]
      4^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[4]]

```

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, gli altri due sono combinazioni lineari dei primi due e si esplicitano dalle relazioni lineari trovate

$$\begin{aligned}
 -v[1] - 2v[2] + v[3] &= 0 \Rightarrow v[3] = v[1] + 2v[2] \\
 -2v[1] + 3v[2] + v[4] &= 0 \Rightarrow v[4] = 2v[1] - 3v[2]
 \end{aligned}$$

Esempio 10.15. [FFF10] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ vogliamo vedere se le sue righe sono linearmente

indipendenti, ed in caso contrario vogliamo determinare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficienti che danno una loro combinazione lineare nulla).

Denominiamo le righe di A come $v_1, \dots, v_4$.

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & v_1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & v_2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & v_3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & v_4 \end{array} \right)$$

All'inizio ogni riga di S è uguale a se stessa. Operiamo una riduzione di Gauss fino ad ottenere una forma triangolare superiore per A .

```

Use R:=Q[v[1..4]];
S:=Mat([[1,1,3,1,v[1]],
        [1,1,1,2,v[2]],
        [1,3,1,2,v[3]],
        [4,3,2,2,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(S);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, v[1]]
      2^a-1*1^a [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]

```

```

3^a-1*1^a [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
4^a-4*1^a [0, -1, -10, -2, -4v[1] + v[4]]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 3, 1, v[1]],
     [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]],
     [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]],
     [0, -1, -10, -2, -4v[1] + v[4]]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, v[1]]
----- [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
0 sotto pivot[0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
4^a+1/2*2^a [0, 0, -11, -3/2, -9/2v[1] + 1/2v[3] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, v[1]]
----- [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
----- [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
4^a-11/2*3^a [0, 0, 0, -7, v[1] - 11/2v[2] + 1/2v[3] + v[4]]

```

La matrice A ha quindi determinante $1 \cdot 2 \cdot -2 \cdot -7 = 28 \neq 0$, l'unica soluzione è quella nulla e le sue righe quindi sono linearmente indipendenti. Gli elementi dell'ultima colonna continuano dare i coefficienti di una combinazione lineare, ma mai di una relazione di dipendenza lineare tra le righe di A . Per esempio

$$\begin{aligned}
 -\frac{9}{2} \underline{v}_1 + \frac{1}{2} \underline{v}_3 + \underline{v}_4 &= (0, 0, -11) \\
 -\frac{9}{2} (1, 1, 3) + \frac{1}{2} (1, 3, 1) + (4, 3, 2) &= (0, 0, -11)
 \end{aligned}$$

10.3 Esercizi proposti

Esercizio 10.16. [FFW73] Dato $a, b, c \in \mathbb{R}$ discutere l'invertibilità e calcolare quando possibile l'inversa delle matrici

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 3 & b \end{pmatrix}$ Sol $\exists A^{-1}$ se e solo se $-3ab + 6b \neq 0$. In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{-3ab + 6b} \begin{pmatrix} -3b & 3b & 0 \\ -2b & ab & -ab + 2b \\ 6 & -3a & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2a+6 & 3b+1 & 3c \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ La matrice non è invertibile per nessun valore di a, b, c .

3. $A = \begin{pmatrix} a & 3b & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ Sol: $\exists A^{-1}$ se e solo se $-6abc + ac \neq 0$. In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{-6abc + ac} \begin{pmatrix} c & -3bc & 0 \\ -2ac & ac & 0 \\ 2ab - 2 & -ab + 5b & -6ab + a \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & b \\ a & 0 & a+1 & b \\ b & b & a & b \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sol $\exists A^{-1}$ se e solo se $ab \neq 0$. In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ab^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b^2 \\ -ab & 0 & ab & ab - b^2 \\ -ab^2 & ab^2 & 0 & 0 \\ a^2b + ab & -a^2b & 0 & -ab \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.17. [DDR53] Abbiamo la matrice $A, A' \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, con la matrice A' identica alla matrice A tranne che per avere le sue righe i, j scambiate.

1. Se $\det A \neq 0$, allora l'equazione $X \cdot A = A'$ ha come unica soluzione $X = S_n^{ij}$.
2. Se $\det A = 0$, allora l'equazione $X \cdot A = A'$ ha infinite soluzioni, tra cui $X = S_n^{ij}$.

Esercizio 10.18. [EEA33] Calcolare se possibile i determinanti delle seguenti matrici

•

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 8 \\ 12 & 21 & 32 & 21 \end{pmatrix} \quad [\text{Sol: } 0]$$

• Con lo sviluppo di Laplace

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{Sol: } 57]$$

• mediante riduzione a triangolare superiore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{Sol: } 57]$$

•

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{Impossibile}]$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad [\text{Sol: } 6]$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{Sol: } -42]$$

Esercizio 10.19. [EEA13] *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3454 \\ 10^3 & 23 \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(B^T \cdot (A^5 \cdot B^T)^{-1} \cdot A^7)$ [Sol: 289]**Esercizio 10.20.** [EEA00] *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *calcolare* $\det((A + I_2) \cdot (A - I_2))$ *Sol:* 0.**Esercizio 10.21.** [EEA02] *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} e^{1/3i\pi} & 1 \\ i & e^{2/3i\pi} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 2i \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(A \cdot B)$. *Sol:* $1 + i$.**Esercizio 10.22.** [LL96] *Risolvere l'equazione matriciale* $CX = D$ *dove*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{17}{6} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.23. [LLX96] *Risolvere l'equazione matriciale* $XC = D$ *dove*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.24. [EEE87] *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 20 & 20 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 20 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *calcolare* $\det(5 \cdot A)$ [Sol: $\det(A) = 300$, $\det(5 \cdot A) = 187500$]

Esercizio 10.25. [EEA14] *Determinare i valori di $k \in \mathbb{K}$ per cui è nullo il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & k \\ k & 2 & k \\ k & k & 2 \end{pmatrix}$$

[Sol: $k = -1, 2$]

Esercizio 10.26. [EEA03] *Determinare i valori di $k \in \mathbb{Q}$ per cui è nullo il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 5 \\ 5k & k & 5 \end{pmatrix}$$

[Sol: $\emptyset$]

Esercizio 10.27. [EEA15] *Determinare il numero di valori $k \in \mathbb{C}$ per cui è nullo il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 5 \\ 5k & k & 5 \end{pmatrix}$$

[Sol: 3]

Esercizio 10.28. [EEA16] *Determinare il numero di valori $k \in \mathbb{C}$ per cui il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} k+9 & -6 & 2 \\ 22 & k-14 & 4 \\ 11 & -6 & k \end{pmatrix}$$

è nullo

[Sol: 2]

Capitolo 11

Undicesima lezione - Rango

11.1 Rango di una matrice

Problema 11.1. [EEH46] *Se una matrice quadrata ha determinante nullo, possiamo dire quante tra le sue righe e colonne sono linearmente indipendenti e quali?*

Problema 11.2. [FFF22] *Se riduco una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ in forma a scala, standard o normale S , le righe e colonne della matrice S che corrispondono ai pivot sono chiaramente linearmente indipendenti. Anche le corrispondenti righe e colonne della matrice A sono linearmente indipendenti?*

Problema 11.3. [FFF40] *Data una matrice quadrata A di ordine n e una sua riduzione a scala S , con esattamente n pivot. Il prodotto dei pivot non dipende dalla particolare riduzione attuata, dato che è uguale al determinante. Anche il numero dei pivot è indipendente dalla particolare riduzione effettuata?*

Problema 11.4. [FFF33] *Una matrice quadrata può avere determinante nullo. Tra tutte le matrici con determinante nullo, possiamo dare una distanza da essere la matrice nulla?. Possiamo dire che le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sono più vicine alla matrice nulla delle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?*

Problema 11.5. [FFF26] *Per una matrice quadrata abbiamo il determinante. Possiamo generalizzare a matrici non quadrate?*

La risposta a questi problemi sta nel concetto di rango di una matrice. Servirà questa

Definizione 11.6. [EEE84] *Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$, $1 \leq p \leq \min(n, m)$ e due insiemi di interi distinti $\{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$, $\{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m\}$ definiamo sottomatrice di indici $\{i_1, \dots, i_p\}$, $\{j_1, \dots, j_p\}$ di A , e scriviamo $A_{(i_1, \dots, i_p); (j_1, \dots, j_p)}$ la matrice quadrata appartenente a $\text{Mat}_{p \times p}(\mathbb{K})$ ottenuta da A mediante la cancellazione di tutte le righe all'infuori delle righe $i_1, \dots, i_p$ e di tutte le colonne all'infuori delle colonne $j_1, \dots, j_p$.*

Esercizio 11.7. [EEB84] *Generalizzare la definizione di sottomatrice ad una sottomatrice rettangolare.*

Esempio 11.8. [EEE62]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ allora } A_{(1,3);(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A_{(2);(2,4)} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Definizione 11.9 (Rango di una matrice). [FFF27] *Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tale che*

1. Esiste una sottomatrice quadrata di ordine r non singolare.
2. Tutte le sue sottomatrici quadrate di ordine $> r$ sono singolari.

Allora diciamo che la matrice A ha rango r e scriviamo $rk(A) = r$

Osservazione 11.10. [FFF32] Se $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $0 \leq rk(A) \leq \min(m, n)$. Si ha $rk(A) = 0$ se e solo se tutte le entrate della matrice A sono nulle.

Esempio 11.11. [FFF31] il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è 2 dato che A è non singolare.

Esempio 11.12. [FFF28] Il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

non può essere 3 dato che $\det(A) = 0$. È almeno 1 dato che esiste una entrata non nulla. Dato che

$$\det(A_{1,2;1,2}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

abbiamo che $rk(A) = 2$.

11.2 Rango e matrici a scala

Il rango ed il numero di righe e colonne linearmente indipendenti sono particolarmente semplici da determinare per una matrice a scala, e sono uguali al numero di pivot.

Proposizione 11.13. [FFQ11] Sia $S \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala con esattamente r pivot, in posizione $(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)$. Allora

1. $rk(S) = r$.
2. Il numero di righe linearmente indipendenti è r ; le righe con i pivot sono linearmente indipendenti.
3. Il numero di colonne linearmente indipendenti è r ; le colonne coi pivot sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Immediata dalla struttura della matrice a scala e dalle definizioni. Le righe e le colonne indipendenti sono quelle coi pivot, e la sottomatrice non singolare di ordine massimo è quella che raggruppa le righe e le colonne dei pivot.

1. La sottomatrice $S_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$, quadrata, di ordine r , è triangolare superiore, con r pivot per costruzione. È quindi non singolare. Ogni sottomatrice quadrata di ordine maggiore di r include righe nulle, e quindi è singolare. Quindi $rk(S) = r$.
2. Le righe non nulle di S sono $S_1, \dots, S_r$. Ciascuna, per esempio S_k , ha tutte le componenti nulle prima della componente del pivot j_k . Grazie a questa proprietà, il sistema omogeneo

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i S_{i_k} = \underline{0}$$

che ha r equazioni ed r incognite, è triangolare superiore con r pivot. Ha quindi un'unica soluzione, quella nulla e le righe $S_1, \dots, S_r$ sono linearmente indipendenti.

3. La dimostrazione per le colonne è analoga a quella per le righe.

□

Esempio 11.14. [FFQ12] *Data la matrice*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le posizioni dei pivot sono $(1, 2), (2, 4), (3, 6)$. Si vede facilmente che le righe 1, 2, 3 sono linearmente indipendenti, e non ce ne sono altre, le colonne 2, 4, 6 sono linearmente indipendenti, e non ce ne sono altre. Dato che la matrice

$$S_{(1,2,3);(2,4,6)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

è non singolare, ed ogni matrice quadrata di ordine maggiore di 3 contiene forzosamente una riga nulla, e ha quindi determinante nullo, $rk(S) = 3$

Calcolo del rango con la definizione - semplificazioni

Un primo passo è la seguente

Proposizione 11.15. [FFF30] *Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tale che*

1. *Esiste una sottomatrice quadrata di ordine r di A non singolare.*
2. *Tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r + 1$ di A sono singolari.*

Allora $rk(A) = r$.

Idea della dimostrazione. Le sottomatrici di ordine $r + 1$ sono singolari per ipotesi. Sia S una sottomatrice di ordine s , $s > r + 1$. Vogliamo dimostrare che $\det(S) = 0$. Sviluppando il determinante di S con Laplace abbiamo una combinazione lineare di determinanti di matrici di ordine $s - 1$, i cui determinanti, sempre sviluppando con Laplace, sono combinazioni lineari di determinanti di sottomatrici di ordine via via minore, $s - 2, \dots, r + 1$. Quando arriviamo alle sottomatrici di ordine $r + 1$, queste sono tutte singolari, e quindi il determinante di S è zero.

Per esercizio: formalizzare con una dimostrazione per induzione.

□

Teorema 11.16 (Orlati). [FFF43] *Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ una sua sottomatrice non singolare di ordine r . Allora $rk(A) = r$ se e solo se tutte le sottomatrici*

$$A_{(i_1, \dots, i_r, i_{r+1}); (j_1, \dots, j_r, j_{r+1})}$$

sono singolari.

Si tratta delle sottomatrici quadrate ottenute "orlando" $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ con una riga ed una colonna.

Non fatta a lezione e non richiesta.

- Se $rk(A) = r$ allora per definizione tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r + 1$ sono singolari, comprese le matrici ottenute orlando $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$.

- Abbiamo che tutte le sottomatrici ottenute orlando $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ sono singolari. Vogliamo dimostrare che $rk(A) = r$. Per la Proposizione 11.15, basta dimostrare che tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r + 1$ sono singolari.

Vogliamo dimostrare che ogni sottomatrice quadrata $A_{(i'_1, \dots, i'_{r+1}); (j'_1, \dots, j'_{r+1})}$ di ordine $r + 1$ è singolare.

Cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\beta_1 A_{i'_1} + \dots + \beta_{r+1} A_{i'_{r+1}} = \underline{0}$$

Claim: Ogni riga di $A_{(i'_1, \dots, i'_{r+1}); (j'_1, \dots, j'_{r+1})}$ è combinazione lineare delle righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$

Quindi

$$\begin{array}{rcl} A_{i'_1} & = & \alpha_{11} A_{i_1} + \dots + \alpha_{1r} A_{i_r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i'_{r+1}} & = & \alpha_{r+11} A_{i_1} + \dots + \alpha_{r+1r} A_{i_r} \end{array}$$

con parametri $\underline{\alpha}$. Sostituendo ogni $A_{i'_j}$ con la sua rappresentazione mediante $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ otteniamo il sistema

$$\beta_1(\alpha_{11} A_{i_1} + \dots + \alpha_{1r} A_{i_r}) + \dots + \beta_{r+1}(\alpha_{r+11} A_{i_1} + \dots + \alpha_{r+1r} A_{i_r}) = \underline{0}$$

e raggruppando le righe otteniamo

$$(\beta_1 \alpha_{11} + \dots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,1}) A_{i_1} + \dots + (\beta_1 \alpha_{1r} + \dots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,r}) A_{i_r} = \underline{0}$$

Dato che $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} (\beta_1 \alpha_{11} + \dots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,1}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ (\beta_1 \alpha_{1r} + \dots + \beta_{r+1} \alpha_{r+1,r}) & = & 0 \end{array}$$

e questo è un sistema omogeneo con $r + 1$ incognite $\beta_1, \dots, \beta_{r+1}$ ed r equazioni, che quindi ha infinite soluzioni, e non solo $\underline{\beta} = \underline{0}$.

Dimostrazione del Claim: Ogni riga di $A_{(i'_1, \dots, i'_{r+1}); (j'_1, \dots, j'_{r+1})}$ è combinazione lineare delle righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$.

Prendiamo una riga di indice i con $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$, una colonna di indice $j \in \{j_1, \dots, j_r\}$ ed orliamo la matrice $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ con esse, ottenendo la matrice quadrata $A_{(i_1, \dots, i_r, i); (j_1, \dots, j_r, j)}$. Questa matrice è ottenuta orlando $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ e quindi è singolare.

La riga A_i è quindi combinazione lineare delle righe $i_1, \dots, i_r$. Abbiamo dimostrato che ogni riga di A è combinazione lineare delle righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$.

□

Richiamo 11.17. [FFP44] *La riduzione a scala di una matrice quadrata non singolare di ordine n ha n pivot, e quindi tutti gli scalini sono di altezza 1 e non ci sono righe nulle, la matrice ridotta è triangolare superiore.*

Richiamo 11.18. [FFP45] *Dati i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^m$, il sistema lineare omogeneo*

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

si scrive in notazione matriciale come

$$\left[\begin{array}{ccc|c} | & \dots & | & \\ \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n & \underline{\alpha} \\ | & \dots & | & \end{array} \right] \underline{\alpha} = \underline{0}$$

Ovvero i vettori sono le colonne della matrice associata.

Esempio 11.19. [FFP58] *Il sistema lineare omogeneo*

$$\alpha_1(1, 1, 1, 1) + \alpha_2(1, 2, 3, 4) + \alpha_3(0, 2, 0, 4) = \underline{0}$$

si scrive in notazione matriciale come

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Vogliamo ridurre il calcolo del rango di una matrice generica ad il calcolo del rango di una matrice a scala.

Osservazione 11.20. [FFY44] *Uno scambio di riga per una matrice A non cambia il numero di righe linearmente indipendenti e, a meno dell'indice della riga scambiata, neppure la lineare indipendenze di un sottoinsieme di righe.*

Proposizione 11.21. [FFW44] *Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e S la matrice ottenuta un passo di riduzione di Gauss $A_j \rightarrow A_j + \lambda A_i$, ovvero $S_j = A_j + \lambda A_i$. Allora le righe $A_1, \dots, A_r$ sono linearmente indipendenti se e solo se le righe $S_1, \dots, S_r$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione.

- " $\Rightarrow$ ": proviamo che se le righe $A_1, \dots, A_r$ sono linearmente indipendenti, le righe $S_1, \dots, S_r$ sono linearmente indipendenti. Dobbiamo dimostrare che $\sum_{k=1}^r \alpha_k S_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k S_k = \underline{0}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \alpha_k S_k + \alpha_i S_i + \alpha_j S_j = \underline{0}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \alpha_k A_k + \alpha_i A_i + \alpha_j (A_j + \lambda A_i) = \underline{0}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \alpha_k A_k + \alpha_j A_j + (\alpha_i + \alpha_j \lambda) A_i = \underline{0}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \alpha_k A_k + (\alpha_i + \alpha_j \lambda) A_i = \underline{0}$$

Per la lineare indipendenza degli A_k , otteniamo che tutti i coefficienti di questa combinazione lineare sono nulli, quindi $\alpha_k = 0$ per $k \neq i$ e

$$\alpha_i + \alpha_j \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \text{ricordiamo che } j \neq i \Rightarrow \alpha_j = 0$$

e quindi $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e la tesi.

- "⇐": procedimento analogo, sfruttando sempre la relazione $S_j = A_j + \lambda A_i$.

□

Questa proposizione ha diversi utili corollari.

Corollario 11.22. [FFW66] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e S la sua riduzione a scala. Allora il numero di righe linearmente indipendenti di A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti di S .

Proposizione 11.23. [FFQ66] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ed S una sua riduzione di Gauss senza scambi di riga che coinvolgano le righe di indice maggiore od uguale ad i . Allora se $S_i = \underline{0}$ se e solo se le righe $A_1, \dots, A_i$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Lasciato per esercizio. Hint: usare induzione sul numero di operazioni di Gauss che non siano scambi di riga. Considerare il coefficiente di A_i . □

Possiamo determinare anche quali righe/colonne di A sono linearmente indipendenti considerando una riduzione a scala di A .

Proposizione 11.24. [FFQ03] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala. Se le posizioni dei pivot di S sono $(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)$

1. le righe di indice $i_1, \dots, i_r$ (considerando gli scambi di riga) sono linearmente indipendenti. Le righe che non hanno pivot sono linearmente dipendenti da quelle che lo hanno.
2. Le colonne di indice $j_1, \dots, j_r$ di A sono linearmente indipendenti. Le colonne che non hanno pivot sono linearmente dipendenti da quelle che lo hanno.

Dimostrazione.

1. Per le righe, dalla Proposizione 11.23, una riga di A è linearmente indipendente dalle precedenti (considerati gli scambi di riga) se e solo se ha un pivot.

Chiaramente non ci possono essere più di r righe linearmente indipendenti, dato che dopo la riga che contiene il r -esimo pivot tutte le righe di S sono nulle e si applica la Proposizione 11.23.

2. Per le colonne: dimostriamo che le colonne $A^{i_1}, \dots, A^{i_r}$ sono linearmente indipendenti, ovvero che il sistema lineare

$$\alpha_1 A^{i_1} + \dots + \alpha_r A^{i_r} = \underline{0}$$

ammette solo la soluzione $\underline{\alpha} = \underline{0}$. Possiamo applicare a questo sistema la stessa riduzione di Gauss che ha trasformato A in S , ottenendo il sistema equivalente

$$\alpha_1 S^{i_1} + \dots + \alpha_r S^{i_r} = \underline{0}$$

Ma $S^{i_1}, \dots, S^{i_r}$ sono linearmente indipendenti, e quindi $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e anche $A^{i_1}, \dots, A^{i_r}$ lo sono.

Dimostriamo che una colonna A^k che non contiene un pivot è linearmente dipendente da $A^{i_1}, \dots, A^{i_r}$. Costruiamo analogamente a prima il sistema

$$\alpha_1 A^{i_1} + \dots + \alpha_r A^{i_r} = \alpha_k A^k$$

dove trattiamo α_k come un parametro e A^k come termine noto. Se riduciamo con Gauss la matrice associata, otteniamo

$$[S^{i_1} | \dots | S^{i_r}] \underline{\alpha} = \alpha_k S^k$$

e dato che la matrice $[S^{i_1} | \dots | S^{i_r}]$ è quadrata con r pivot, esiste un'unica soluzione del sistema per ogni α_k , e quindi anche per $\alpha_k = 1$, il che vuol dire che A^k è combinazione lineare di $A^{i_1}, \dots, A^{i_r}$.

□

Possiamo raggruppare quanto dimostrato finora nel teorema

Teorema 11.25. [FFX11] *[Del rango] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala. Allora i numeri seguenti sono uguali*

1. il numero di righe linearmente indipendenti di A , S
2. il numero di colonne linearmente indipendenti di A , S .
3. $\text{rk}(A)$ e $\text{rk}(S)$
4. Il numero di pivot di S

Dimostrazione. Immediata dal discorso precedente.

□

Problema 11.26. [FF032] *Come trovare facilmente righe/colonne linearmente indipendenti in una matrice?*

Proposizione 11.27. [FFW32] *Sia data una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$*

1. *Se A ha r righe linearmente indipendenti $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ esistono r colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ tali che la sottomatrice $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ sia non singolare.*
2. *Se A ha r colonne linearmente indipendenti $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ esistono r righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ tali che la sottomatrice $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ sia non singolare.*
3. *Se A ha una sottomatrice quadrata $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ non singolare, le righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ e le colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ di A sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione.

1. Costruiamo la sottomatrice $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_n)}$; Dato che le righe $i_1, \dots, i_r$ sono linearmente indipendenti, ci sono r pivot. La tesi segue applicando la Proposizione 11.23.
2. Basta considerare la trasposta di A e procedere come sopra.
3. Dimostriamo per le righe, per le colonne possiamo procedere analogamente.

Abbiamo la sottomatrice $B' = A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_r)}$ non singolare. Vogliamo provare che le righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ della matrice A sono linearmente indipendenti. Consideriamo la sottomatrice di A formata dalle stesse righe $i_1, \dots, i_r$ e da tutte le colonne $j_1, \dots, j_n$, $A_{(i_1, \dots, i_r); (j_1, \dots, j_n)}$. Riordiniamo le colonne di questa matrice in modo tale da avere le colonne $j_1, \dots, j_r$ a sinistra delle altre, in quest'ordine, ottenendo la matrice

$$B = [B'|C] \quad \text{per un opportuna matrice } C$$

Questa operazione non cambia le relazioni di dipendenza lineare tra le righe, dato che non cambia il numero di soluzioni del sistema omogeneo associato che usiamo, secondo la definizione, per verificare la lineare indipendenza. Riduciamo la matrice B a scala con Gauss senza effettuare scambi di colonna.

$$[B'|C] \longrightarrow [S|C']$$

Per costruzione, se riduciamo la matrice B' con Gauss otteniamo la stessa matrice S , quadrata, di ordine r e a scala, che è non singolare perché B' è non singolare e ha quindi r pivot. Per la Proposizione 11.24 anche la matrice B ha quindi r pivot e le sue r righe sono linearmente indipendenti.

□

Ricapitolando

Corollario 11.28. [FFQ89] *Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala senza scambi di riga o di colonna. Se le posizioni dei pivot di S sono $(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)$ il rango di A è r e le colonne di A di indice $j_1, \dots, j_r$ e le righe di A di indice $i_1, \dots, i_r$ sono linearmente indipendenti. Se nella riduzione ho effettuato scambi di riga o di colonna, devo ricordarmene quando determino le righe o le colonne linearmente indipendenti.*

Corollario 11.29. [FFU55] *Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e S una sua riduzione a scala.*

1. *Tenendo conto degli scambi di riga, le righe di A non associate ai pivot sono combinazione lineare delle righe di A associate ai pivot, e anche delle righe di S associate ai pivot.*
2. *Le colonne di A non associate ai pivot sono combinazione lineare delle colonne di A associate ai pivot.*
3. *Le colonne di A non associate ai pivot non sono necessariamente combinazione lineare delle colonne di S associate ai pivot.*

Dimostrazione. Immediato per i primi due casi dai teoremi/proposizioni precedenti. Per il terzo, visto che vogliamo dimostrare che non sempre qualcosa accade, basta prendere un controesempio. Prendiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e riduciamola a scala alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo immediatamente che la colonna $(1, 1, 1)$ non può essere combinazione lineare delle colonne $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ dato che $(1, 1, 1)$ ha terza componente non nulla mentre i vettori $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, e quindi ogni loro combinazione lineare, hanno la terza componente nulla. □

Ho due utili strumenti per discutere dell'indipendenza lineare in un insieme di vettori.

Osservazione 11.30. [FFW55] *Posso discutere l'indipendenza lineare dei vettori $v_1, \dots, v_m$ di $\mathbb{K}^n$ considerando le sottomatrici non singolari nella matrice le cui righe sono i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$*

Osservazione 11.31. [FFW27] *Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{K}^n$. Posso vedere quali vettori sono linearmente indipendenti riducendo la matrice le cui righe sono i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$.*

$$\begin{pmatrix} - & \underline{v}_1 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \underline{v}_m & - \end{pmatrix}$$

Le righe che non vengono ridotte a zero mi danno i vettori indipendenti, tenendo conto di eventuali scambi di righe.

Osservazione 11.32. [FFW29] Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^n$. Posso vedere quali vettori sono linearmente indipendenti riducendo la matrice le cui colonne sono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & & \\ & \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n & & \\ & | & & | & & \end{array} \right)$$

Gli indici delle colonne della ridotta senza pivot mi danno gli indici delle colonne di A linearmente dipendenti, e quindi quali tra i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono combinazioni lineari degli altri. Questo può dipendere da scelte arbitrarie - e.g. dalla relazione $\underline{v} + 2\underline{u} = \underline{0}$ posso prendere $\underline{v}$ come combinazione lineare di $\underline{u}$ o viceversa.

Osservazione 11.33. [FFQ09] Notiamo che data una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ed una sua sottomatrice quadrata $A_{(i_1, \dots, i_s); (j_1, \dots, j_s)}$, può succedere che $A_{(i_1, \dots, i_s); (j_1, \dots, j_s)}$ sia singolare ma le righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ e le colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ (in entrambi i casi, della matrice grande) siano linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Basta prendere la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice

$$A_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è singolare ma le righe A_1, A_2 e le colonne A^1, A^2 sono linearmente indipendenti. $\square$

Esempio 11.34. [FFQ82] I vettori $(1, 2, 3, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti? Sì, dato che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha sottomatrice

$$A_{(1,2,3);(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante $2 \neq 0$.

Osservazione 11.35. [FFW41] Notiamo che se i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ sono combinazione lineare dei vettori linearmente indipendenti $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$, e $s > t$, non è possibile che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ siano linearmente indipendenti.

11.3 Il teorema di Rouché-Capelli

Teorema 11.36 (Rouché-Capelli). [FFF39] Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che

1. Se $\text{rk}([A|\underline{b}]) \neq \text{rk}(A)$ il sistema non ha soluzioni.
2. Se $\text{rk}([A|\underline{b}]) = \text{rk}(A)$ il sistema ha $\infty^{n-\text{rk}(A)}$ soluzioni. (N.B. $n - \text{rk}(A)$ è il numero di variabili meno il rango della matrice incompleta)

Dimostrazione. La dimostrazione viene rimandata a quando avremo a disposizione più teoria. $\square$

Osservazione 11.37. [FFQ5] La notazione ∞^m vuol dire che il numero minimo di parametri necessari per descrivere le soluzioni del sistema è m , è solo una notazione. Sempre per notazione ∞^0 vuol dire che la soluzione è unica.

Corollario 11.38. [FFF65] Nelle ipotesi del teorema di Rouché-Capelli, il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione unica se e solo se $\text{rk}([A|\underline{b}]) = \text{rk}(A) = n$

Capitolo 12

Dodicesima lezione - Esercizi

12.1 Calcoli in $\mathbb{K}(\underline{a})$

Esercizio 12.1. [FFU67] Risolvere per $f(a, b), g(a, b) \in \mathbb{K}(a, b)$ il sistema

$$\begin{pmatrix} a & a+1 \\ b-1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(a, b) \\ g(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che indichiamo con $\mathbb{K}(a, b)$ il campo delle frazioni polinomiali nelle variabili a, b .

Soluzione. Costruiamo la matrice completa del sistema e riduciamola con Gauss,

```
A:=Mat([[a, a+1, 2],
        [b-1, b, 1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Cancelli la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a+1, 2]
2^a-((b-1)/a)*1^a [0, (a-b+1)/a, (a-2b+2)/a]
```

Il determinante dell'incompleta è il prodotto dei pivot

$$a \cdot (a - b + 1)/a \equiv a - b + 1 \neq 0$$

Il sistema ammette un'unica soluzione, calcoliamola

Mettiamo il sistema nella forma $[I|b]$

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
```

```
Metto tutti i pivots a 1
1^a*(1/a) [1, (a+1)/a, 2/a]
2^a*(a/(a-b+1)) [0, 1, (a-2b+2)/(a-b+1)]
```

Cancelli la colonna sopra il pivot nella 2 colonna

```
1^a-((a+1)/a)*2^a [1, 0, (-a+2b-1)/(a-b+1)]
----- [0, 1, (a-2b+2)/(a-b+1)]
```

Le soluzioni sono quindi le frazioni polinomiali

$$f(a, b) = \frac{-a + 2b - 1}{a - b + 1} \quad g(a, b) = \frac{a - 2b + 2}{a - b + 1}$$

□

Osservazione 12.2. [FFU15] Quando risolvo un sistema o calcolo un determinante/rango con Gauss, se cerco le soluzioni in $K(\underline{a})$ posso dividere per qualunque polinomio diverso da zero (come polinomio). Se cerco le soluzioni su $\mathbb{R}$, con $a_1, \dots, a_n$ parametri, devo spezzare i calcoli quando divido per un polinomio che si può annullare per qualche valore di $\underline{a}$.

MORALE: posso evitare di spezzare i calcoli quando faccio Gauss **nel caso generico, ovvero per quasi tutti i valori dei parametri.** Perdo però i casi particolari

Osservazione 12.3. [FFU47] Se ho una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}[\underline{a}])$, il suo determinante appartiene a $\mathbb{K}[\underline{a}]$, dato che se calcolo il determinante mediante sviluppi di Laplace non divido mai. Quindi anche riducendo con Gauss troverò che il prodotto dei pivot è un polinomio e non una frazione razionale.

Osservazione 12.4. [FFU77] Se ho una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, od un sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ con dei parametri, e voglio calcolare il determinante/rango/risolvere il sistema, posso operare sul campo delle frazioni razionali $\mathbb{K}(\underline{a})$ a variabili i parametri $\underline{a}$. Devo prestare particolare attenzione.

1. Se entrate di A o $\underline{b}$ hanno parametri al denominatore gli oggetti potrebbero avere senso in $\mathbb{K}(\underline{a})$ ma non in $\mathbb{K}$. Per esempio

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \equiv 1 \in \mathbb{K}(a)$$

ma se interpretiamo a come parametro (ovvero le entrate in $\mathbb{K}$), per $a = 0$ la matrice perde di senso.

2. Se voglio che il risultato finale abbia **sempre** senso in $\mathbb{K}$ (ovvero dopo una qualunque sostituzione degli $\underline{a}$ con dei valori) non mi sarà permesso moltiplicare/dividere una riga/colonna per polinomi che possano annullarsi. Per esempio,

$$ax + ay \equiv_{\mathbb{K}(a)} a \Leftrightarrow x + y \equiv_{\mathbb{K}(a)} 1 \quad \text{dato che } a \not\equiv_{\mathbb{K}(a)} 0$$

ma non è vero che

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad ax + ay = a \Leftrightarrow x + y = 1 \quad \text{dato che } a \text{ potrebbe essere } 0$$

Lavorare con dei parametri può portare a conti molto complessi

Esercizio 12.5. [FFU05] Calcolare con Gauss il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 0 \\ a+1 & a & 2 & a \\ a-1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & a \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo con Gauss senza toccare la matrice

```
A:=Mat([ [ a, 1,a,0],
          [a+1,a,2,a],
          [a-1,0,a,0],
          [ 0,a,2,a]]);
```

```

RiduciScalaVerbose(A);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a, 1, a, 0]
2^a-((a + 1)/a)*1^a [0, (a^2 - a - 1)/a, -a + 1, a]
3^a-((a - 1)/a)*1^a [0, (-a + 1)/a, 1, 0]
  0 sotto pivot [0, a, 2, a]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=(a^2 - a - 1)/a
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [a, 1, a, 0]
----- [0, (a^2 - a - 1)/a, -a + 1, a]
3^a-((-a + 1)/(a^2 - a - 1))*2^a [0, 0, (a-2)/(a^2-a-1), (a^2-a)/(a^2-a-1)]
4^a-(a^2/(a^2-a-1))*2^a [0, 0, (a^3+a^2-2a-2)/(a^2-a-1), (-a^2-a)/(a^2-a-1)]
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [a, 1, a, 0]
----- [0, (a^2-a-1)/a, -a + 1, a]
----- [0, 0, (a - 2)/(a^2 - a - 1), (a^2-a)/(a^2-a-1)]
4^a-((a^3+a^2-2a-2)/(a-2))*3^a [0, 0, 0, (-a^3-a^2)/(a-2)]

a((a^2-a-1)/a)((a - 2)/(a^2 - a - 1))((-a^3-a^2)/(a-2));

Moltiplichiamo i quattro pivot

```

$$a \cdot \frac{a^2 - a - 1}{a} \cdot \frac{a - 2}{a^2 - a - 1} \cdot \frac{-a^3 - a^2}{a - 2} = (a^2 - a - 1) \cdot \frac{1}{a^2 - a - 1} \cdot (-a^3 - a^2) = -a^3 - a^2$$

Gauss smart

Riduciamo con Gauss spostando qualche colonna per semplificare i conti. Notiamo che scambiamo la prima e terza e la seconda e quarta colonna, e il segno del determinante rimane quindi invariato.

```

A:=Mat([ [a,0, a, 1],
         [2,a, a+1,a],
         [a,0, a-1,0],
         [2,a, 0,a] ]);
RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a, 0, a, 1]
  2^a-(2/a)*1^a [0, a, a - 1, (a^2 - 2)/a]
  3^a-(1)*1^a [0, 0, -1, -1]
  4^a-(2/a)*1^a [0, a, -2, (a^2 - 2)/a]
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [a, 0, a, 1]
----- [0, a, a - 1, (a^2 - 2)/a]
  0 sotto pivot [0, 0, -1, -1]
  4^a-(1)*2^a [0, 0, -a - 1, 0]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [a, 0, a, 1]
----- [0, a, a - 1, (a^2 - 2)/a]

```

```
----- [0, 0, -1, -1]
4^a-(a + 1)*3^a [0, 0, 0, a + 1]
```

Moltiplichiamo i quattro pivot

$$a \cdot a \cdot (-1) \cdot (a + 1) = -a^3 - a^2$$

□

12.2 Dipendenze lineari

Richiamo 12.6. [FFF00] Siano dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{K}^n$. È immediato che a parte casi patologici (tutti i vettori sono nulli) i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno è esprimibile come combinazione lineare degli altri. Quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di loro è esprimibile come combinazione lineare degli altri.

Esercizio 12.7. [FFF05] La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo (facile verifica, ma lo vedremo nel prosieguo) e quindi le sue righe sono quindi linearmente dipendenti. Vogliamo determinare i coefficienti α, β, γ di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficienti che danno una loro combinazione lineare nulla).

$$\underline{u}_1 = (1, 1, 1) \quad \underline{u}_2 = (1, 2, 3) \quad \underline{u}_3 = (4, 5, 6)$$

Per definizione di dipendenza lineare, cerchiamo una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo

$$\alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u}_2 + \gamma \underline{u}_3 = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 3) + \gamma(4, 5, 6) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Notiamo che la matrice associata è A^T , e troviamo facilmente una soluzione con Gauss

```
M:=Mat([[1, 1, 4],
        [1, 2, 5],
        [1, 3, 6]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
```

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, 1, 4]
      2^a-1*1^a [0, 1, 1]
      3^a-1*1^a [0, 2, 2]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, 1, 4]
```

```

----- [0, 1, 1]
      3^a-2*2^a [0, 0, 0]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 4]
----- [0, 1, 1]
----- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot

      1^a-1*2^a [1, 0, 3]
-----[0, 1, 1]
-----[0, 0, 0]

```

Dato che c'è una riga nulla, il determinante della matrice è nullo. Dato che si tratta della trasposta di A , è nullo anche il determinante di A . Abbiamo che le soluzioni del sistema sono $\alpha = -3\gamma$, $\beta = -\gamma$, o se preferiamo $\{(-3\gamma, -\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. Le relazioni di dipendenza lineare tra $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ sono date da

$$-3\gamma\underline{u}_1 - \gamma\underline{u}_2 + \gamma\underline{u}_3 = 0 \quad \gamma \neq 0$$

ed essenzialmente da

$$-3\underline{u}_1 - \underline{u}_2 + \underline{u}_3 = 0$$

Dato che tutti i coefficienti della relazione sono non nulli, possiamo esplicitare ogni vettore in funzione degli altri due.

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= -\frac{1}{3}\underline{u}_2 + \frac{1}{3}\underline{u}_3 \\ \underline{u}_2 &= -3\underline{u}_1 + \underline{u}_3 \\ \underline{u}_3 &= 3\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \end{aligned}$$

12.3 Esercizi vari

Esercizio 12.8. [FFF50] Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare il suo rango r e un insieme di r righe linearmente indipendenti. Dato che

$$A_{(1,4);(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare la prima e quarta riga sono linearmente indipendenti. La prima e terza colonna sono linearmente indipendenti. Avremmo potuto scegliere altre sottomatrici 2×2 non singolari, per esempio $A_{(1,2);(4,5)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dato che

$$A_{(2,3,4);(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, la seconda, terza e quarta riga sono linearmente indipendenti. La prima, seconda e terza colonna sono linearmente indipendenti.

Sappiamo che $3 \leq \text{rk}(A) \leq 4$. Determiniamo il rango attraverso una riduzione di Gauss

```

M:=Mat([[1,1,1,4,0],
        [1,2,1,0,1],
        [0,1,1,2,0],
        [0,0,1,1,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 0]
      2^a-1*1^a [0, 1, 0, -4, 1]
      0 sotto pivot[0, 1, 1, 2, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, 1, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 0]
----- [0, 1, 0, -4, 1]
      3^a-1*2^a [0, 0, 1, 6, -1]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, 1, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 0]
----- [0, 1, 0, -4, 1]
----- [0, 0, 1, 6, -1]
      4^a-1*3^a [0, 0, 0, -5, 3]

```

Quindi $rk A = 4$; le righe e le prime quattro colonne sono linearmente indipendenti.

Esercizio 12.9. [LL04] Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 10}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Consideriamo la sottomatrice quadrata 3×3 scegliendo la seconda, terza, quarta colonna e calcoliamone il determinante con lo sviluppo Laplace:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2 - 6) = -8 \neq 0$$

quindi $rk A = 3$.

Notiamo che per esempio, scegliendo altre colonne e calcolandone il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

Questo non vuole dire nulla perché il rango sia ≥ 3 basta che esista **una** sottomatrice con determinante non nullo di ordine 3. Le altre possono avere determinante nullo o no, non importa. $\square$

Esercizio 12.10. [LL03] Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 6}(\mathbb{R})$$

Soluzione. La matrice A è una matrice 4×6 pertanto abbiamo che $rk A \leq 4$. Consideriamo la sottomatrice

$$A_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante 2 quindi $rk A \geq 2$.

Si può verificare con un certo lavoro che tutte le sottomatrici di ordine 4 (che sono, per chi abbia fatto un pò di combinatorica, $\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{4} = 1 \cdot 6 = 6$) e tutte le sottomatrici di ordine 3 che sono $\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{3} = 4 \cdot 20 = 80$ hanno determinante nullo. Ma sarebbe veramente un lavoro di calcolo enorme. Pertanto scegliamo di calcolare il rango con la riduzione a scala dato che il rango della matrice non cambia per operazioni di Gauss.

```
M:=Mat([[1,2,-1,0,3,2],
-----[0,2,1,0,-2,2],
-----[2,6,-1,0,4,6],
-----[1,-2,-3,0,7,-2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-----[1, 2, -1, 0, 3, 2]
0 sotto pivot [0, 2, 1, 0, -2, 2]
3^a-2*1^a -----[0, 2, 1, 0, -2, 2]
4^a-1*1^a -----[0, -4, -2, 0, 4, -4]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-----[1, 2, -1, 0, 3, 2]
-----[0, 2, 1, 0, -2, 2]
3^a-1*2^a -----[0, 0, 0, 0, 0, 0]
4^a+2*2^a -----[0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

La matrice ridotta con Gauss ha due righe nulle quindi rango $4 - 2 = 2$.

N.B. Tutte le sottomatrici 3×3 o 4×4 sono singolari dato che includono necessariamente almeno una riga nulla. $\square$

Esercizio 12.11. [FFE10] *Determinare il massimo numero possibile di colonne linearmente indipendenti tra quelle della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -11 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e dare per ciascuna delle le dipendenti una relazione lineare.

Soluzione. Ricordiamo che il massimo numero di colonne indipendenti è dato dal rango, ma in generale possiamo scegliere queste colonne con molta libertà.

Vediamo di procedere con la tecnica standard. Ridurre la matrice M con Gauss senza scambi di colonne ci darà le posizioni dei pivot, e quindi sapremo quante colonne al massimo possono essere indipendenti ed avremo una scelta di colonne dipendenti/indipendenti. Per trovare le relazioni lineari, bisogna risolvere il sistema

$$xA^1 + yA^2 + zA^3 + aA^4 + bA^5 = \underline{0}$$

le relazioni sono le soluzioni. Ma per risolvere il sistema riduciamo la matrice associata, che è poi M . Riduciamo senza scambi di colonne

```

M:=Mat([[ 3,  3,  2,  1,  0],
        [ 3,  3,  5,  2,  1],
        [-3, -3, -11, -4, -3],
        [ 2,  2, -2, -1, -2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 3, 2, 1, 0]
      2^a-1*1^a [0, 0, 3, 1, 1]
      3^a+1*1^a [0, 0, -9, -3, -3]
      4^a-2/3*1^a [0, 0, -10/3, -5/3, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 3, 2, 1, 0]
----- [0, 0, 3, 1, 1]
      3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
      4^a+10/9*2^a [0, 0, 0, -5/9, -8/9]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 3, 2,  1,  0],
     [0, 0, 3,  1,  1],
     [0, 0, 0, -5/9, -8/9],
     [0, 0, 0,  0,  0]])

```

Vediamo che ci sono tre pivot e le loro posizioni sono (1,1), (2,3) e (3,4). Il rango è quindi tre, una possibile scelta di colonne indipendenti è: prima, terza e quarta. Le altre (seconda, quinta) sono quindi dipendenti. Il sistema è

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z + a = 0 \\ 3z + a + b = 0 \\ 5/9a + 8/9b = 0 \end{cases}$$

Noi vorremmo trovare le combinazioni lineari della prima, terza e quarta colonna che mi danno la seconda e quinta. Questo vorrebbe dire, esplicitare le variabili y, b (quelle relative alle colonne dipendenti) in funzione delle variabili x, z, a (quelle relative alle colonne indipendenti). Però il sistema è messo in forma tale per cui questo non è immediato.

Mettiamo la matrice in forma standard, senza scambi di colonna.

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
      1^a*+1/3 [1, 1, 2/3, 1/3, 0]
      2^a*+1/3 [0, 0, 1, 1/3, 1/3]
      3^a*-9/5 [0, 0, 0, 1, 8/5]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
      1^a-1/3*3^a [1, 1, 2/3, 0, -8/15]
      2^a-1/3*3^a [0, 0, 1, 0, -1/5]
----- [0, 0, 0, 1, 8/5]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-2/3*2^a [1, 1, 0, 0, -2/5]

```



```

----- [0, 0, 1, 0, -1/5]
----- [0, 0, 0, 1, 8/5]
----- [0, 0, 0, 0, 0]

```

Dalla matrice leggiamo immediatamente che

- La seconda colonna è uguale alla prima. $A^2 = A^1$.
- La quinta colonna: $A^5 = -2/5A^1 - 1/5A^3 + 8/5A^4$.

□

12.4 Come usare la riduzione

Abbiamo i seguenti passi elementari di riduzione su una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

1. Scambio delle righe $A_i \leftrightarrow A_j$. Passo di Gauss.
2. Scambio delle colonne $A_i \leftrightarrow A_j$.
3. Riduzione $A_j \rightarrow A_j + \lambda A_i$, con $i < j$ e cancellazione della componente non nulla più a sinistra della riga A_j . Passo di Gauss.
4. Riduzione $A_j \rightarrow A_j + \lambda A_i$, con $i > j$ e cancellazione della componente non nulla più a destra della riga A_j .
5. Moltiplicazione di riga per scalare $A_j \rightarrow \lambda A_j$ con $\lambda \neq 0$.
6. Sostituzione di riga con combinazione lineare di righe, comporesa quella di partenza: $A_j \rightarrow \alpha A_j + \beta A_i$, con $\alpha \neq 0$. I casi 3, 4 e 5 possono essere visti come casi particolari di questo.
7. Moltiplicazione di colonna per scalare $A_j \rightarrow \lambda A_j$ con $\lambda \neq 0$.
8. Sostituzione di colonna con combinazione lineare di colonne, comporesa quella di partenza: $A^j \rightarrow \alpha A^j + \beta A^i$, con $\alpha \neq 0$.

Ricordiamo che ciascuno di questi passi può essere attuato moltiplicando la matrice A a destra o a sinistra per una opportuna matrice.

Ricordiamo quali passi possiamo usare e come durante una riduzione per svolgere le seguenti operazioni complesse:

- a Risolvere un sistema di equazioni: tutte, avendo cura di scambiare le variabili nella soluzione se ho effettuato uno scambio di colonne nella riduzione.
- b Ridurre una matrice a scala: possibile anche solo usando lo scambio di righe 1 e la riduzione 3 con $i < j$.
- c Ridurre una matrice in forma standard: possibile anche solo usando lo scambio di righe 1 e le riduzioni 3,4 con $i < j$ e $i > j$.
- d Ridurre una matrice in forma normale: possibile anche solo usando lo scambio di righe 1, le riduzioni 3,4 con $i < j$ e $i > j$ e lo scambio di colonne 2.
- e Calcolare il determinante (solo matrice quadrata): le riduzioni 3 e 4 sempre. Gli scambi di riga/colonna 1, 2 ricordandomi che devo cambiare segno. Le moltiplicazioni di riga/colonna 5/7/8 e le combinazioni lineari 6, ricordandomi che devo moltiplicare per λ, α .

- f Vedere se il determinante è nullo: tutte le operazioni, senza memoria.
- g Calcolo del rango: tutte le operazioni, senza memoria.
- h Determinazione di colonne indipendenti in A mediante il metodo dei pivot. Tutte le operazioni, ma se effettuo uno scambio di colonne devo ricordarmene.
- i Determinazione delle righe indipendenti in A mediante il metodo dei pivot. Tutte le operazioni, ma se effettuo uno scambio di righe devo ricordarmene.
- j Vedere se vi sono righe indipendenti in A mediante la tecnica della riga nulla: tutte le operazioni.
- k Determinare le righe indipendenti e le relazioni lineari tra le righe di A usando la tecnica delle tag-variabili o tag-vettori: tutte le operazioni.

Ricordiamo anche che

- A Se una riga di una matrice si riduce a zero senza scambi di riga, questa riga è combinazione lineare di tutte le righe precedenti. Se uso il metodo delle tag-variabili o tag-vettori, posso anche sapere di quali righe esattamente ed i coefficienti della combinazione.

12.5 Esercizi Rango e Rouché-Capelli

Esempio 12.12. [JJS37] *Calcoliamo il rango della matrice*

```
M:=Mat([[ 1, 3, 1, 4, 0, 3],
         [ 1, 3, 1, 0, 1, 2],
         [-1,-3,-1, 8,-3, 0],
         [ 1, 3, 1,12,-2, 5]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 1, 4, 0, 3]
        2^a-1*1^a [0, 0, 0, -4, 1, -1]
        3^a+1*1^a [0, 0, 0, 12, -3, 3]
        4^a-1*1^a [0, 0, 0, 8, -2, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 4]=-4
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 1, 4, 0, 3]
----- [0, 0, 0, -4, 1, -1]
        3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 0]
        4^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

Il rango della matrice è 2, le colonne linearmente indipendenti sono la prima e la quarta, le righe linearmente indipendenti la prima e la seconda (non ha operato scambi di riga).

Esempio 12.13. [FFF81] *Calcoliamo il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 5}(\mathbb{K})$$

Abbiamo che $1 \leq \text{rk}(A) \leq 4$. Riduciamo la prima colonna con Gauss

```

A:=Mat([[1,1,2,2,3],
        [1,1,1,2,2],
        [0,2,1,2,0],
        [1,3,4,4,4]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 2, 2, 3]
      2^a-1*1^a [0, 0, -1, 0, -1]
      0 sotto pivot[0, 2, 1, 2, 0]
      4^a-1*1^a [0, 2, 2, 2, 1]

```

vediamo facilmente che la sottomatrice $A_{(1,2,3);(2,3,4)}$ è non singolare. Questo ci dice che $\text{rk}(A) \geq 3$. Il rango è quindi 3 o 4. Notiamo che la quarta riga della matrice è la differenza della terza e della seconda. Quindi non ci sono quattro righe indipendenti e il rango è 3.

Avremmo potuto considerare ugualmente la sottomatrice $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$

Esercizio 12.14. [LL25] Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3a & a-1 & -1 & -a-2b \\ a & a+b & a+b & -2a-2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 4}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ e poi $a, b \in \mathbb{C}$.

Soluzione. Svolgiamo i conti e alla fine distingueremo i casi $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Dato che esiste un elemento della matrice $-1 \neq 0$ non dipendente dai parametri a, b , il rango di A è almeno uno. Inoltre la matrice A ha ordine 2×4 quindi il rango è al massimo 2.

Per stabilire se è 1 o 2 dobbiamo considerare le sottomatrici di ordine 2: se tutte le 6 sottomatrici 2×2 di A sono singolari allora abbiamo che il rango è 1 altrimenti è 2. Potremmo mettere a sistema queste sei equazioni non lineari, sperando di risolvere il sistema facilmente, ma è più efficiente esaminare la matrice.

Scegliamo una sottomatrice 2×2 per cui calcoliamo il determinante e discutiamo per quale valore di a, b è diverso da 0. Per esempio, prendiamo in considerazione la matrice

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a

$$(a-1)(a+b) + (a+b) = (a-1+1)(a+b) = a(a+b) \neq 0 \iff a \neq 0 \text{ oppure } a \neq -b$$

In tal caso il rango di A sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$ è 2.

Studiamo quindi il caso $a = 0$. La matrice diviene

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2b \\ 0 & b & b & -2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che tale matrice ha la prima colonna nulla, la seconda e la terza uguali, pertanto le sottomatrici che coinvolgono due su tre di tali colonne sono singolari. L'unica matrice non singolare di cui calcoliamo il determinante è :

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -2b \\ b & -2 \end{pmatrix} = 2(b^2 + 1)$$

A questo punto possiamo concludere che per $a = 0$ il rango di A su $\mathbb{R}$ è esattamente 2 per ogni $b \in \mathbb{R}$; mentre il rango di A su $\mathbb{C}$ è esattamente 2 per $a = 0$ e $b \neq \pm i$, altrimenti è 1.

Adesso consideriamo il caso $b = -a$. La matrice assegnata diventa:

$$\begin{pmatrix} 3a & a-1 & -1 & a \\ a & 0 & 0 & -2a-2 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso scegliamo una sottomatrice che ha determinante dipendente dal parametro a , che ci sembra semplice, e ne calcoliamo il determinante. Per esempio la sottomatrice

$$\det \begin{pmatrix} 3a & a-1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = a(a-1)$$

Affinchè tale determinante sia nullo bisogna che $a = 0$ o $a = 1$.

Se $a = 0$ anche $b = -a = 0$ e otteniamo che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $a = 1$ quindi $b = -1$ e otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Riassumendo: il rango di A su $\mathbb{C}$ è 2 per ogni $a \in \mathbb{C}$ e $b \neq \pm i$, altrimenti 1, mentre su $\mathbb{R}$ è 2 per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Svolgiamo adesso l'esercizio mediante la forza bruta. Iniziamo con il calcolare tutti i determinanti delle sei matrici 2×2 :

$$\det A_{(1,2);(1,2)} = 3a(a+b) - a(a-1) = 2a^2 + 3ab + a$$

$$\det A_{(1,2);(1,3)} = 3a(a+b) + a = 3a^2 + 3ab + a$$

$$\det A_{(1,2);(1,4)} = 3a(-2a-2) + a(a+2b) = -5a^2 + 2ab - 6a$$

$$\det A_{(1,2);(2,3)} = (a-1)(a+b) + (a+b) = a^2 + ab = a(a+b)$$

$$\det A_{(1,2);(2,4)} = (a-1)(-2a-2) + (a+b)(a+2b) = -a^2 + 3ab + 2b^2 + 2$$

$$\det A_{(1,2);(3,4)} = (2a+2) + (a+b)(a+2b) = a^2 + 3ab + 2a + 2b^2 + 2$$

Poi mettiamo a sistema queste sei equazioni ponendole a zero e cerchiamo di semplificarle per quanto possibile:

$$\begin{cases} 2a^2 + 3ab + a = a(2a + 3b + 1) = 0 \\ 3a^2 + 3ab + a = a(3a + 3b + 1) = 0 \\ -5a^2 + 2ab - 6a = a(-5a + 2b - 6) = 0 \\ a(a+b) = 0 \\ -a^2 + 3ab + 2b^2 + 2 = 0 \\ a^2 + 3ab + 2a + 2b^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che la più semplice è la quarta equazione: $a(a+b) = 0$ da cui deduciamo che $a = 0$ o $a = -b$. Sfruttando queste uguaglianze il sistema trovato è equivalente ai due seguenti sistemi ottenuti rispettivamente ponendo nel primo $a = 0$ e nel secondo $b = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ b^2 + 1 = 0 \\ b^2 + 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -a^2 + a = 0 \\ a = 0 \\ -7a^2 - 6a = 0 \\ 0 = 0 \\ -2a^2 + 2 = 0 \\ 2a + 2 \end{cases}$$

Osserviamo che il secondo sistema è chiaramente impossibile quindi discutiamo solo le soluzioni del primo dove abbiamo posto $a = 0$ e ottenuto l'equazione $b^2 + 1 = 0$. Pertanto possiamo concludere che il rango di A su $\mathbb{R}$ è 2 per ogni $a = 0$ e per ogni $b \in \mathbb{R}$, mentre il rango di A su $\mathbb{C}$ è 1 per $a = 0$ e $b = \pm i$ ed è 2 altrimenti.

Riassumendo: il rango di A su $\mathbb{C}$ è 2 per ogni $a \in \mathbb{C}$ e $b \neq \pm i$, , altrimenti 1, mentre su $\mathbb{R}$ è 2 per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Esempio 12.15 (Esercizio di esame, 8pt). [ES10] Dato $k, a, b, c \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} kx + y + z = b \\ x + y + 3z = a \\ kx + y + 2z = c \end{cases}$$

discutere le soluzioni del sistema al variare di $k, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per comodità scambiamo la prima e seconda equazione.

Riduciamo con Gauss la matrice completa del sistema

```
M:=Mat[[1, 1, 3, a],
        [k, 1, 1, b],
        [k, 1, 2, c]];
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1,      1,      3,      a]
          2^a-k*1^a [0, -k + 1, -3k + 1, -ka + b]
          3^a-k*1^a [0, -k + 1, -3k + 2, -ka + c]
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1,      1,      3,      a]
----- [0, -k + 1, -3k + 1, -ka + b]
          3^a-1*2^a [0,      0,      1, -b + c]
```

- Se $k \neq 1$ la matrice incompleta ha tre pivot non nulli ed è quindi non singolare per ogni a, b, c , il suo rango è 3, questo forza il rango della completa ad essere 3 e per Rouché-Capelli il sistema ammette un'unica soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Se $k = 1$ il rango della matrice incompleta, dato che ha solo due pivot non nulli è 2 per ogni a, b, c . Abbiamo quindi infinite o nessuna soluzioni. La matrice completa diviene

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & -2 & -a + b \\ 0 & 0 & 1 & -b + c \end{array} \right)$$

Dato che la prima e seconda colonna sono uguali, il rango di M' è uguale al rango della sottomatrice

$$M'_{(1,2,3);(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & -a + b \\ 0 & 1 & -b + c \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice quadrata di ordine tre e si vede facilmente che

$$\det(M'_{(1,2,3);(2,3,4)}) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -a + b \\ 1 & -b + c \end{pmatrix} = -2(-b + c) - (-a + b) = a + b - 2c$$

Quindi per $k = 1$

- Se $k = 1$, $a + b - 2c \neq 0$ il rango della matrice completa è 3, diverso dal rango dell'incompleta, e quindi il sistema non ha soluzioni.
- Se $k = 1$, $a + b - 2c = 0$ e si verifica facilmente che il rango della matrice completa è 2, uguale al rango dell'incompleta, e quindi il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Ricapitolando

- Se $k \neq 1$ esiste un'unica soluzione.
- Se $k = 1$
 - e $a + b - 2c = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni.
 - e $a + b - 2c \neq 0$ il sistema non ha soluzioni.

□

Proposto: determinare esplicitamente le soluzioni del sistema.

Esempio 12.16. [FFF23] Abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Voglio trovare le righe linearmente indipendenti, e per quelle dipendenti la loro espressione come combinazione lineare delle indipendenti.

Invece di aggiungere a destra la colonna $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ producendo la matrice $S = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 1 & 2 & 3 & v_2 \\ 4 & 5 & 6 & v_3 \end{array} \right)$ aggiungiamo i vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ alla prima, seconda e terza riga rispettivamente, producendo la matrice

$$S_1 = (A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Riduciamo fino ad ottenere una forma triangolare superiore per A .

```
Use R:=Q[v[1..3]];
S:=Mat([[1,1,1,v[1]],
        [1,2,3,v[2]],
        [4,5,6,v[3]]]);
S1:=Mat([[1,1,1,1,0,0],
         [1,2,3,0,1,0],
         [4,5,6,0,0,1]]);

RiduciScala(S);
Mat[[1, 1, 1,  v[1]],
     [0, 1, 2, -v[1] + v[2]],
     [0, 0, 0, -3v[1] - v[2] + v[3]]

RiduciScala(S1);
[Mat[[1, 1, 1,  1,  0, 0],
     [0, 1, 2, -1,  1, 0],
     [0, 0, 0, -3, -1, 1]]
```

In ambedue i casi, trovo che la prima e seconda riga sono linearmente indipendenti, mentre per la terza

$$A_3 = 3A_1 + A_2$$

Osservazione 12.17. [FFF20] Quando opero con questo metodo sulla matrice $[A|B]$ (A matrice, B colonne aggiunte, una sola colonna di polinomi oppure la colonna coi vettori $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ come nell'Esempio 12.16 posso effettuare scambi di colonna (entro la matrice A) senza alterare il risultato - cambiare coerentemente l'ordine delle componenti dei vettori non altera le relazioni lineari tra essi.

Esercizio 12.18. [EE88] Dato $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 & 2 \\ c & d & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$$

Determinare, al variare di a, b, c, d il rango di A .

Soluzione. Il rango di A è al massimo 4 e al minimo 1. Per semplificare la matrice, facciamo due operazioni.

$$\begin{array}{l} 1^a \rightarrow 1^a - b \cdot 4^a \\ 2^a \rightarrow 2^a - d \cdot 4^a \end{array} \quad \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 & 2 \\ c & d & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 1 & 2 \\ c & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare il rango di questa matrice. Osserviamo che la terza e quarta colonna sono multiple l'una dell'altra, quando cerco un minore non le considero contemporaneamente. Tra le due sottomatrici possibili scelgo quella con la quarta colonna per semplicità di calcolo e ne calcolo il determinante sviluppando con Laplace secondo la quarta riga e poi secondo l'ultima riga:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^{4+2} \det \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ c & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{3+1} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} a & 2 \\ c & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1 - 0 + a - c \end{aligned}$$

Quindi se $a - c - 1 \neq 0$ si ha che $\det A \neq 0$ e quindi il rango di A è 4.

Se $a - c - 1 = 0 \Leftrightarrow a = c + 1$ il rango è forzatamente minore di 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} c+1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ c & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo minore ha determinante non nullo pertanto il rango di A è ≥ 3 ma è anche minore di 4, quindi se $a - c - 1 = 0$ il rango di A è uguale a 3.

□

Esempio 12.19. [FFX21] *Determinare le relazioni lineari tra i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 2, 3), \underline{v}_2 = (1, 1, 0, 3, 3), \underline{v}_3 = (1, -2, -9, 6, 3), \underline{v}_4 = (3, 4, 3, 8, 3)$$

Mettiamo i vettori per riga in una matrice, aggiungiamo una colonna di variabili tag e riduciamo.

```
Use R:=Q[v[1..4]];
M:=Mat([[1, 2, 3, 2, 3, v[1]],
        [1, 1, 0, 3, 3, v[2]],
        [1,-2,-9, 6, 3, v[3]],
        [3, 4, 3, 8, 3, v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2, 3, v[1]]
      2^a-1*1^a [0, -1, -3, 1, 0, -v[1] + v[2]]
      3^a-1*1^a [0, -4, -12, 4, 0, -v[1] + v[3]]
      4^a-3*1^a [0, -2, -6, 2, -6, -3v[1] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2, 3, v[1]]
----- [0, -1, -3, 1, 0, -v[1] + v[2]]
      3^a-4*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 3v[1] - 4v[2] + v[3]]
      4^a-2*2^a [0, 0, 0, 0, -6, -v[1] - 2v[2] + v[4]]
```

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti, il vettore $\underline{v}_3$ è combinazione lineare dei primi due con relazioni lineari

$$3v[1] - 4v[2] + v[3] = 0 \Rightarrow v[3] = -3v[1] + 4v[2]$$

Esercizio 12.20. [UI22] *Dato il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + hy + kz = k \\ kx + z = 0 \\ x + hy + z = 2 \end{cases}$$

Al variare dei parametri reali $h, k \in \mathbb{R}$ discutere il numero di soluzioni.

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Possiamo semplificare la matrice usando l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{array}{l} 2^a \longrightarrow 2^a - k \cdot 1^a \\ 3^a \longrightarrow 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & k & k \\ 0 & -hk & -k^2 + 1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k + 1 & -k + 2 \end{array} \right)$$

Notiamo che abbiamo potuto fare queste operazioni di Gauss perché non abbiamo effettuato divisioni per elementi che possano essere nulli al variare di h, k ; inoltre sostituire ad una riga la riga stessa eventualmente sommata una riga nulla è sempre ammissibile perché le operazioni di Gauss non cambiano il valore assoluto

del determinante, e dato che non abbiamo effettuato scambi di righe non cambia neppure il determinante. Nè cambia il rango della matrice.

La matrice incompleta A è in forma triangolare superiore, quindi

$$\det A = h \cdot k \cdot (k - 1)$$

Osserviamo che

$$\det A \neq 0 \iff h \neq 0 \text{ e } k \neq 0, 1$$

In questo caso il rango della matrice incompleta è 3, il rango della completa è forzatamente 3 e quindi il sistema ammette un'unica soluzione. Analizziamo adesso singolarmente i tre casi particolari.

Caso $k = 0$. Preferiamo considerare la matrice $[A|\underline{b}]$ e non la sua forma ridotta con Gauss per semplicità. Il rango della matrice incompleta è ≤ 2 . Sostituiamo $k = 0$ nella matrice $[A|\underline{b}]$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Notiamo che il rango della matrice incompleta è 2, dato che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare. Calcoliamo il rango della matrice completa. Tale determinante è chiaramente 3 dato che la sottomatrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

è non singolare. Il sistema è quindi impossibile per il teorema di Rouché-Capelli.

Caso $k = 1$. Anche in questo caso preferiamo considerare la matrice $[A|\underline{b}]$. Dato che $\det A = 0 \Rightarrow rk A \leq 2$. Sostituiamo $k = 1$ ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Calcoliamo i ranghi delle matrici incompleta e completa prendendo in considerazioni due sottomatrici che hanno entrambe determinante uguale, in valore assoluto, ad h :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h \quad \det \left(\begin{array}{cc|c} h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 1 & 2 \end{array} \right) = h$$

Quindi se $h \neq 0$, il rango della matrice incompleta è 2 mentre il rango della matrice completa è 3 e pertanto il sistema non ammette soluzioni. Se $h = 0$ invece la matrice diviene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

In questo caso il rango della matrice incompleta è 1 (una sola colonna dell'incompleta è linearmente indipendente), mentre il rango della completa è 2, dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

In ogni caso se $k = 1$ il rango della completa e dell'incompleta sono diversi quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni.

Caso $h = 0$. Sostituiamo $h = 0$ nella matrice ridotta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & k & k \\ 0 & -hk & -k^2 + 1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k + 1 & -k + 2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & -k^2 + 1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k + 1 & -k + 2 \end{array} \right) = A$$

Il rango della matrice incompleta dipende da k

- Se $k = 1$ la matrice diviene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

il rango della incompleta è 1, quello della completa è 2 e quindi non ci sono soluzioni.

- Se $k \neq 1$, l'incompleta ha due pivot, ed ha quindi rango 2, la completa ha una unica sottomatrice potenzialmente non singolare, $A_{(1,2,3);(1,3,4)}$. Svolgiamo i conti

$$\begin{aligned} \det A_{(1,2,3);(1,3,4)} &= 0 \\ (1 - k^2)(2 - k) - (-k^2)(1 - k) &= 0 \\ (1 - k)[(1 + k)(2 - k) + (k^2)] &= 0 \\ (1 - k)(2 + k) &= 0 \\ k + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Quindi il rango dell'incompleta è 2,

- Se $k = -2$ il rango della completa è 2 e quindi abbiamo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
- Se $k \neq -2$ il rango della completa è 3 e non esistono soluzioni.

Sintetizziamo l'esercizio:

- $h \neq 0, k \neq 0, 1$ il sistema ha un'unica soluzione;
- se $h = 0, k = -2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni;
- altrimenti il sistema è impossibile

□

Esercizio 12.21. [LL12] Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+3c & a+1 & a+c & b \\ 1 & a+2c & c & b+c & a+b+c \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 5}(\mathbb{R})$$

Soluzione. La matrice A ha ordine 2×5 pertanto il rango di A risulta per definizione minore uguale a 2. Consideriamo la sottomatrice $A_{(2,1)} = (1)$ che ha determinante 1 quindi non nullo. Possiamo affermare che $1 \leq rk A \leq 2$. Affinchè il rango sia 1, bisogna che tutte le sottomatrici 2×2 di A abbiano determinante nullo.

Vogliamo esaminare determinanti il più possibile semplici, quindi cominciamo dalla sottomatrice formata dalla prima e terza colonna e ne calcoliamo il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = c(a+1) - (a+1) = (a+1)(c-1)$$

Osserviamo immediatamente che se $a = -1$ e $c = 1$ la matrice assegnata diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & b+1 & b \end{pmatrix}$$

la cui sottomatrice formata dalle prime due colonne ha determinante non nullo per ogni valore di b . Quindi se $a = -1, c = 1, \forall b$ abbiamo che $rk A = 2$.

Supponiamo adesso $a \neq -1, c = 1$. Allora la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2a+3 & a+1 & a+1 & b \\ 1 & a+2 & 1 & b+1 & a+b+1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di una sottomatrice 2×2 , per esempio scegliamo la prima e la quarta colonna:

$$\det \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix} = (a+1)(b+1) - (a+1) = (a+1)(b+1-1) = b(a+1)$$

Poiché $c = 1, a \neq -1$ abbiamo che se $b \neq 0 \implies rk A = 2$, altrimenti la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2a+3 & a+1 & a+1 & 0 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo per esempio la prima e l'ultima colonna:

$$\det \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = (a+1)^2 \neq 0 \iff a \neq -1$$

ma essendo in questo caso abbiamo che $rk A = 2$.

Rimane l'ultimo caso $a = -1, c \neq 1$ dove la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2+3c & 0 & -1+c & b \\ 1 & -1+2c & c & b+c & -1+b+c \end{pmatrix}$$

Basta scegliere la prima e la quarta colonna

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1+c \\ 1 & b+c \end{pmatrix} = -1(-1+c) = 1-c \neq 0 \iff c \neq 1$$

Quindi esiste una sottomatrice con determinante non nullo e anche in questo caso $rk A = 2$.

Notiamo che, per vedere se fosse possibile avere $rk A = 1$, avremmo potuto imporre che tutti i determinanti delle sottomatrici 2×2 fossero nulli. Questo però avrebbe richiesto di risolvere un sistema di equazioni non lineari non banale nelle variabili a, b, c . Il procedimento seguito equivale a risolvere le equazioni una dopo l'altra, ed in *in questo caso* ha permesso una rapida risoluzione dell'esercizio. $\square$

Esercizio 12.22. [MK01] *Discutere (NON determinare) le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} tx + y + tz + z = 0 \\ tx + 3y + z = 1 \\ (t+1)x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

1. Su $\mathbb{R}$, con $t \in \mathbb{R}$.

2. Su $\mathbb{C}$, con $t \in \mathbb{C}$.

Soluzione. Scriviamo la matrice completa associata al sistema.

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & t+1 & 0 \\ t & 3 & 1 & 1 \\ t+1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Non è immediato calcolare i ranghi delle matrici completa ed incompleta. Vogliamo operare almeno un passo di riduzione di Gauss, ma preferiremmo non avere come primo pivot un termine dipendente dal parametro t . Scambiamo la prima e seconda colonna, operazione che lascia invariato il rango sia della matrice completa (ovviamente) che dell'incompleta (non abbiamo spostato la colonna dei termini noti).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t+1 & 0 \\ 3 & t & 1 & 1 \\ 2 & t+1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

e procediamo con Gauss per cancellare gli elementi sotto questo primo pivot.

$$\begin{array}{l} 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t+1 & 0 \\ 0 & -2t & -3t-2 & 1 \\ 0 & -t+1 & -2t & 2 \end{array} \right)$$

In questa forma è più semplice calcolare il rango. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta sopra scritta, sviluppando con la regola di Laplace rispetto alla prima colonna ed otteniamo facilmente il polinomio $t^2 + t + 2$. Tale polinomio è di secondo grado con discriminante negativo. Pertanto

- in $\mathbb{R}$ il polinomio $t^2 + t + 2$ e quindi il determinante della matrice incompleta è sempre non nullo. La matrice incompleta è quindi non singolare ed ha rango 3, forzando la matrice completa ad avere rango uguale, 3. Il sistema ha pertanto una unica soluzione.
- In $\mathbb{C}$, il determinante della matrice incompleta è non nullo se $t \neq -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ e in tal caso il sistema, come sopra, ammette un'unica soluzione. Mentre nel caso in cui $t = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ il rango della matrice incompleta è 2. Calcoliamo il rango della matrice completa. Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(A_{(1,2,3);(2,3,4)}) &= \det \left(\begin{array}{ccc} t & t+1 & 0 \\ -2t & -3t-2 & 1 \\ -t+1 & -2t & 2 \end{array} \right) \\ &\quad (\text{Laplace su terza colonna}) \\ &= 0 - 1 \cdot \det \left(\begin{array}{cc} t & t+1 \\ -t+1 & -2t \end{array} \right) + 2 \cdot \det \left(\begin{array}{cc} t & t+1 \\ -2t & -3t-2 \end{array} \right) \\ &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

e dato che questo polinomio ha radici ± 1 non si annulla in $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Quindi se $t = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ c'è una sottomatrice 3×3 della completa non singolare e quindi il rango della completa è 3 mentre il rango dell'incompleta, come visto, è 2 ed il sistema non ha soluzioni per il teorema di Rouché-Capelli.

□

Vediamo adesso negli Esercizi 12.23, 12.24 e 12.25 tre modi diversi di trovare le righe indipendenti di una matrice e, per le dipendenti, le loro espressioni come combinazione lineare delle indipendenti. Naturalmente potremmo risolvere il problema per le colonne della matrice trasposta.

Esercizio 12.23. [FFE11] *Determinare il massimo numero di righe linearmente indipendenti, r , della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & -4 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scelte r righe indipendenti, trovare le descrizioni delle rimanenti da queste mediante combinazioni lineari.

Soluzione. Procediamo col metodo delle tag-variabili.

```
M1:=Mat([[3, 2, 2, 1, 0, 1,v[1]],
          [3, 2, 5, 2, 1, 0,v[2]],
          [-3, -2, -11, -4, -3, 2,v[3]],
          [6, 4, 1, 1, 1, 1,v[4]],
          [-3, -2, -2, -1, -2, 1,v[5]]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]]
      2^a-1*1^a [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]]
      3^a+1*1^a [0, 0, -9, -3, -3, 3, v[1] + v[3]]
      4^a-2*1^a [0, 0, -3, -1, 1, -1, -2v[1] + v[4]]
      5^a+1*1^a [0, 0, 0, 0, -2, 2, v[1] + v[5]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]]
----- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]]
      3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[3]]
      4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3v[1] + v[2] + v[4]]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -2, 2, v[1] + v[5]]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]],
      [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]],
      [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3v[1] + v[2] + v[4]],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[3]],
      [0, 0, 0, 0, -2, 2, v[1] + v[5]]])
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=2
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, v[1]]
----- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -v[1] + v[2]]
----- [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3v[1] + v[2] + v[4]]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[3]]
      5^a+1*3^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2v[1] + v[2] + v[4] + v[5]]
```

Il rango della matrice è 3, dato che abbiamo tre pivot. Abbiamo quindi esattamente tre righe indipendenti. Abbiamo anche le due relazioni lineari

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = 0 \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = 0 \end{cases}$$

Volendo tenere come linearmente indipendenti le righe A_1, A_2, A_4 , quelle dei pivot (ricordiamo lo scambio righe), abbiamo che

$$A_3 = 2A_1 - 3A_2 + A_3 \text{ e } A_5 = 2A_1 - A_2 - A_4$$

Notiamo che, anche se ci fossimo dimenticati di aver scambiato la terza e quarta riga, il fatto che nella matrice ridotta ci fosse come terza riga un vettore i cui compare la variabile v_4 e non v_5 ce lo avrebbe ricordato. Avremmo potuto scegliere la triple di righe indipendenti in modo diverso, usando le relazioni lineari.

Per esempio, avremmo potuto scegliere come dipendenti la prima e la seconda, e quindi come indipendenti la terza, quarta e quinta. Dalle relazioni avremmo ottenuto

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 = 3A_2 + A_3 \\ -3A_2 - A_3 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 = 3A_2 + A_3 \\ -2A_2 - A_3 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 3/2A_2 + 1/2A_3 \\ A_2 = -1/2A_3 + 1/2A_4 + 1/2A_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Però abbiamo dovuto risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \end{cases}$$

rispetto alle variabili A_1, A_2 . Se avessimo scelto le variabili A_3, A_5 la soluzione sarebbe stata immediata. $\square$

Esercizio 12.24. [FFE12] *Determinare il massimo numero di righe linearmente indipendenti, r , della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & -4 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scelte r righe indipendenti, trovare le descrizioni delle rimanenti da queste mediante combinazioni lineari.

Soluzione. Ripetiamo l'esercizio precedente col metodo dei tag-vettori

```
M1:=Mat([[ 3,  2,  2,  1,  0,  1,  1,0,0,0,0],
          [ 3,  2,  5,  2,  1,  0,  0,1,0,0,0],
          [-3, -2, -11, -4, -3,  2,  0,0,1,0,0],
          [ 6,  4,  1,  1,  1,  1,  0,0,0,1,0],
          [-3, -2,  -2, -1, -2,  1,  0,0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
      2^a-1*1^a [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
      3^a+1*1^a [0, 0, -9, -3, -3, 3, 1, 0, 1, 0, 0]
      4^a-2*1^a [0, 0, -3, -1, 1, -1, -2, 0, 0, 1, 0]
      5^a+1*1^a [0, 0, 0, 0, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=3
```

Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
 ----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
 3^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0]
 4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0]
 0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
 Scambio la 3^a e la 4^a riga
 Adesso la matrice e'
 Mat([[3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 1]])
 Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=2
 Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
 ----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0]
 0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0]
 5^a+1*3^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 1, 0, 1, 1]

e fin qui avremmo trovato le stesse relazioni lineari

$$\begin{cases} -2A_1 + 3A_2 + A_3 = 0 \\ -2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = 0 \end{cases}$$

Ma continuiamo la riduzione, il che vuol dire che stiamo risolvendo il sistema delle relazioni con Gauss

Ho trovato il pivot in posizione A[4, 7]=-2
 Cancello la 7^a colonna, sotto il pivot
 ----- [3, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 3, 1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 0, 0, 2, -2, -3, 1, 0, 1, 0]
 ----- [0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 1, 0, 0]
 5^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, -1, 1, 1]

Dalla quarta e quinta riga della matrice leggiamo immediatamente che

$$A_1 = 3/2A_2 + 1/2A_3 \text{ e } A_2 = -1/2A_3 + 1/2A_4 + 1/2A_5$$

□

Esercizio 12.25. [FFE13] *Determinare il massimo numero di righe linearmente indipendenti, r , della matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & -4 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e scelte r righe indipendenti, trovare le descrizioni delle rimanenti da queste mediante combinazioni lineari.

Soluzione. Ripetiamo l'esercizio precedente con la definizione: cerchiamo le $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 A_1 + \dots + x_5 A_5 = \underline{0} \Leftrightarrow x_1(3, 2, 2, 1, 0, 1) + \dots + x_5(-3, -2, -2, -1, -2, 1) = \underline{0}$$

ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -11 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema $A^T \underline{x} = \underline{0}$

```
MT:=Transposed(M);
MT:=Mat([[3, 3, -3, 6, -3],
         [2, 2, -2, 4, -2],
         [2, 5, -11, 1, -2],
         [1, 2, -4, 1, -1],
         [0, 1, -3, 1, -2],
         [1, 0, 2, 1, 1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(MT);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cannello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 3, -3, 6, -3]
      2^a-2/3*1^a [0, 0, 0, 0, 0]
      3^a-2/3*1^a [0, 3, -9, -3, 0]
      4^a-1/3*1^a [0, 1, -3, -1, 0]
      0 sotto pivot[0, 1, -3, 1, -2]
      6^a-1/3*1^a [0, -1, 3, -1, 2]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 3, -3, 6, -3],
     [0, 3, -9, -3, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 1, -3, -1, 0],
     [0, 1, -3, 1, -2],
     [0, -1, 3, -1, 2]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cannello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 3, -3, 6, -3]
----- [0, 3, -9, -3, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0]
      4^a-1/3*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
      5^a-1/3*2^a [0, 0, 0, 2, -2]
      6^a+1/3*2^a [0, 0, 0, -2, 2]
Scambio la 3^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[3, 3, -3, 6, -3],
     [0, 3, -9, -3, 0],
     [0, 0, 0, 2, -2],
```



```
[0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, -2, 2]])
```

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=2

Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot

```
----- [3, 3, -3, 6, -3]
----- [0, 3, -9, -3, 0]
----- [0, 0, 0, 2, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0]
6^a+1*3^a [0, 0, 0, 0, 0]
```

Abbiamo che il rango è 3, dato che ci sono 3 pivot. Abbiamo anche che la prima, seconda e quarta colonna sono indipendenti. Lo sono quindi la prima, terza e quarta riga della matrice M , visto che stavamo lavorando sulla trasposta M^T . Vogliamo trovare le relazioni, ovvero le soluzioni. Continuiamo con la riduzione all'indietro, mettendo la matrice in forma standard.

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1

```
1^a+1/3 [1, 1, -1, 2, -1]
2^a+1/3 [0, 1, -3, -1, 0]
3^a+1/2 [0, 0, 0, 1, -1]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
```

Cancello la colonna sopra il 4 pivot

```
1^a+2*3^a [1, 1, -1, 0, 1]
2^a+1*3^a [0, 1, -3, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, -1]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
```

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

```
1^a-1*2^a [1, 0, 2, 0, 2]
----- [0, 1, -3, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, -1]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0, 0]
```

ed abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 3x_3 + x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases}$$

Sostituiamo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow (-2x_3 - 2x_5, 3x_3 + x_5, x_3, x_5, x_5) = x_3(-2, 3, 1, 0, 0) + x_5(-2, 1, 0, 1, 1)$$

Quindi abbiamo le relazioni, al variare delle variabili x_3, x_5 . Per esempio, se

- $x_3 = 1, x_5 = 0$ che ci dà che $(-2, 3, 1, 0, 0)$ è soluzione ed quindi abbiamo

$$-2A_1 + 3A_2 + A_3 = \underline{0} \longrightarrow A_1 = 3/2A_2 + 1/2A_3$$

- $x_3 = 0, x_5 = 1$ che ci dà che $(-2, 1, 0, 1, 1)$ è soluzione ed quindi abbiamo

$$-2A_1 + A_2 + A_4 + A_5 = \underline{0} \longrightarrow A_2 = 1/2A_3 + 1/2A_4 + 1/2A_5$$

□

12.6 Formula di Cramer e formula dell' inversa

Teorema 12.26 (Cramer - dimostrazione non vista in classe e non richiesta). [FFF37] *Sia dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ con $A = [A^1, \dots, A^n]$ non singolare (data per colonne). Sia*

$$B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{b}, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

la matrice uguale ad A tranne che la i -esima colonna viene sostituita con $\underline{b}$. Allora

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

Dimostrazione. Sappiamo già che la soluzione esiste unica, dato che A è non singolare. Partendo a ritroso dalla formula

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \Leftrightarrow \det(A)x_i = \det(B_i)$$

vorrei usare il teorema di Binet sulla formula

$$AX_i = B_i$$

Quindi devo trovare delle matrici X_i , con $i : 1, \dots, n$ tali che $\det X_i = x_i$ e $A \cdot X_i = B_i$.

Costruiamo X_i **per colonne**:

$$X_i = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1}, \underline{x}, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n)$$

Per costruzione, $\det X_i = x_i$. Se moltiplichiamo a destra A per X , ricordando che $A\underline{x} = \underline{b}$ ed usando le regola della moltiplicazione a destra (le colonne di X_i mi danno la combinazione lineare delle colonne di A per ottenere il risultato) otteniamo che $\forall i : 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} A \cdot X_i &= A \cdot (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1}, \underline{x}, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n) \\ &= (A \cdot \underline{e}_1, \dots, A \cdot \underline{e}_{i-1}, A\underline{x}, A \cdot \underline{e}_{i+1}, \dots, A \cdot \underline{e}_n) \\ &= (A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{b}, A^{i+1}, \dots, A^n) \\ &= B_i \end{aligned}$$

Applichiamo il teorema di Binet a questa uguaglianza

$$\begin{aligned} \det(A \cdot X_i) &= \det B_i \\ \det(A) \det(X_i) &= \det B_i \\ \det(A) x_i &= \det B_i \\ x_i &= \frac{\det B_i}{\det A} \end{aligned}$$

□

Osservazione 12.27. [FFA17] *Se la matrice è singolare, la regola di Cramer non si applica. Quando si parla di risolvere con Cramer si deve sempre avere che la matrice associata al sistema è non singolare.*

Esempio 12.28. [FFF61] *Risolvere con Cramer il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$*

Soluzione.

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

□

Esercizio 12.29 (Proposto). [FFF62] *Risolvere con Cramer il sistema*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 12.30. [FFF63] *In genere, per quanto elegante, la risoluzione con Cramer è molto costosa, dato che per un sistema $n \times n$ richiede il calcolo di $n + 1$ determinanti. Può essere competitiva con Gauss in condizioni particolari, per matrici 2×2 o se il sistema dipende da molti parametri.*

Formula per l'inversa

Definizione 12.31. [FFF66] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. La matrice $A^* = ((-1)^{i+j} \det A_{ji})_{ij}$ si dice matrice complemento di A .*

Esempio 12.32. [FFF90] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo A^ elemento per elemento*

$$(A^*)_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = -8$$

$$(A^*)_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{23} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -(-6) = 6$$

$$\begin{pmatrix} -8 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 6 & \bullet \end{pmatrix}$$

Completare la matrice per esercizio.

Proposizione 12.33 (Inversa - non dimostrata a lezione e non richiesta). [FFF38] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, invertibile e A^* la sua matrice complemento. Allora*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\det(A)} ((-1)^{i+j} \det A_{ji})_{ij}$$

Dimostrazione. Sia

$$b_{ij} = \frac{\det(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n)}{\det(A)} \quad \text{e } B = (b_{ij}) \text{ con } i, j : 1, \dots, n$$

Voglio dimostrare che B è inversa destra di A , ovvero che $AB = I_n$. Da questo segue che B è proprio l'inversa di A .

L'inversa X di A , che esiste unica, è la soluzione di dell'equazione $AX = I_n$, ovvero degli n sistemi

$$AX^1 = \underline{e}_1 \quad \dots \quad AX^j = \underline{e}_j \quad \dots \quad AX^n = \underline{e}_n$$

$$A \cdot (x_{i1})_{i:1,\dots,n} = \underline{e}_1 \quad \dots \quad A \cdot (x_{ij})_{i:1,\dots,n} = \underline{e}_j \quad \dots \quad A \cdot (x_{in})_{i:1,\dots,n} = \underline{e}_n$$

Usando la regola di Cramer su questi sistemi per trovare le soluzioni x_{ij} , vediamo che

$$x_{ij} = \frac{\det(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n)}{\det(A)}$$

e quindi $x_{ij} = b_{ij}$, $X = (x_{ij}) = (b_{ij}) = B$ e B è l'inversa di A . Notiamo altresì che se sviluppiamo con Laplace il determinante della matrice $(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n)$ secondo la i -esima riga abbiamo che, essendo l'unico elemento non nullo di questa riga quello nella colonna j -esima,

$$\det(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n) = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

e questo conclude la prova. □

Esempio 12.34. [FFF69] *Determiniamo l'inversa di $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Usando la formula*

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & (-1)^{2+1} \det A_{21} \\ (-1)^{1+2} \det A_{12} & (-1)^{2+2} \det A_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{ad - bc} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto qualche lezione fa lo stesso risultato attraverso una riduzione di Gauss, ma il calcolo era stato molto laborioso per la gestione dei parametri durante la riduzione.

Esempio 12.35. [FFF70] *Determiniamo l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

Svolgendo qualche calcolo vediamo che $\det A = -1 \neq 0$, e la matrice A è quindi invertibile e possiamo usare la formula per l'inversa. Raccolto il determinante (-1) la prima riga dell'inversa è

$$x_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$x_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{21} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -0 = 0$$

$$x_{13} = (-1)^{1+3} \det A_{31} = + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Usando la formula abbiamo quindi per ora

$$X = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Le altre due righe sono lasciate per esercizio. È chiaro che il calcolo dell'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

con la formula è molto costoso.

Osservazione 12.36. [FFF73] In genere, per quanto elegante, il calcolo dell'inversa con teorema precedente è estremamente costoso, dato che per una matrice $n \times n$ richiede il calcolo di n^2 determinanti $(n-1) \times (n-1)$. Può essere competitiva con Gauss in condizioni molto particolari, in particolare se la matrice dipende da molti parametri.

Esercizio 12.37. [FFZ73] Calcoliamo con la formula l'inversa della matrice generica 3×3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1}$$

[Soluzione:]

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-ceg + bfg + cdh - afh - bdi + aei} \begin{pmatrix} -fh + ei & ch - bi & -ce + bf \\ fg - di & -cg + ai & cd - af \\ -eg + dh & bg - ah & -bd + ae \end{pmatrix}$$

Esempio 12.38. [FFQ23] I vettori $(1, 2, 3, 1, 4)$, $(4, 2, 5, 2, 2)$, $(5, -2, 1, 1, -8)$ non sono linearmente indipendenti, dato che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

ha tutte le sottomatrici 3×3 singolari. (Fare i conti per esercizio, ci sono 10 sottomatrici 3×3). Che i tre vettori siano linearmente dipendenti si può vedere anche notando che

$$-3(1, 2, 3, 1, 4) + 2(4, 2, 5, 2, 2) = (5, -2, 1, 1, -8)$$

In questo caso, se non si nota ad occhio la relazione lineare (difficile). È molto più efficace usare la riduzione di Gauss

Esempio 12.39. [FFQ77] I vettori $(1, 2, 3, 1, 4)$, $(4, 2, 5, 2, 2)$, $(5, -2, 1, 1, -8)$ non sono linearmente indipendenti,

```
A:=Mat([[1,2,3,1,4],
        [4,2,5,2,2],
        [5,-2,1,1,-8]]);
RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 1, 4]
```

```

2^a-4*1^a [0, -6, -7, -2, -14]
3^a-5*1^a [0, -12, -14, -4, -28]

```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-6

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1,  2,  3,  1,  4]
----- [0, -6, -7, -2, -14]
3^a-2*2^a [0,  0,  0,  0,  0]

```

La prima e seconda riga sono linearmente indipendenti. La prima, seconda e terza riga sono linearmente dipendenti.

Esempio 12.40. [FFA62] Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ risolvere con Cramer il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sapendo che $\det A = ad - bc \neq 0$

Soluzione.

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 3 & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{d - 3b}{ad - bc} \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{3a - c}{ad - bc}$$

□

Esercizio 12.41 (Proposto). [FFA63] Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & b & c \\ 3 & a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Hint: risolvere con Cramer, usare la regola del Sarrus per il determinante.

Se $-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c \neq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab - 3b^2 + 2c}{-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c} \\ y &= \frac{-2ac + 3b}{-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c} \\ z &= \frac{-a^2 + 3ab - 3}{-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c} \end{aligned}$$

Risolvere per esercizio nel caso $-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c = 0$ (calcoli lunghi).

□

Esercizio 12.42. [MA03] Usando Cramer, risolvere al variare dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} ax + 2y - az = a \\ ax + (a + 1)y = 2 \\ (a + 1)x + 2ay + (a + 2)z = -a \end{cases}$$

Soluzione. Sia A la matrice incompleta e A_x, A_y, A_z le tre matrici di sostituzione di Cramer, abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -a \\ a & a+1 & 0 \\ a+1 & 2a & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A_x = \begin{pmatrix} a & 2 & -a \\ 2 & a+1 & 0 \\ -a & 2a & a+2 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} a & a & -a \\ a & 2 & 0 \\ a+1 & -a & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A_z = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ a & a+1 & 2 \\ a+1 & 2a & -a \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i quattro determinanti con la regola del Sarrus creando la matrice di Sarrus, cominciando con il determinante di A

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & 2 & -a & a & 2 \\ a & a+1 & 0 & a & a+1 \\ a+1 & 2a & a+2 & a+1 & 2a \end{array} \right)$$

e svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned} \det A &= a \cdot (a+1) \cdot (a+2) + 2 \cdot 0 \cdot (a+1) + (-a) \cdot a \cdot (2a) \\ &\quad - a \cdot 0 \cdot (2a) - 2 \cdot a \cdot (a+2) - (-a) \cdot (a+1) \cdot (a+1) \\ &= a^3 + 3a^2 + 2a + 0 + -2a^3 - 0 - (2a^2 + 4a) - (-a^3 - 2a^2 - a) \\ &= 3a^2 - a = a(3a - 1) \end{aligned}$$

Abbiamo che $\det A = 0 \iff a = 0, \frac{1}{3}$. Trattiamo tre casi $a = 0$, $a = \frac{1}{3}$ e $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{3}$ separatamente.

Poniamo $a = 0$ nel sistema dato ottenendo

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ y = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

che è chiaramente impossibile.

Poniamo adesso $a = \frac{1}{3}$ nel sistema dato ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y = 2 \\ \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}z = -\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x + 6y - z = 1 \\ x + 4y = 6 \\ 4x + 2y + 7z = -1 \end{cases}$$

con matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che il determinante dell'incompleta è 0 ed è immediato vedere che la sottomatrice $B_{(1,2);(1,2)}$ è non singolare, quindi il rango della matrice incompleta è uguale a 2. La sottomatrice $B_{(1,2,3);(2,3,4)}$ della matrice completa è non singolare, dato che

$$\det B_{(1,2,3);(2,3,4)} = \det \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = -240$$

(basta sviluppare per la seconda riga o colonna) quindi il rango della completa è 3 ed il sistema dato non ha soluzioni per $a = \frac{1}{3}$.

Per ultimo studiamo il caso $a \neq 0, \frac{1}{3}$: il determinante della matrice completa è non nullo e quindi per il teorema di Rouché-Capelli esiste un' unica soluzione che possiamo calcolare con la regola di Cramer. Procedendo come prima calcoliamo

$$\begin{aligned}\det A_x &= -2a^2 - 2a - 8 \\ \det A_y &= 2a^2 + 6a = 2a(a + 3) \\ \det A_z &= -5a^2 + 3a + 4\end{aligned}$$

La soluzione, unica ma dipendente dal parametro a (per ogni valore di $a \neq 0, \frac{1}{3}$ c'è una sola soluzione) è

$$\begin{aligned}x &= \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-2a^2 - 2a - 8}{a(3a - 1)} \\ y &= \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{2a(a + 3)}{a(3a - 1)} = \frac{2(a + 3)}{3a - 1} \\ z &= \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-5a^2 + 3a + 4}{a(3a - 1)}\end{aligned}$$

In questo caso la risoluzione con Gauss avrebbe comportato delle difficoltà per la presenza del parametro a , che complica i calcoli e può portare a dover trattare casi particolari spurii. $\square$

12.7 Esercizi proposti

Dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 12.43. [EEE76] *[Riga/colonna somma di altre] Se $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$,*

$$\det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{v} + \underline{w}}_i, \dots, A_n)) = \det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{v}}_i, \dots, A_n)) + \det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{w}}_i, \dots, A_n))$$

Esercizio 12.44. [GG25] *Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 9 \\ a & b & b & 2 & -1 \\ a & b & b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: il rango della matrice è 2 se $a, b = 0$, altrimenti 3. $\square$

Esercizio 12.45. [GG06] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ x + y + z + t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \\ 3x + y + 5z + 7t + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema.

Soluzione. Esistono ∞^1 soluzioni. □

Esercizio 12.46. [GG07] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + 3z + 4t + v - 4 = 0 \\ 2x + y + 3z + u + v - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 9z + 4t + u - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t + u = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema e determinarne le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni. □

Esercizio 12.47. [GG80] Dati $a, b \in \mathbb{R}$ ed il sistema

$$\mathcal{F} : \begin{cases} -x + 2z + a + b = 0 \\ x - y - z - a + 2 = 0 \\ x + y + z + a - 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni al variare di a, b .

Soluzione. Esiste un'unica soluzione. □

Esercizio 12.48. [GG81] Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2xk + 2yk + 2y + 2zk + 4z + 2k + 4 = 0 \\ xk + yk + y + zk + 2z + k + 2 = 0 \\ xk - zk + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k .

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema è impossibile; Se $k = -1$ ci sono ∞^2 soluzioni; Se $k \neq 0, -1$, ∞^1 soluzioni. □

Esercizio 12.49. [GGW81] Al variare di $a, b, k \in \mathbb{R}$ determinare il rango delle matrici

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sol:4}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2a-1 & -a+1 & -a+7 & 12 & -2a+12 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sol:4}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sol:4}$$

Esercizio 12.50. [GGW82] Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare quattro colonne linearmente indipendenti nella matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ a^2 & 0 & 2 & b & 3a - 2b \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.51. [GGT83] Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare due righe linearmente indipendenti nella matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & (a+b)^2 & 3 \\ a-b & b & a^2 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 & a^2+1 & b \\ -3 & \pi & 6 & 12 & \sqrt{5} \\ a^2 & 0 & a+b & b & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.52. [GGW84] È possibile trovare una matrice $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ le cui entrate dipendono da un parametro $a \in \mathbb{K}$ che sia sempre non singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma possa essere singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Esercizio 12.53. [GGW85] È possibile trovare una matrice $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ le cui entrate dipendono da un parametro $a \in \mathbb{K}$ che sia sempre singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma possa essere non singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Esercizio 12.54. [GGW86] È possibile trovare un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ che abbia soluzione unica se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma non se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Esercizio 12.55. [GG82] Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2xk - 2x + yk - y + zk - 3z + 6 = 0 \\ 2xk - 2x + 3yk + 2y + 4zk + 11 = 0 \\ xk - x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k .

Soluzione. Se $k = 0, \pm 1$ il sistema è impossibile, se $k \neq 0, \pm 1$, il sistema ha un'unica soluzione. □

Esercizio 12.56. [GG77] Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} xk + y + 2z + 3 = 0 \\ xk + y + 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k .

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema è impossibile; se $k \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione. □

Esercizio 12.57 (Proposto). [FFA00] Introduciamo l'operazione sostituzione di colonna con combinazione lineare di colonne: $A^j \rightarrow \alpha A^j + \beta A^i$, con $\alpha \neq 0$. Per cosa posso usare questa nuova operazione e con che cautele?

12.8 Terza prova di autovalutazione

[Auto3] [Tempo stimato 1h]

1. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ calcolare $\det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 & a & 2-a \\ a & 1 & 0 & 2 & a^3 \\ 3 & 0 & 0 & a & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Soluzione. Sol: $\det(A) = -3(a^2 + 1)$. □

2. Al variare di $x, y, z \in \mathbb{R}$ determinare il rango della matrice $M := \begin{pmatrix} x & y & -1 & z \\ 1 & z & x-2 & 3 \end{pmatrix}$

Soluzione. Il rango di M è 1 se $x = 1$ e $y = z = 3$; il rango di M è 2 altrimenti. □

3. Dati i parametri $a, k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} y + 2z = 2a + 1 \\ xk + 2z = 2a + 1 \\ xk + y + 2z = 3a + 1 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema al variare di a, k .

Soluzione. Se $k \neq 0$ Il sistema ha un'unica soluzione; Se $k = 0, a = 0$ ha ∞^1 soluzioni, se $k = 0, a \neq 0$ non ha soluzioni. □

Parte IV

Spazi Vettoriali

Capitolo 13

Tredicesima Lezione - Spazi Vettoriali

13.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 13.1. [GGG00] Sia $(V, +)$ un gruppo commutativo, $\mathbb{K}$ un campo e $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ un prodotto esterno. Diciamo che V è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale o $\mathbb{K}$ -spazio. Gli elementi $\underline{v} \in V$ si dicono vettori e si indicano sempre sottolineati. Gli elementi di $\mathbb{K}$ si dicono scalari.

Osservazione 13.2. [GGA09] Ricordiamo le proprietà di un prodotto esterno: dato $(V, +)$ gruppo commutativo, un operazione

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{K} &\rightarrow V \\ (\lambda, \underline{v}) &\mapsto \lambda, \underline{v} \end{aligned}$$

si dice prodotto esterno su V se soddisfa le seguenti proprietà.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \lambda(\underline{v} + \underline{w}) = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w}$ (Distributività del prodotto sulla somma).
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \underline{v} \in V \quad (\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$ (Distributività della somma sul prodotto).
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \underline{v} \in V \quad \lambda(\mu\underline{v}) = (\lambda\mu)\underline{v}$.
4. $\forall \underline{v} \in V \quad 1\underline{v} = \underline{v}$ e $0\underline{v} = \underline{0}$.

Osservazione 13.3. [GGG09] Ricordiamo la differenza tra $\underline{0} \in V$ e $0 \in \mathbb{K}$.

Esempio 13.4. [GGG01] $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ dove $\cdot$ è il prodotto esterno è un $\mathbb{K}$ -spazio.

Esempio 13.5. [GGG02] $\mathbb{K}[x], \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sono $\mathbb{K}$ -spazi con le operazioni ovvie.

Esempio 13.6. [GGG03] $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$ -spazio con le operazioni ovvie (il prodotto per uno scalare, non il prodotto tra matrici).

Esempio 13.7. [GGG04] I vettori geometrici di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ centrati sull'origine sono un $\mathbb{R}$ -spazio con le operazioni ovvie.

Esempio 13.8. [GGG05] $\mathbb{C}$ è sia un $\mathbb{C}$ spazio (ovvio) che un $\mathbb{R}$ -spazio, dato che $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo commutativo e il prodotto

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, a + ib) &\mapsto \lambda a + i\lambda b \end{aligned}$$

è ben definito e soddisfa le condizioni di prodotto esterno

Esercizio 13.9. [GGG11] [Proposto] Dati due campi $\mathbb{K}_1 \supseteq \mathbb{K}_2$, dimostrare che $\mathbb{K}_1$ è un $\mathbb{K}_2$ -spazio.

Esempio 13.10. [GGG06] $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \supset \mathbb{Q}$ è un $\mathbb{Q}$ -spazio con le operazioni ovvie. Non è un $\mathbb{R}$ spazio perché l'operazione di prodotto esterno per un elemento di $\mathbb{R}$ non è ben definita - $\pi(1 + \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

13.2 Sottospazi

Definizione 13.11. [GGG13] Dato il K -spazio $(V, +, \cdot)$ e $W \subseteq V$, diciamo che W è $\mathbb{K}$ -sottospazio di V se e solo se W è chiuso rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione (esterna) per elementi di $\mathbb{K}$, ovvero se il risultato di tali operazioni su elementi di W appartiene ancora a W . In altre parole, W è $\mathbb{K}$ -sottospazio di V se e solo se

- $\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \underline{w}_2 \in W \quad \lambda \underline{w}_2 \in W$

Scriveremo $W \underset{SSP}{\subseteq} V$.

Osservazione 13.12. [GGR13] La definizione precedente è equivalente se si sostituisce alle condizioni

- $\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \underline{w}_2 \in W \quad \lambda \underline{w}_2 \in W$

la condizione

$$\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \in W$$

Dato un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V , un suo $\mathbb{K}$ -sottospazio W è anch'esso un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni. Le verifiche sono semplici, perché tutto si scarica sul fatto che V è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, basta che le operazioni siano chiuse in W .

Esempio 13.13. [GGG14] L'insieme $r : \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ è un $\mathbb{R}$ -sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare la chiusura su somma ed il prodotto. Dati $\underline{v}, \underline{w} \in r$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Per definizione di r , $\exists x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{v} = (x, 2x)$ e $\underline{w} = (y, 2y)$. Allora

$$\underline{v} + \underline{w} = (x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2(x + y)) \in r$$

per la definizione di r

2. $\lambda \underline{w} \in r$. Dimostrazione analoga.

□

N.B. Si tratta della retta $r : y = 2x$, passante per l'origine.

Esempio 13.14. [GGT14] L'insieme $r' : \{(a, 3a - 1) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ non è un $\mathbb{R}$ -sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Vediamo facilmente che $(0, 0) \notin r'$, dato che

$$(0, 0) \in r' \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 0 = 3a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ \frac{1}{3} = a \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

□

N.B. Si tratta della retta $r' : y = 3x - 1$, che non passa per l'origine.

Esempio 13.15. [GGW14] L'insieme $V : \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ non è un $\mathbb{C}$ -sottospazio di $\mathbb{C}^2$.

Dimostrazione. È facile verificare che per V vale la proprietà di omogeneità, ma non la somma:

- Il punto $(1, i) \in V$ dato che $1^2 + i^2 = 0$.
- Il punto $(1, -i) \in V$ dato che $1^2 + (-i)^2 = 0$.
- Ma $(1, i) + (1, -i) = (2, 0) \notin V$ dato che $2^2 + 0^2 \neq 0$.

□

N.B. Dato che $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ si tratta dell'unione delle due rette $y = ix$ e $y = -ix$. Abbiamo preso i nostri due punti uno su una retta ed uno sull'altra.

Esempio 13.16. [GGG36] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$ di grado uguale a $d \geq 1$ non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$ dato che questo insieme è chiuso sul prodotto per uno scalare ma non è chiuso per la somma, per esempio $x^2 + x, x^2 - 1 \in \mathbb{K}[x]_{=2}$ ma $x^2 + x - x^2 - 1 = x - 1 \notin \mathbb{K}[x]_{=2}$.*

Esempio 13.17. [GGG37] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$ di grado minore od uguale a d formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$*

$$\mathbb{K}[x]_{\leq d} = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(p(x)) \leq d\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}[x]$$

Dato che somma di polinomi di grado minore od uguale a d ha ancora grado minore od uguale a d , e lo stesso vale per il prodotto per uno scalare.

Esempio 13.18. [GGG18] *L'insieme $\{(a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ è un $\mathbb{R}$ -sottospazio di $\mathbb{R}^3$. N.B. Si tratta del piano $\pi : x - y = 0$*

Esempio 13.19. [GGG16] *Ogni retta passante per l'origine è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$*

Proposizione 13.20. [GGG22] *Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{K})$*

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \underline{b} = \underline{0}$$

Dimostrazione.

- Dimostriamo per il caso $\underline{b} = \underline{0}$. Vediamo la chiusura: se $\underline{c}_1, \underline{c}_2 \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ vogliamo dimostrare che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ A(\lambda \underline{c}_1 + \mu \underline{c}_2) = \underline{0}$. Abbiamo infatti

$$A(\lambda \underline{c}_1 + \mu \underline{c}_2) = \lambda A \underline{c}_1 + \mu A \underline{c}_2 = \lambda \underline{0} + \mu \underline{0} = \underline{0}$$

- Se $\underline{b} \neq \underline{0}$ abbiamo che $\underline{0}$ non è soluzione del sistema $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e quindi $\underline{0} \notin \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e quindi $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ non può essere uno spazio vettoriale.

□

13.3 Generatori

Definizione-Proposizione 13.21. [GGA24] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Allora l'insieme*

$$\text{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \{\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \underset{SSP}{\subseteq} V$$

è un $\mathbb{K}$ -sotto spazio di V .

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \text{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ abbiamo

$$\alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 \in \text{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$$

ovvero che

$$\exists \lambda_1'', \dots, \lambda_n'' \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 = \lambda_1'' \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n'' \underline{v}_n$$

Infatti

$$\underline{w}_1 \in \text{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{w}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

$$\underline{w}_2 \in \text{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \Leftrightarrow \exists \lambda_1', \dots, \lambda_n' \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{w}_2 = \lambda_1' \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n' \underline{v}_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 &= \alpha(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) + \beta(\lambda_1' \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n' \underline{v}_n) \\ &= (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_1') \underline{v}_1 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \lambda_n') \underline{v}_n \\ &= \lambda_1'' \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n'' \underline{v}_n \end{aligned}$$

con

$$\lambda_1'' = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_1', \dots, \lambda_n'' = \alpha \lambda_n + \beta \lambda_n'$$

□

Osservazione 13.22. [GGQ25] *A meno che non sia necessario esplicitare il campo a cui ci riferiamo per evitare ambiguità, scriveremo Span al posto di $\text{Span}_{\mathbb{K}}$.*

Definizione 13.23. [GGG24] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Se $V = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dicono generatori di V come $\mathbb{K}$ -spazio o generano V come $\mathbb{K}$ -spazio o sono un sistema di generatori di V come $\mathbb{K}$ -spazio.*

Esempio 13.24. [GGA25] *I vettori $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ generano $\mathbb{K}^n$.*

Dimostrazione. Per ogni vettore $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_n(0, \dots, 0, 1) = a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_n \underline{e}_n$$

□

Esempio 13.25. [GGA31] *I polinomi $1, x, x^2, \dots, x^d \in \mathbb{K}[x]$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$.*

Dimostrazione. Infatti

$$\forall p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \in \mathbb{K}[x]_{\leq d} \quad \exists c_1, \dots, c_d \in \mathbb{K} \text{ tali che } a_0 \cdot 1 + \dots + a_d \cdot x^d = p(x)$$

e si dicono *generatori canonici* di $\mathbb{K}_d \leq d[x]$. Dato che $1, x, x^2, \dots, x^d \in \mathbb{K}[x]$ e che ogni polinomio di $\mathbb{K}_d \leq d[x]$ sta in $\text{Span}(1, x, x^2, \dots, x^d)$ possiamo dire che $\text{Span}(1, x, x^2, \dots, x^d) = \mathbb{K}_d \leq d[x]$. □

Esempio 13.26. [GGA78] *I polinomi $1, x, x^2, x^2 + x + 1 \in \mathbb{K}[x]$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$.*

Dimostrazione. Infatti, per ogni $f(x) \equiv a^2 + bx + c \in \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ il sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta(x^2 + x + 1) &\equiv a^2 + bx + c \\ \begin{cases} \alpha + \delta = c \\ \beta + \delta = b \\ \gamma + \delta = a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 1, -c \\ 0, 1, 0, 1, -b \\ 0, 0, 1, 1, -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \underline{0} \end{aligned}$$

ammette ∞^{4-3} soluzioni, come si vede immediatamente applicando il Teorema di Rouché-Capelli. $\square$

Esempio 13.27. [GGF31] *L'insieme $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ forma un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale con neutro additivo $0_{m \times n}$ e le operazioni di somma di matrici e prodotto per uno scalare (esterno).*

Dimostrazione. Facile verifica. $\square$

Definizione 13.28. [GGG32] *Le matrici $E_{ij} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ con tutti gli elementi nulli tranne quello in posizione ij , che vale 1, si dicono generatori canonici di $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Per esempio,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{23} \in \text{Mat}_{4 \times 3}(\mathbb{K})$$

Osservazione 13.29. [GGG33] *Abbiamo che $\text{Span}_{\mathbb{K}}(\{E_{ij} \mid i: 1, \dots, m, j: 1, \dots, n\}) = \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$*

13.4 Basi

Problema 13.30. [GGG40]

- Quali sistemi di generatori sono "speciali"?
- Quanti generatori sono necessari per generare tutto uno spazio (o sottospazio) vettoriale?

Decidiamo di dare un posto speciale ai generatori che non hanno relazioni lineari tra loro, ovvero sono linearmente indipendenti.

Definizione 13.31 (Base). [GGG41] *Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Se*

1. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.
2. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generano V . Oppure, equivalentemente, $\text{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V$ o $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono un sistema di generatori di V come $\mathbb{K}$ -spazio

Diciamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono o formano una base di V come $\mathbb{K}$ -spazio

Esempio 13.32 (Base). [GGG51] *È facile verificare che*

1. $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ formano E_n , una base di $\mathbb{K}^n$, detta la base canonica di $\mathbb{K}^n$.
2. I $d+1$ polinomi $1, x, \dots, x^n$ formano una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$, detta la base canonica di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$.
3. Le matrici $\{M_{ij}\}_{i:1, \dots, m, j:1, \dots, n}$ formano una base di $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, detta la base canonica di $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ o E_{mn} .

Problema 13.33. [GGG45] *Una base esiste sempre per ogni spazio? Se ne esistono, quante ne esistono? È possibile determinare computazionalmente una base di uno spazio V ? A partire da dei generatori? A partire da vettori linearmente indipendenti?*

Definizione 13.34. [GGG80] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio. I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ si dicono sistema minimale di generatori di V se generano V e se togliendone uno non lo generano più. Più precisamente se valgono le due condizioni*

- $V = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$.
- $\forall i \quad V \neq \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n)$.

Proposizione 13.35. [GGG81] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio e $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Allora*

$$\mathcal{B} \text{ è base} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ è un sistema minimale di generatori di } V$$

Dimostrazione. Proviamo che se $\mathcal{B}$ è base allora è un sistema minimale di generatori: basta provare che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n$ non generano $\underline{v}$. Se infatti, per assurdo,

$$\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n) = V$$

avremmo che $\underline{v}_i$ sarebbe esprimibile come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n$, e questo è assurdo in quanto $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Proviamo che se $\mathcal{B}$ è un sistema minimale di generatori di V allora è base. Basta dimostrare che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che non lo siano. Allora $\exists i$ tale che $\underline{v}_i$ è combinazione lineare degli altri. Ma questo implica che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_n$ generano V , dato che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lo generano e $\underline{v}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \underline{v}_j$. $\square$

Osservazione 13.36. [GGG91] *Possiamo eliminare da un sistema di generatori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di V i vettori dipendenti dagli altri e quando raggiungiamo un sistema di generatori minimale di V abbiamo ottenuto una base.*

Definizione 13.37. [GGG50] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio. I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ si dicono sistema massimale di vettori linearmente indipendenti per V se non esiste $\underline{w} \in V$ tale che $\underline{w}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Proposizione 13.38. [GGG93] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio e $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ linearmente indipendenti. Allora*

$$\mathcal{B} \text{ è base} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in } V$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\mathcal{B}$ è base, allora è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in V . Supponiamo per assurdo che esista $\underline{w} \in V$ tale che $\underline{w}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ siano linearmente indipendenti. Allora $\underline{w}$ non sarebbe combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, ma questo è assurdo perché $\mathcal{B}$ è base, e quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generano tutto V .

Dimostriamo che se $\mathcal{B}$ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in V , allora è base. Basta dimostrare che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generano V , dato che sono già linearmente indipendenti. Prendiamo un qualunque vettore $\underline{v} \in V$; vogliamo dimostrare che $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Per ipotesi, $\underline{v}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti, quindi esistono $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$\lambda \underline{v} + \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \text{ con } \lambda \neq 0.$$

Se avessimo $\lambda \neq 0$, potremmo scrivere $\underline{v} = \sum_i -\frac{\lambda_i}{\lambda} \underline{v}_i$ ed avere la tesi. Ma non è possibile avere $\lambda = 0$, dato che questo implicherebbe

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$$

dato che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, ma allora avremmo $\lambda = 0$. $\square$

Osservazione 13.39. [GGG94] Aggiungo uno ad uno ad un vettore $\underline{v}_1 \in V$ dei vettori $\underline{v}_i \in V$ in modo tale che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ siano sempre linearmente indipendenti, **SE** ad un certo punto non riesco più a procedere (vuol dire che i vettori che ho trovato generano tutto lo spazio) ho trovato una base.

Osservazione 13.40. [GGX94] Se ho un sistema di generatori finito di V , se continuo a togliere quelli ridondanti fino a trovare un sistema di generatori minimale ad un certo punto devo fermarmi ed ho trovato una base.

Esempio 13.41. [GGG97] In $\mathbb{K}[x]$ posso creare gli insiemi di vettori

$$1 \quad 1, x \quad 1, x, x^2 \quad 1, x, x^2, x^3, \dots$$

tutti composti da vettori linearmente indipendenti senza mai fermarmi. Quindi $\mathbb{K}[x]$ non può avere base.

13.5 Rappresentazione unica e coordinate

Vediamo come si può rappresentare un vettore di uno spazio rispetto ad un sistema di generatori dello spazio stesso.

Esempio 13.42. [GGE46] Sia $\underline{v}_1 = (1, 2), \underline{v}_2 = (1, 3), \underline{v}_3 = (1, 4)$ un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$. Allora il sistema

$$\begin{aligned} x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 &= (1, 1) \\ x(1, 2) + y(1, 3) + z(1, 4) &= (1, 1) \\ (x + y + z, 2x + 3y + 4z) &= (1, 1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ammette infinite soluzioni, tra le quali $(1, 1, -1)$ e $(5, -7, 3)$; infatti

$$\begin{aligned} (1, 1) &= 1 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (1, 3) - 1 \cdot (1, 4) = 1\underline{v}_1 + 1\underline{v}_2 - 1\underline{v}_3 \\ &\quad e \\ (1, 1) &= 5(1, 2) - 7(1, 3) + 3(1, 4) = 5\underline{v}_1 - 7\underline{v}_2 + 3\underline{v}_3 \end{aligned}$$

Notiamo che nell'esempio precedente i tre vettori ovviamente non formano una base di $\mathbb{R}^2$. Vediamo che l'unicità di rappresentazione vale solo per le basi.

Proposizione 13.43. [GGG46]

Sia dato un $\mathbb{K}$ spazio V e $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Allora B è base di V se e solo se per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esiste una unica n -pla di elementi di $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tale che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{v} \quad (13.1)$$

Dimostrazione.

- Dimostriamo che se B è base per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esiste una unica n -pla di elementi di $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tale che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{v}$$

Dato che i vettori $\underline{v}$ generano V , per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esistono scalari $\underline{\lambda}$ tali che $\underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{v}$. Vogliamo dimostrare l'unicità.

Supponiamo per assurdo che $\underline{\alpha} \neq \underline{\beta}$ e $\underline{\alpha} \cdot \underline{v} = \underline{\beta} \cdot \underline{v} = \underline{v}$. Allora avremmo

$$(\underline{\alpha} - \underline{\beta}) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

ma dato che i vettori $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti, questo implica

$$\underline{\alpha} - \underline{\beta} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{\beta}$$

assurdo.

- Dimostriamo che se per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esiste una unica n -pla di elementi di $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tale che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

allora B è base.

Dato che la n -pla esiste, B è un sistema di generatori. Dato che la n -pla esiste sempre unica, per ogni $\underline{v}$, esiste unica anche per $\underline{0}$ e quindi

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

ha solo la soluzione $\underline{\lambda} = \underline{0}$, che vuol dire che i vettori di B sono linearmente indipendenti.

□

Definizione 13.44. [GGG47] *Sia dato un $\mathbb{K}$ spazio V e una sua base $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Allora per ogni vettore $\underline{w} \in V$ gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ per cui $\underline{w} \cdot \underline{\lambda} = \underline{w}$ si dicono coordinate di $\underline{w}$ secondo la base B e possiamo scrivere $\underline{w} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_B$.*

Esempio 13.45. [GGG48] *Le coordinate sono uniche fissata una base. Rispetto a basi differenti un vettore può avere coordinate differenti*

In $\mathbb{R}^2$ il vettore $(1, 2)$ ha coordinate

- $1, 2$ rispetto alla base $E_2 = \underline{e}_1, \underline{e}_2$. Notiamo che $(1, 2) = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$. Scriviamo anche $(1, 2) = (1, 2)_{E_2}$.
- $1, 0$ rispetto alla base $B = (1, 2), (1, 3)$. Notiamo che $(1, 2) = 1 \cdot (1, 2) + 0 \cdot (1, 3)$. Scriviamo anche $(1, 2) = (1, 0)_B$.
- $1, -1$ rispetto alla base $B_1 = (3, 4), (2, 2)$. Notiamo che $(1, 2) = 1 \cdot (3, 4) - 1 \cdot (2, 2)$. Scriviamo anche $(1, 2) = (1, -1)_{B_1}$.
- $1, 1$ rispetto alla base $B_2 = (1, 0), (0, 2)$. Notiamo che $(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 2)$. Scriviamo anche $(1, 2) = (1, 1)_{B_2}$.

Osservazione 13.46. [GGG60] *In un certo senso, quando dò una base sto considerando uno spazio vettoriale come un $\mathbb{K}^n$, dato che stabilisco una corrispondenza biunivoca tra i vettori di V e le loro coordinate in un certo $\mathbb{K}^n$.*

Osservazione 13.47. [GGQ60] *Data una base $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di un $\mathbb{K}$ -spazio V Notiamo l'applicazione*

$$F_B: \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ \underline{v} & \mapsto & \text{coordinate di } \underline{v} \text{ rispetto a } B \end{array}$$

che è invertibile (è una corrispondenza biunivoca). La sua inversa è

$$F_B^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & V \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \end{array}$$

Valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad F_B(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) &= F_B(\alpha \underline{v}) + F_B(\beta \underline{w}) \\ \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad F_B^{-1}(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) &= F_B^{-1}(\alpha \underline{v}) + F_B^{-1}(\beta \underline{w}) \end{aligned}$$

13.6 Dimensione

Definizione 13.48. [GGA34] Dato un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V e uno suo sottospazio W generato da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, diciamo che un vettore generico di W è dato da $a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$ con parametri $a_1, \dots, a_n$. Vedremo più in dettaglio questo argomento quando avremo parlato di morfismi. Per ora notiamo che ogni vettore di W può essere scritto come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, e quindi ogni vettore di W può essere ottenuto dal vettore generico dando opportuni valori ad $a_1, \dots, a_n$

Esempio 13.49. [GGA27]

$$\begin{aligned} \text{Span}((1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 2)) &= \{ \alpha(1, 0, 0, 2) + \beta(0, 1, 1, 1) + \gamma(1, 2, 0, 2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \alpha + \gamma, \beta + 2\gamma, \beta, 2\alpha + \beta + 2\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Un vettore generico di $\text{Span}((1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 2))$ è $(\alpha + \gamma, \beta + 2\gamma, \beta, 2\alpha + \beta + 2\gamma)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Osservazione 13.50. [GGA39] Dato un $\mathbb{K}$ -spazio V possiamo definire un suo sotto spazio $W \subseteq_{SSP} V$ mediante un suo vettore generico. Questa descrizione si dice descrizione parametrica di W

Enunciamo ora il teorema del completamento che servirà per vedere che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi. Chiameremo questo numero *dimensione* dello spazio. L' esercizio seguente ci chiarirà il metodo dimostrativo.

Esercizio 13.51. [HHH16] Completare se possibile a base di $\mathbb{R}^5$ i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 1, 2, 0), \underline{v}_2 = (1, 2, 1, 4, 1), \underline{v}_3 = (1, 2, 2, 0, 0), \underline{v}_4 = (1, 2, -1, 10, 2) \in \mathbb{R}^5$$

Soluzione. Costruiamo la matrice che ha i vettori come righe e riduciamola a scala

```
M:=Mat([[1,2, 1, 2, 0],
        [1,2, 1, 4, 1],
        [1,2, 2, 0, 0],
        [1,2,-1,10, 2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 0]
----- [0, 0, 1, -2, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 2, 1]
      4^a+2*2^a [0, 0, 0, 4, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=2
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 2, 1, 2, 0]
----- [0, 0, 1, -2, 0]
----- [0, 0, 0, 2, 1]
4^a-2*3^a [0, 0, 0, 0, 0]

```

Non sono avvenuti scambi di riga. Questo ci dice che le prime tre righe della matrice (e quindi i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti e che il vettore $\underline{v}_4$ è combinazione lineare dei primi tre. I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ non possono essere quindi completati a base, ma i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sì.

I pivot sono nella prima, terza e quarta colonna. Affermiamo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_5$ è una base di $\mathbb{R}^5$. Basta dimostrare che i cinque vettori sono linearmente indipendenti, ovvero che il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basta sviluppare per la quarta e quinta riga per avere che il determinante di A è nullo se e solo se è non nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è non nullo in quanto triangolare superiore con tre pivot. Quindi $rk A = 5$ e $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_5$ è base di $\mathbb{R}^5$, completamente dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ $\square$

Teorema 13.52 (Del completamento). [GGG96a] *Sia V un K -spazio e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p \in V$ linearmente indipendenti. Sia $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ una base di V con $n > p$. Allora esistono (posso scegliere) $n - p$ vettori in B , siano $\underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-p}}$ tali che*

$$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-p}} \text{ siano una base di } V$$

(dico che ho completato i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ alla base $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-p}}$ di V).

N.B. Si afferma che esistono gli indici $i_1, \dots, i_{n-p}$ ma non si dice esplicitamente a priori come sceglierli. I vettori che scelgo sono in ordine casuale, non definito a priori, la notazione dei loro indici $i_1, \dots, i_{n-p}$ riflette questo fatto.

Dimostrazione. Scriviamo i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ nelle coordinate della base B ottenendo dei vettori di $\mathbb{K}^n$. Stiamo identificando i vettori di V con il vettore delle loro coordinate in base B . Stiamo quindi trasformando il nostro problema su V ad un problema su $\mathbb{K}^n$, dove possiamo usare la teoria delle matrici. Ricordiamo altresì che in coordinate B i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si scrivono, rispettivamente, come

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= 1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n = (1, 0, \dots, 0)_B \\ &\vdots \\ \underline{v}_n &= 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 1 \cdot \underline{v}_n = (0, \dots, 0, 1)_B \end{aligned}$$

Costruiamo la matrice per riga $A = [\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p]$ e riduciamola con Gauss alla matrice a scala S . Essendo le righe di A linearmente indipendenti per ipotesi nessuna si riduce a zero e la matrice S ha p pivot. Siano $j_1, \dots, j_{n-p}$ gli indici delle colonne senza pivot.

Dimostriamo che $S_1, \dots, S_p, \underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_{n-p}}$ sono base di V .

Costruiamo la matrice quadrata $C = [S_1, \dots, S_p, \underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_{n-p}}]$. Se calcoliamo il determinante con Laplace, sviluppando secondo le righe $p+1, \dots, n$ (quelle associate ai vettori della base B che abbiamo aggiunto) ci riduciamo al calcolo del determinante di una matrice quadrata $p \times p$ a scala con p pivot, che è non nullo.

La matrice C si ottiene riducendo a scala soltanto le prime p righe della matrice $[\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_{n-p}}]$, che quindi è anche essa non sigolare. I vettori

$$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p, \underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_{n-p}}$$

sono quindi linearmente indipendenti. È facile verificare che generano V (dettagliare per esercizio) e che quindi formano quindi una base di V $\square$

Corollario 13.53. [GGG98a] *Siano B, C basi di un $\mathbb{K}$ -spazio V . Allora B e C hanno lo stesso numero di elementi (hanno la stessa cardinalità, $\#B = \#C$).*

Dimostrazione. Sia $B_1 = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ e $B_2 = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$. Se $n = p$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo per assurdo che $p < n$. Possiamo allora completare $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ a base di V con $n-p$ vettori di B_2 . Ma questo è impossibile, dato che B_1 è già base e quindi sistema massimale di generatori. Abbiamo una contraddizione e quindi è assurdo supporre $p < n$. Procediamo analogamente per $p > n$. Abbiamo quindi dimostrato $p = n$. $\square$

Definizione 13.54. [GGG99] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio con base $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Diciamo che V ha dimensione B e scriviamo $\dim B = n$.*

Esempio 13.55. [GGB01]

- $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim \mathbb{K}[x]_d = d + 1$.
- $\dim \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$.

Discende immediatamente da quanto abbiamo visto sui sistemi minimali di generatori (cfr. 13.35, 13.36) che

Osservazione 13.56. [GGB30] *Se il $\mathbb{K}$ -spazio V ammette un sistema finito di generatori, ammette una base e ha quindi dimensione finita.*

Osservazione 13.57. [GGB02] $\mathbb{K}[x]$ non ha un sistema finito di generatori, e quindi non può avere base o dimensione.

Osservazione 13.58. [GGG88] *Ogni V $\mathbb{K}$ -spazio, ha almeno due sottospazi, detti sottospazi banali $V \underset{SSP}{\subseteq} V$ e $\{0\} \underset{SSP}{\subseteq} V$. Questi coincidono se e solo se $V = \{0\}$.*

La seguente osservazione ci aiuterà negli esercizi.

Osservazione 13.59. [HHH66] *Sia V uno spazio di dimensione n e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n+p}$, vettori in V . Allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n+p}$ sono linearmente dipendenti, per la definizione di dimensione.*

Proposizione 13.60. [HHH15] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio di dimensione finita n e $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ non banale. Allora*

- W ha dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$.
- $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

Dimostrazione.

- Dimostro che W ha dimensione finita e minore di n :

dato che W è non banale, esiste $\underline{w}_1 \in W$ non nullo, linearmente indipendente da se stesso. Se $\underline{w}_1$ è base di W , mi fermo e $\dim W = 1$. Altrimenti, cerco un vettore $\underline{w}_2 \in W$ tale che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ siano linearmente indipendenti. Se non ne trovo, vuol dire che $\underline{w}_1$ è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in W e quindi base, e $\dim W = 1$. Se lo trovo, continuo ad aggiungere $\underline{w}_j$ vettori di W tali che $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_j$ siano linearmente indipendenti. Non posso andare avanti all'infinito, perché quando ho i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n+1}$ questi sarebbero un sistema di vettori linearmente indipendenti anche in V , e questo è assurdo perché V ha dimensione n . Mi sono quindi dovuto fermare con $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$, $p \leq n$, e questo è un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti in W , e quindi base di W e $\dim W = p \leq n$.

- Dimostro che $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$. Se $W = V$ ovviamente $\dim W = \dim V$. Dimostriamo il viceversa:

Se $\dim W = n$ esiste una base di W di n elementi. Dato che questi sono $\dim V$ elementi linearmente indipendenti in W , lo sono anche in V . Dato che $\dim V = \dim W = n$ in V non ci possono essere più di n vettori linearmente indipendenti, quindi la base di W è formata da un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti di V , ed è quindi base di V .

□

Disende immediatamente dalla dimostrazione della proposizione precedente che

Corollario 13.61. [HHH65] *Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio V di dimensione n . Allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono base di V , dato che sono un sistema massimale di vettori indipendenti.*

Capitolo 14

Quattordicesima lezione - Esercizi

14.1 Complementi

Proposizione 14.1. [GGB24] *Dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ $\mathbb{K}$ -spazio e $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{K}$,*

1. $V = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \alpha \underline{v}_i + \beta \underline{v}_j, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n) = W$
2. $V = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \alpha \underline{v}_i + \beta \underline{v}_j) = W$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che $V \subseteq W$ e $V \supseteq W$ da cui $V = W$.

$V \supseteq W$ I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$ appartengono anche a V . Il vettore $\alpha \underline{v}_i + \beta \underline{v}_j$ è la combinazione lineare di due vettori di V e quindi appartiene a V .

$V \subseteq W$ I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$ appartengono anche a W . Ci rimane da dimostrare che anche il vettore $\underline{v}_i$ appartenga a W . Abbiamo che

$$\underline{v}_i = \frac{1}{\alpha}(\alpha \underline{v}_i + \beta \underline{v}_j - \beta \underline{v}_j)$$

e $-\beta \underline{v}_j \in W$, $(\alpha \underline{v}_i + \beta \underline{v}_j) \in W$ quindi la loro somma moltiplicata per uno scalare sta ancora in W , quindi $\underline{v}_i \in W$.

2. Lasciata per esercizio.

□

Corollario 14.2. [GGB25] *Data la matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ed una sua riduzione a scala S , abbiamo che $\text{Span}(A_1, \dots, A_m) = \text{Span}(S_1, \dots, S_m)$.*

Proposizione 14.3. [GGB55] *I vettori $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^n$ sono base di $\mathbb{K}^n$ se e solo se la matrice quadrata per righe (o per colonne) $[\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n]$ è non singolare.*

Traccia della dimostrazione. B è base se e solo se ho la rappresentazione unica, ovvero per ogni $\underline{v} \in V$ il sistema

$$[\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n] \cdot \underline{x} = \underline{v}$$

ha unica soluzione. Questo è vero se e solo se la matrice incompleta, quadrata $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ è non singolare. □

14.2 Esercizi svolti

14.2.1 Spazi vettoriali

Esercizio 14.4. [GGS32] *[Proposto] I polinomi $p_0(x), \dots, p_d(x) \in \mathbb{K}[x]$, con $\deg p_i(x) = i$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$.*

Esercizio 14.5. [GGA33] *I polinomi $x - 1, 2x + 2, x + 3 \in \mathbb{K}[x]$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\forall p(x) = ax + b \in \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \text{ tali che } \alpha(x - 1) + \beta(2x + 2) + \gamma(x + 3) \equiv ax + b$$

Vogliamo far vedere che il sistema seguente, nelle variabili α, β, γ e rispetto ad ogni scelta di parametri a, b ha soluzioni.

$$(\alpha + 2\beta + \gamma) + (-\alpha + 2\beta + 3\gamma) \equiv ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = a \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = b \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in forma matriciale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ -1 & 2 & 3 & b \end{array} \right)$$

Dato che la matrice incompleta ha rango 2 massimo, la matrice completa ha rango 2 e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzioni. $\square$

Esercizio 14.6. [GGA36] *Determinare se $(1, 2) \in \text{Span}((1, 3), (1, 1), (2, 0))$. Vediamo se il sistema*

$$\alpha(1, 3) + \beta(1, 1) + \gamma(2, 0) = (1, 2)$$

ammette soluzioni. Non è necessario trovarle. Scriviamo il sistema in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice completa associata al sistema

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Usiamo il teorema di Rouché-Capelli: Il rango della matrice incompleta è 2, dato che il minore $A_{(1,2);(1,2)}$ è non singolare. La matrice completa è forzata ad avere rango 2 e quindi esistono soluzioni. Abbiamo che $(1, 2) \in \text{Span}((1, 3), (1, 1), (2, 0))$

Esercizio 14.7. [GGA40] *Determinare se $x^3 + 2x^2 + x \in \text{Span}(x^3 + x, x^3 + x^2 + 3, 2x^3 + 2x + 1)$. Vediamo se il sistema*

$$\begin{aligned} \alpha(x^3 + x) + \beta(x^3 + x^2 + 3) + \gamma(2x^3 + 2x + 1) &\equiv_{\mathbb{K}[x]} x^3 + 2x^2 + x \\ (\alpha + \beta + 2\gamma)x^3 + \beta x^2 + (\alpha + 2\gamma)x + 3\beta + \gamma &\equiv_{\mathbb{K}[x]} x^3 + 2x^2 + x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \beta = 2 \\ \alpha + 2\gamma = 1 \\ 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ammette soluzioni. Scriviamo la matrice completa del sistema e vediamo il suo rango

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la terza riga con la prima

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo con Laplace secondo la prima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo con Laplace secondo la seconda riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è non singolare, quindi è non singolare anche la matrice completa, che ha rango quindi quattro. La matrice incompleta ha ordine 4×3 , il suo rango è quindi al massimo 3. Dato che il rango della completa è diverso dal rango dell'incompleta, il sistema non ha soluzioni, e quindi

$$x^3 + 2x + x \notin \text{Span}(x^3 + x, x^3 + x^2 + 3, 2x^3 + 2x + 1)$$

Esercizio 14.8. [KK11] Sia $\underline{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ e $V = \text{Span}_{\mathbb{R}}((1, 4, 2), (2, 3, 1))$. Stabilire se $\underline{v} \in V$.

Soluzione: Per rispondere alla domanda dobbiamo dire se

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (1, 2, 3) = a(1, 4, 2) + b(2, 3, 1)$$

Ovvero se esistono soluzioni al sistema lineare nelle variabili $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(1, 4, 2) + b(2, 3, 1) &= (1, 2, 3) \Rightarrow (a + 2b, 4a + 3b, 2a + b) = (1, 2, 3) \\ \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 4a + 3b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 4(1 - 2b) + 3b = 2 \\ 2(1 - 2b) + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ -5b = -2 \\ -3b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Che si vede facilmente essere impossibile. Quindi $\underline{v} \notin V$ □

Esercizio 14.9. [GGG92] Sia $\mathcal{B} = (1, 2), (1, 3), (1, 4)$ un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$. Costruiamo e riduciamo con Gauss la matrice

```
M:=Mat([[1,2],
        [1,3],
        [1,4]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [1, 2]
      2^a-1*1^a [0, 1]
      3^a-1*1^a [0, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2]
----- [0, 1]
      3^a-2*2^a [0, 0]

```

Notiamo che non ci sono scambi di riga. Questo ci dice che il vettore $(1, 4)$ è combinazione lineare degli altri. I vettori di $\mathbb{R}^2$ non possono essere tutti multipli di un singolo vettore, quindi $B = (1, 2), (1, 3)$ è un sistema minimale di generatori e quindi una base di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 14.10. [GGB27] Dato $W \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^3$ definito dal vettore generico $\underline{v} = (a+b, a, a-b)$ vedere se i vettori $(1, 1, 2), (2, 1, 0)$ appartengono a W .

1. $(1, 1, 2) \in W$? Basta vedere se esistono a, b tali che $(a+b, a, a-b) = (1, 1, 2)$, ovvero risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a=1 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=1 \\ -b=1 \end{cases}$$

che è chiaramente impossibile. Quindi $(1, 1, 2) \notin W$.

2. $(2, 1, 0) \in W$? Basta vedere se esistono a, b tali che $(a+b, a, a-b) = (2, 1, 0)$, ovvero risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a=1 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \\ -b=-1 \end{cases}$$

che ha chiaramente soluzione $a = b = 1$. Quindi $(1, 1, 2) \in W$.

14.2.2 Basi

Esercizio 14.11. [GGG52]

1. I vettori $(1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)$ formano una base di $V = \text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1))$ dato che ovviamente lo generano e sono linearmente indipendenti dato che non sono uno multiplo dell'altro.
2. I vettori $(1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6)$ formano una base di V ? Sono linearmente indipendenti, dobbiamo controllare che appartengano a V e generino tutto V . Per controllare che appartengano a V riduciamo la matrice

```

M:=Mat[[1,2,3,2],
        [1,1,1,1],
        [1,4,7,4],
        [1,6,11,6]];
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2]
      2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1]
      3^a-1*1^a [0, 2, 4, 2]

```

```

4^a-1*1^a [0, 4, 8, 4]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2]
----- [0, -1, -2, -1]
3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0]
4^a+4*2^a [0, 0, 0, 0]

```

Dato che non abbiamo avuto scambi di righe, i vettori $(1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6)$ sono linearmente dipendenti con $(1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)$ e ne sono quindi combinazione lineare, che vuol dire che appartengono a $\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1))$. Per vedere che $(1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6)$ generano tutto V basta vedere che generano sia $(1, 2, 3, 2)$ che $(1, 1, 1, 1)$.

```

M:=Mat[[1,4,7,4],
        [1,6,11,6],
        [1,2,3,2],
        [1,1,1,1]];
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 7, 4]
2^a-1*1^a [0, 2, 4, 2]
3^a-1*1^a [0, -2, -4, -2]
4^a-1*1^a [0, -3, -6, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 7, 4]
----- [0, 2, 4, 2]
3^a+1*2^a [0, 0, 0, 0]
4^a+3/2*2^a [0, 0, 0, 0]

```

Le ultime due righe della matrice sono linearmente dipendenti dalle prime due e quindi sono combinazione lineare delle prime due. Quindi i vettori $(1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1) \in \text{Span}((1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6))$

N.B. In effetti abbiamo dimostrato che

$$\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)) = \text{Span}((1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6))$$

dimostrando prima

$$\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)) \supseteq \text{Span}((1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6))$$

e poi

$$\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)) \subseteq \text{Span}((1, 4, 7, 4), (1, 6, 11, 6))$$

Esercizio 14.12. [LL59] Determinare una base di

$$V = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - 3y + 2z + t + u = 0 \\ x + y - z - 2u = 0 \end{cases} \right\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^5$$

Soluzione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio, quindi ha senso parlare di base. Risolviamo il sistema per trovare un vettore generico di V , e quindi poi la base richiesta.

```

A:=Mat[[1,1,1,2,0],
        [2,-3,2,1,1],
        [1,1,-1,0,-2]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 2, 0]
      2^a-2*1^a [0, -5, 0, -3, 1]
      3^a-1*1^a [0, 0, -2, -2, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 2, 0]
----- [0, -5, 0, -3, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, -2, -2, -2]
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1, 2, 0]
      2^a*-1/5 [0, 1, 0, 3/5, -1/5]
      3^a*-1/2 [0, 0, 1, 1, 1]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a+1*3^a [1, 1, 0, 1, -1]
----- [0, 1, 0, 3/5, -1/5]
----- [0, 0, 1, 1, 1]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a+1*2^a [1, 0, 0, 2/5, -4/5]
----- [0, 1, 0, 3/5, -1/5]
----- [0, 0, 1, 1, 1]

```

Il sistema diviene quindi quindi

$$\begin{cases} x = -2/5t + 4/5u \\ y = -3/5t + 1/5u \\ z = -t - u \end{cases}$$

un vettore generico è quindi

$$\left(-\frac{2}{5}t + \frac{4}{5}u, -\frac{3}{5}t + \frac{1}{5}u, -t - u, t, u\right) \text{ per } t, u \in \mathbb{R}$$

raccogliendo t, u abbiamo

$$t \left(-1, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0\right) + u \left(-1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$$

I due vettori esplicitati sopra generano V per costruzione ed è immediato verificare che siano linearmente indipendenti. Sono quindi una base di V . Possiamo moltiplicarli rispettivamente per -5 e 5 ed otteniamo un'altra base di V , più piacevole:

$$(5, 3, 2, -5, 0), (-5, 1, 4, 0, 5)$$

□

Esercizio 14.13. [LLX17] *Determinare una base di $\text{Span}((1, 2, 0, 3, 2, 1), (-7, 1, 0, -3, -2, 2), (3, 1, 0, 3, 2, 0))$*

Soluzione. Mettiamo i tre vettori come colonne di una matrice che riduciamo con Gauss.


```

M:=Mat([[1, -7, 3],
        [2,  1, 1],
        [0,  0, 0],
        [3, -3, 3],
        [2, -2, 2],
        [1,  2, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -7, 3]
      2^a-2*1^a [0, 15, -5]
0 sotto pivot[0, 0, 0]
      4^a-3*1^a [0, 18, -6]
      5^a-2*1^a [0, 12, -4]
      6^a-1*1^a [0,  9, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=15
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -7,  3]
----- [0, 15, -5]
0 sotto pivot[0,  0,  0]
      4^a-6/5*2^a [0,  0,  0]
      5^a-4/5*2^a [0,  0,  0]
      6^a-3/5*2^a [0,  0,  0]

```

La prima e seconda colonna hanno pivot, la terza no. Quindi la prima e la seconda colonna di M sono linearmente indipendenti, mentre la terza non lo è. Una base di W è quindi data da $(1, 2, 0, 3, 2, 1), (-7, 1, 0, -3, -2, 2)$ $\square$

Esercizio 14.14. [LL17] *Determinare una base di*

$$\{(x + 3y - 3z, 2x + y + 4z, y - 2z, x + 4y - 5z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^4$$

Soluzione. Un vettore generico di V è $(x + 3y - 3z, 2x + y + 4z, y - 2z, x + 4y - 5z)$.

Raccogliamo x, y e z , mettendo un vettore generico nella forma

$$x(1, 2, 0, 1) + y(3, 1, 1, 4) + z(-3, 4, -2, -5) = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$$

dando un nome ai tre vettori.

Sicuramente i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a e generano V , per costruzione. Vediamo se sono linearmente indipendenti, e, se non lo fossero, troviamo anche una relazione di dipendenza lineare tra loro. Costruiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & \underline{v}_1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & \underline{v}_2 \\ -3 & 4 & -2 & -5 & \underline{v}_3 \end{array} \right)$$

mettendo i vettori per riga ed aggiungendo una colonna con i tag, per determinare una eventuale relazione lineare tra i vettori, per esercizio. Riduciamo con Gauss

```

Use R:=Q[v[1..3]],Lex;
A:=Mat[
  [1,2,0,1,  v[1]],
  [3,1,1,4,  v[2]],
  [-3,4,-2,-5,v[3]]];

```

```

L:=RiduciScalaVerbose(A);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1,          v[1]]
          2^a-3*1^a [0, -5, 1, 1, -3v[1] + v[2]]
          3^a+3*1^a [0, 10, -2, -2, 3v[1] + v[3]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1,          v[1]]
----- [0, -5, 1, 1, -3v[1] + v[2]]
          3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, -3v[1] + 2v[2] + v[3]]

```

La terza riga, con le prime tre componenti nulle, ci dice che il terzo vettore è combinazione lineare degli altri due, che sono linearmente indipendenti perché nelle prime due righe abbiamo dei pivot. Dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano V e che $\underline{v}_3$ è generato da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ generano V . Sono quindi base.

La terza riga ci dà una relazione lineare tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$, dato che si legge come

$$\underline{0} = -3\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3$$

Una base di V è quindi $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, ma possiamo prendere qualunque coppia di vettori tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ e abbiamo una base di V . $\square$

14.3 Esercizi proposti

Esercizio 14.15. [GGJ01] *Determinare se i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 2)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{v}_3 = (0, 0, 3, 2)$, $\underline{v}_4 = (1, 1, 1, -3)$, $\underline{v}_5 = (-6, 1, 3, 2)$ appartengono al sottospazio $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2z - 3t = 0 \end{cases}\}$*

Soluzione. No, no, no, no, sì. $\square$

Esercizio 14.16. [GGJ02] *Determinare se i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 0)$, $\underline{v}_2 = (1, 2, 3, 2)$, $\underline{v}_3 = (2, 3, 4, 3)$, $\underline{v}_4 = (1, 1, 2, 1)$, appartengono al sottospazio $W = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$*

Soluzione. No, sì, sì, no. $\square$

Esercizio 14.17. [GGA38] *Determinare se i seguenti vettori appartengono ai seguenti sottospazi*

1. $x^3 + 3x^2 - 1 \in \text{Span}(x^3 + x^2 - 1, x^2 + x + 2, x - 1, 3)$. [Si]
2. $x^3 + 3x^2 - 1 \in \text{Span}(x^3 + x^2 - 1, x^2 + x + 2, x^2 + x + 1, x^2, 3)$. [Si]
3. $(1, 2, 0, 3) \in \text{Span}((3, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$. [Si]
4. $(3, 1, 1, 3) \in \text{Span}((3, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$. [No]
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ [No]

Esercizio 14.18. [GGB10] *Dimostrare che $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\}$ non ha una base.*

Esercizio 14.19. [HHH18] *Dare, se possibile le dimensioni di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ come $\mathbb{Q}$ spazi.*

Esercizio 14.20. [MK04] *Dati i vettori*

$$\underline{w}_1 = (1, 2, 1, 2, 1), \underline{w}_2 = (2, 1, -3, 1, 1), \underline{w}_3 = (2, 1, -3, 1, 0), \underline{w}_4 = (1, -1, -4, -1, -3)$$

- *Determinare una base B di $\text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4)$.*
- *Completare B a base di $\mathbb{R}^5$.*

Esercizio 14.21. [GGA12] *L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 2x)(y + 4x) = 0\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$?*

Esercizio 14.22. [GGA13] *L'insieme $\mathcal{F}_1 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ è sottospazio di $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$?*

Esercizio 14.23. [GGA57] *L'insieme $\mathcal{F}_2 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$ è sottospazio di $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$?*

Esercizio 14.24. [GGA15] *L'insieme $\mathcal{F}_1 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = f(2) = 0\}$ è sottospazio di*

$$\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\} ?$$

Esercizio 14.25. [GGA16] *Trovare 212 basi diverse di $\mathbb{R}^3$*

Esercizio 14.26. [GGA17] *Dimostrare che se un $\mathbb{K}$ -spazio V ha una base, ha infinite basi. Ricordiamo che tutti i campi che trattiamo hanno infiniti elementi.*

Esercizio 14.27. [GGA55] *Siano $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{K}[x]$, di gradi tutti diversi tra loro. Dimostrare che $f_1(x), \dots, f_n(x)$ sono una base di $\text{Span}(f_1(x), \dots, f_n(x))$.*

Esercizio 14.28. [GGC00] *Completare a base di $\mathbb{R}^4$ i seguenti vettori*

$$(1, 3, 2, 1), (1, 3, 2, 2)$$

Esercizio 14.29. [GGC01] *Completare a base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ i seguenti vettori*

$$x^4 + x - 1, x^3 + x$$

Esercizio 14.30. [GGC02] *Determinare la dimensione di*

$$V = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{K}^5 \mid \begin{cases} x + y - z + 3t - u = 0 \\ 2x + 3z - 3u = 0 \\ x + 3y + 9t - 6u = 0 \end{cases} \right\}$$

[Sol:2]

Esercizio 14.31. [GGC03] *Data la base $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ di un $\mathbb{K}$ -spazio V , completare a base di V i vettori $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_3 - \underline{v}_4$.*

Esercizio 14.32. [GGC06] *Caratterizzare geometricamente tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^2$.*

Esercizio 14.33. [GGY06] *Caratterizzare geometricamente tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^3$.*

Esercizio 14.34. [IIA10] *Trovare due sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ (due piani) che abbiano intersezione solo nell'origine.*

Esercizio 14.35. [GGB03] [Difficile] *Generalizzare la nozione di base al caso in cui non esistano sistemi finiti di generatori.*

Esercizio 14.36. [GGA07] *Dimostrare che $\mathbb{K}[x, y]$ è $\mathbb{K}$ -spazio.*

Esercizio 14.37. [GGA08] *Dimostrare che $\mathbb{K}[x, y]_{\leq 2}$ è $\mathbb{K}$ -spazio e determinarne la dimensione.*

Esercizio 14.38. [GGQ09] *Dimostrare che $\mathbb{K}[x, y]_{\leq 3}$ è $\mathbb{K}$ -spazio e determinarne la dimensione.*

Esercizio 14.39. [GGA10] *Dimostrare che $\mathbb{K}[x, y]_{\leq 3}$ è $\mathbb{K}$ -spazio e determinarne la dimensione.*

Esercizio 14.40. [GGA11] *[Difficile] Dimostrare che $\mathbb{K}[x, y]_{\leq d}$ è $\mathbb{K}$ -spazio e determinarne la dimensione.*

Esercizio 14.41. [GGW12] *L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y^2 + 1)(y - x) = 0\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$?*

Esercizio 14.42. [GGG87] *Provare che ogni retta passante per l'origine è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$*

Esercizio 14.43. [GGG20] *Provare che ogni piano passante per l'origine è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$*

Esercizio 14.44. [GGC04] *Dare una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga il massimo numero possibile dei seguenti vettori*

$$(1, 3, 2, 1), (4, 3, 8, 7), (1, 0, 2, 2), (1, 12, 2, -2)$$

14.3.1 Coordinate

Esercizio 14.45. [GGC08] *dimostrare che $\mathbb{R}^3 = \text{Span}((3, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 1))$.*

Esercizio 14.46. [GGC09] *L'insieme delle matrici invertibili di $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è un sottospazio con le operazioni standard?*

Esercizio 14.47. [GGJ03] *Data la base $B = (1, 1), (1, i)$ di $\mathbb{C}^2$ determinare le coordinate di $(1, 2)$ in base B .*

Esercizio 14.48. [GGJ04] *Data la base $B = (1, 1), (1, 2)$ di $\mathbb{Q}^2$ determinare le coordinate di $(0, 1)$ in base B .*

Esercizio 14.49. [GGJ05] *Data la base $B = (1, 1), (1, 2)$ di $\mathbb{Q}^2$ determinare le coordinate di $(1, 1)_B$ in base canonica.*

Esercizio 14.50. [GGJ06] *Data la base $B = (1, 1, 3), (1, 2, 0), (3, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ determinare le coordinate di $(1, 2, -1)$ in base B .*

Esercizio 14.51. [GGJ07] *Data la base $B = (1, 1, 3), (1, 2, 0), (3, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ determinare le coordinate di $(0, 2, 3)_B$ in base canonica.*

Esercizio 14.52. [GGJ08] *Date le basi $B = 3, x+1, x^2-x$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $C = x^2+x+1, x^2-x-2x$ determinare le coordinate di $(1, 2, 1)_B$ in base C e in base canonica e di $(1, 1, 1)_C$ in base B e base canonica.*

Capitolo 15

Quindicesima lezione - Operazioni sui sottospazi

15.1 Operazioni sui sottospazi

Somma ed intersezione di sottospazi

Definizione-Proposizione 15.1. [HHH23] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, W_2 \subseteq_{SSP} V$. Allora

1. *L'insieme*

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \mid \underline{w}_1 \in W_1 \text{ e } \underline{w}_2 \in W_2\} \\ &= \{\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \mid \underline{w}_1 \in W_1, \underline{w}_2 \in W_2 \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

si dice spazio somma di W_1, W_2 e $W_1 + W_2 \subseteq_{SSP} V$.

2. *L'insieme*

$$W_1 \cap W_2 = \{\underline{w} \in V \mid \underline{w} \in W_1 \text{ e } \underline{w} \in W_2\}$$

l'intersezione insiemistica di W_1, W_2 , si dice spazio intersezione di W_1, W_2 e $W_1 \cap W_2 \subseteq_{SSP} V$.

3. *L'insieme*

$$W_1 \cup W_2 = \{\underline{w} \in V \mid \underline{w} \in W_1 \text{ o } \underline{w} \in W_2\}$$

l'unione insiemistica di W_1, W_2 , è sottospazio se e solo se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

Dimostrazione.

1. Immediata dalla definizione di spazio vettoriale.

2. Dimostriamo che $W_1 \cap W_2$ è chiuso sulla combinazione lineare: siano $\underline{w}_1 \in W_1 \cap W_2, \underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Allora dobbiamo dimostrare che

$$\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2$$

ma

$$\underline{w}_1 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{w}_1 \in W_1 \text{ e } \underline{w}_1 \in W_2 \quad \underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{w}_2 \in W_1 \text{ e } \underline{w}_2 \in W_2$$

e dato che $W_1, W_2 \subseteq_{SSP} V$ abbiamo che

$$\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \in W_1 \quad \text{e} \quad \lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \in W_2$$

quindi

$$\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2 \in W_1 \cap W_2$$

come richiesto.

3. Lasciato per esercizio

□

Vedremo meglio queste applicazioni quando parleremo di morfismi di spazi vettoriali.

Esercizio 15.2 (Proposto). [GGB61] *Dati un $\mathbb{K}$ spazio V e $W_1, W_2 \subseteq_{SSP} W$ dimostrare che $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $W_1 \cup W_2$.*

15.2 Generatori della somma di spazi

Proposizione 15.3. [GGA61] *Dati $V, W \subseteq V$ $\mathbb{K}$ -spazio, con sistemi di generatori rispettivamente $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ un sistema di generatori di $V + W$ è dato da $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{A} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p, \mathcal{B} = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_q$$

Per definizione

$$V + W = \{ \underline{v} + \underline{w} \mid \underline{v} \in V, \underline{w} \in W \}$$

Per ipotesi

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_p \underline{v}_p \text{ e } \underline{w} = \beta_1 \underline{w}_1 + \dots + \beta_q \underline{w}_q$$

per ogni $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in W$ ed opportuni α, β . Quindi

$$\underline{v} + \underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_p \underline{v}_p + \beta_1 \underline{w}_1 + \dots + \beta_q \underline{w}_q$$

e

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_q \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

è un sistema di generatori per $V + W$. □

Osservazione 15.4. [GGA73] *Anche se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono basi di V, W non necessariamente $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è base di $V + W$.*

Esercizio 15.5. [GGA74] *Siano*

$$V = \text{Span}((1, 2, 3), (1, 1, 1)) \text{ e } W = \text{Span}((1, 1, 0), (1, 0, 0)) \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^3$$

Per la proposizione precedente

$$V + W = \text{Span}((1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^3$$

ma questi quattro vettori non sono una base di $V + W$, che al massimo ha dimensione 3, dato che $V + W \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^3$

Osservazione 15.6. [GGA63] *Mutuando la notazione matriciale, per comodità indicheremo talvolta un vettore $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ come vettore riga $\underline{v} = (1, 2, 3)$ e il suo "trasposto" $\underline{v}^T$ come vettore colonna.*

$$\underline{v}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

15.3 Il Teorema di Rouché-Capelli

Teorema 15.7 (Rouché-Capelli per sistemi omogenei). [FFT39] Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^n$ ha dimensione $n - rk(A)$.

Dimostrazione. Troviamo una base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ con $n - rk(A)$ elementi

Sia $G \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matrice tale che $A \xrightarrow{\text{Gauss}} G$. Dato che siamo interessati solo al numero di soluzioni ma non al loro valore specifico, possiamo mettere G in forma normale con qualche operazione di Gauss e scambiando se necessario qualche colonna. Stiamo, se necessario, cambiando nome alle variabili, ma lo spazio vettoriale rimane inalterato. Otteniamo, rimarcando per ogni colonna la variabile x_i associata, e ricordando che per definizione di forma normale le variabili legate ai pivot sono $x_1, \dots, x_r$

$$G = \left(\begin{array}{c|c} x_1, \dots, x_r & x_{r+1}, \dots, x_n \\ \hline I_r & A \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

N.B. Nella riduzione della matrice G possono comparire delle righe nulle.

Dalla struttura della matrice, è evidente che possiamo esprimere le variabili legate ai pivot $x_1, \dots, x_r$ mediante una combinazione lineare delle variabili $\underline{x} = x_{r+1}, \dots, x_n$ non legate ai pivot.

Per esempio, interpretiamo la prima riga della matrice G come equazione

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1,n}x_n = 0$$

da cui abbiamo l'espressione della variabile x_1 come combinazione lineare delle variabili $x_{r+1}, \dots, x_n$.

$$x_1 = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1,n}x_n$$

Esprimiamo in questo modo tutte le variabili $x_1, \dots, x_r$ legate ai pivot. Quindi per ogni $1 \leq j \leq r$ esiste $P_j(\underline{x}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$, lineare ed omogeneo, tale che vale la condizione $x_j = P_j(\underline{x})$.

Applichiamo ora queste condizioni al vettore generico $\underline{u} = (x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{K}^n$, ovvero sostituiamo in $\underline{u}$ a ciascuna variabile $x_1, \dots, x_r$ legata ad un pivot la sua espressione $x_j = P_j(\underline{x})$. ottengo un vettore generico delle soluzioni

$$\underline{v} = (P_1(\underline{x}), \dots, P_r(\underline{x}), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

Dal vettore generico delle soluzioni possiamo ottenere, come al solito, una base delle soluzioni se raccogliamo le variabili $x_{r+1}, \dots, x_n$ otteniamo

$$\underline{v} = x_{r+1}(b_{r+1,1}, \dots, b_{r+1,r}, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(b_{n1}, \dots, b_{nr}, 0, \dots, 0, 1)$$

per opportuni $b_{ij} \in \mathbb{K}$. Questi vettori

$$\begin{pmatrix} b_{r+1,1} & \dots & b_{r+1,r} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generano $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ per costruzione e sono linearmente indipendenti dato che se li mettiamo per riga in una matrice, questa contiene una sottomatrice I_r ovviamente non singolare (quella formata dalle r righe e dalle ultime r colonne).

Per ogni colonna che non contiene pivot abbiamo un parametro, quindi possiamo descrivere $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ con $n - rk(A)$ parametri. Costruiamo una base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ raccogliendo i parametri. I vettori che otteniamo

sono linearmente indipendenti dato che la sottomatrice quadrata data da tutte le $n - rk(A)$ righe e dalle ultime $n - rk(A)$ colonne è non singolare.

Avremmo potuto lasciare la matrice G in forma standard ed evitare gli scambi di colonne, ma la notazione esarebbe stata più complessa. $\square$

Dalla dimostrazione del Teorema di Rouché-Capelli si può dimostrare immediatamente questo corollario, che abbiamo già dimostrato direttamente.:

Corollario 15.8. [FFX77] *Data la matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ed una sua riduzione a scala S se $S^{j_1}, \dots, S^{j_p}$ sono linearmente indipendenti (le colonne contengono pivot), lo sono anche $A^{j_1}, \dots, A^{j_p}$.*

Dimostrazione. Hint: procedere con la definizione di lineare indipendenza, e risolvere il sistema riducendo con Gauss la matrice associata. $\square$

Ricordiamo anche che

Richiamo 15.9. [GGB99] *Data la matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ed una sua riduzione a scala S , abbiamo che in generale $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) \neq \text{Span}(S^1, \dots, S^n)$.*

Dimostrazione. Basta trovare un esempio in cui l'uguaglianza non vale. Prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che i vettori appartenenti a $\text{Span}((1, 0), (2, 0))$ hanno sempre la seconda componente nulla, $A^1 = (1, 1) \notin \text{Span}((1, 0), (2, 0))$ e quindi $\text{Span}((1, 1), (2, 2)) \neq \text{Span}((1, 0), (2, 0))$. $\square$

Vediamo un esempio di applicazione della forma omogenea del teorema di Rouché-Capelli.

Esempio 15.10. [FFX39] *Troviamo una base delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo A a forma normale con Gauss

```
A:=Mat([[1,2,3,4,5],
        [1,1,1,3,2],
        [1,0,0,3,3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Scala2DiagonaleVerbose(L);
-----
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 5]
      2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1, -3]
      3^a-1*1^a [0, -2, -3, -1, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 5]
----- [0, -1, -2, -1, -3]
```



```

3^a-2*2^a [0, 0, 1, 1, 4]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 2, 3, 4, 5]
      2^a*-1 [0, 1, 2, 1, 3]
----- [0, 0, 1, 1, 4]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-3*3^a [1, 2, 0, 1, -7]
      2^a-2*3^a [0, 1, 0, -1, -5]
----- [0, 0, 1, 1, 4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-2*2^a [1, 0, 0, 3, 3]
----- [0, 1, 0, -1, -5]
----- [0, 0, 1, 1, 4]

```

Notiamo che in questo caso non è stato necessario ricorrere a scambi di colonne per ottenere la forma normale. Il rango di A è 3 ed il sistema associato alla matrice in forma normale è

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_3 = x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_4 - 3x_5 \\ x_2 = x_4 + 5x_5 \\ x_3 = -x_4 - 4x_5 \end{cases}$$

N.B. Pensando alla dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli in forma omogenea, otteniamo

$$\begin{aligned} P_1(x_4, x_5) &= -3x_4 - 3x_5 \\ P_2(x_4, x_5) &= x_4 + 5x_5 \\ P_3(x_4, x_5) &= -x_4 - 4x_5 \end{aligned}$$

Operando le sostituzioni nel vettore generico $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di $\mathbb{R}^5$ otteniamo il vettore generico di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$

$$(-3x_4 - 3x_5, x_4 + 5x_5, -x_4 - 4x_5, x_4, x_5) = x_4(-3, 1, -1, 1, 0) + x_5(-3, 5, -4, 0, 1)$$

Questi due vettori generano $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ e sono linearmente indipendenti, e quindi base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ dato che se li mettiamo per riga in una matrice otteniamo

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le cui ultime $2 = 5 - 3 = n - \text{rk}(A)$ colonne danno la sottomatrice I_2 , non singolare. □

Teorema 15.11 (Rouché-Capelli). [FFF39a] Dato il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che

1. Se e solo se $\text{rk}([A|\underline{b}]) \neq \text{rk}(A)$ il sistema non ha soluzioni.
2. Se $\text{rk}([A|\underline{b}]) = \text{rk}(A)$ il sistema ha $\infty^{n-\text{rk}(A)}$ soluzioni.

Dimostrazione.

1. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzioni se e solo se $\underline{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A , ovvero se e solo se $\underline{b} \in \text{Span}(A^1, \dots, A^n)$ e questo avviene se e solo se $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$ e questo avviene se e solo se $rk(A) = rk([A \mid \underline{b}])$. Dimostriamo quest'ultima equivalenza, che non è banale come le altre
 - Chiaramente se $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$ abbiamo che i due ranghi sono uguali.
 - Se il rango di A è r , prendiamo le r colonne indipendenti di A , $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$. Se aggiungo a queste $\underline{b}$, i vettori $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, \underline{b}$ sono linearmente dipendenti, dato che $rk([A \mid \underline{b}]) = rk(A) = r$. Quindi $\underline{b}$ è combinazione lineare di $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ e quindi $\text{Span}(A^1, \dots, A^n) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$.
2. Sia $\underline{a} \in \mathbb{K}^n$ una soluzione data del sistema $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora ogni soluzione $\underline{d} \in \mathbb{K}^n$ del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è della forma

$$\underline{a} + \underline{v} \quad \text{con } \underline{v} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

Infatti

$$\begin{cases} \underline{d} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) & \Leftrightarrow A\underline{d} = \underline{b} \\ \underline{a} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) & \Leftrightarrow A\underline{a} = \underline{b} \end{cases} \Leftrightarrow A(\underline{d} - \underline{a}) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{d} - \underline{a} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

e quindi $\underline{d} = \underline{a} + \underline{v}$ con $\underline{v} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$.

Dato che $\dim \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) = n - rk(A)$ per la forma omogenea del teorema, abbiamo che $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ ha base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-rk(A)}$ ed ogni suo elemento $\underline{c}$ si può scrivere come $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{n-rk(A)} \underline{v}_{n-rk(A)}$. Quindi ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ si può scrivere come

$$\underline{a} + \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{n-rk(A)} \underline{v}_{n-rk(A)}$$

e dipende quindi dagli $n - rk(A)$ parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-rk(A)}$. Non può dipendere da un numero minore di parametri perché $n - rk(A)$ è la dimensione dello spazio vettoriale $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$. Ho quindi $\infty^{n-rk(A)}$ soluzioni.

□

15.4 Formula di Grassman

Vediamo come possiamo determinare una base dell'intersezione in un caso particolare.

Esempio 15.12. [MK09] *Dati i due sottospazi*

$$\begin{aligned} V &= \text{Span}((1, 2, 1, 1, 5), (0, 0, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 4, 11)) \\ W &= \text{Span}((2, 4, 1, 2, 3), (2, 4, 2, 0, 9), (2, 4, -1, 6, -9)) \end{aligned}$$

di $\mathbb{R}^5$, determinare le dimensioni e delle basi per $V, W, V + W, V \cap W$.

Soluzione. Determiniamo una base di W , e quindi la sua dimensione, riducendo la matrice che ha come righe i suoi generatori.

```
W:=Mat([[2, 4, 1, 2, 3],
        [2, 4, 2, 0, 9],
        [2, 4, -1, 6, -9]]);
L:=RiduciScalaVerbose(W);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 4, 1, 2, 3]
```

```

2^a-1*1^a [0, 0, 1, -2, 6]
3^a-1*1^a [0, 0, -2, 4, -12]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 4, 1, 2, 3]
----- [0, 0, 1, -2, 6]
3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, 0]

```

Ho ridotto la matrice a scala, ho trovato due pivot, quindi $\dim(W) = 2$. Dato che non ci sono stati scambi di righe e che le prime due non si sono annullate, ho trovato due basi di W , $B_1 = (2, 4, 1, 2, 3), (0, 0, 1, -2, 6)$ le righe della ridotta, o $B_2 = (2, 4, 1, 2, 3), (2, 4, 2, 0, 9)$ le righe della matrice di partenza. Uso come base B_W di W la prima per comodità.

Basi (e quindi dimensioni) di V e $V + W$ verranno determinate durante il procedimento di calcolo di una base di $V \cap W$.

Procediamo col *metodo dell'uguaglianza dei vettori generici*.

Consideriamo due sistemi di generatori per V, W , ovvero i generatori dati per il primo ed una base del secondo

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 1, 1, 5), \underline{v}_2 = (0, 0, 0, 2, 1), \underline{v}_3 = (2, 1, 2, 4, 11)$$

e

$$B_W = \underline{w}_1 = (2, 4, 1, 2, 3), \underline{w}_2 = (0, 0, 1, -2, 6) \text{ base di } W$$

Dei vettori generici di V ed W sono, rispettivamente

$$a(1, 2, 1, 1, 5) + b(0, 0, 0, 2, 1) + c(2, 1, 2, 4, 11)$$

e

$$x(2, 4, 1, 2, 3) + y(0, 0, 1, -2, 6)$$

per $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ Sia $\underline{v}$ un vettore generico di $V \cap W$. Questo deve potersi scrivere sia nella prima che nella seconda forma, quindi devono esistere $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

possiamo cambiare il segno delle variabili x, y dato che stiamo lavorando in uno spazio vettoriale. Otterremo le soluzioni per $-x, -y$, che ci vanno comunque bene, dato questo equivale a prendere come base i vettori opposti a quelli della base originale.

Questo è un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite a, b, c, x, y , omogeneo, con matrice incompleta come sotto (la prima colonna è relativa alla variabile a , la seconda a b etc. etc.). Riduciamolo con Gauss (senza scambiare le colonne).

```
VW:=Mat[[1, 0, 2, 2, 0],
        [2, 0, 1, 4, 0],
        [1, 0, 2, 1, 1],
        [1, 2, 4, 2, -2],
        [5, 1, 11, 3, 6]];
L:=RiduciScalaVerbose(VW);L;// Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 2, 2, 0]
      2^a-(2)*1^a [0, 0, -3, 0, 0]
      3^a-(1)*1^a [0, 0, 0, -1, 1]
      4^a-(1)*1^a [0, 2, 2, 0, -2]
      5^a-(5)*1^a [0, 1, 1, -7, 6]
Scambio la 2^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 0, 2, 2, 0],
     [0, 2, 2, 0, -2],
     [0, 0, 0, -1, 1],
     [0, 0, -3, 0, 0],
     [0, 1, 1, -7, 6]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 2, 2, 0]
----- [0, 2, 2, 0, -2]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, -1, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, -3, 0, 0]
      5^a-(1/2)*2^a [0, 0, 0, -7, 7]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 0, 2, 2, 0],
     [0, 2, 2, 0, -2],
     [0, 0, -3, 0, 0],
     [0, 0, 0, -1, 1],
     [0, 0, 0, -7, 7]])
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 2, 2, 0]
----- [0, 2, 2, 0, -2]
----- [0, 0, -3, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, -1, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, -7, 7]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 2, 2, 0]
----- [0, 2, 2, 0, -2]
----- [0, 0, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, -1, 1]
```

$$5^{\text{a}} - (7) * 4^{\text{a}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo che ci sono tre pivot nelle prime tre colonne, quelle associate a V , e quindi $\dim V = 3$ ed una base di V è data da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Questo perché i conti che stiamo facendo, limitatamente alle prime tre colonne, sono gli stessi che avremmo fatto riducendo la matrice le cui colonne sono i generatori di V .

Ci sono in totale quattro pivot, nella prima, seconda, terza e quarta colonna, quindi $\dim M + N = 4$ ed una base di $V + W$ è data da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{w}_1$. Questo perché stiamo riducendo una matrice le cui colonne sono i generatori di $V + W$.

Ricordando che le prime tre colonne sono associate rispettivamente alle variabili a, b, c e le ultime due rispettivamente alle variabili x, y , il sistema associato a questa matrice è

$$\begin{cases} a + 2c + 2x = 0 \\ 2b + 2c - 2y = 0 \\ 3c = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

la sola equazione che coinvolge solo le variabili x, y è $-x + y = 0$. Se questa condizione è soddisfatta, ho soluzioni $(x, y) = (\alpha, \alpha)$ ed il sistema diviene

$$\begin{cases} a + 2c = -2\alpha \\ b + c = \alpha \\ 3c = 0 \end{cases}$$

che ammette unica soluzione dato che la sua matrice incompleta associata, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, è non singolare, e che quindi per ogni α ha una unica soluzione dipendente da α , ovvero $a = -2\alpha$, $b = \alpha$, $c = 0$.

Sostituiamo le soluzioni che abbiamo trovato, $(-2\alpha, \alpha, 0, \alpha, \alpha)$ nel sistema originario

$$-2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo implica che il vettore generico di V appartiene anche a W e quindi a $V \cap W$ se $x = y$.

Se applico questa condizione di appartenenza a V al vettore generico di W

$$x(2, 4, 1, 2, 3) + y(0, 0, 1, -2, 6)$$

ottengo

$$(2x, 4x, 2x, 0, 9x) = x(2, 4, 2, 0, 9)$$

che è quindi un vettore generico di $V \cap W$. Il vettore $(2, 4, 2, 0, 9)$ è quindi un generatore di $V \cap W$ dato che ogni vettore di $V \cap W$ è suo multiplo. Quindi $(2, 4, 2, 0, 9)$ è base di $V \cap W$ e $\dim V \cap W = 1$.

I conti sono stati svolti in base canonica. Volendo trovare la base dell'intersezione come sottospazio di W e nella la base $B_W = \underline{w}_1, \underline{w}_2$ di W , avremmo avuto che il vettore generico di $V \cap W$ espresso nelle coordinate della base B sarebbe $x(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (x, x)_B = x(1, 1)_B$ e quindi $B_{V \cap W} = (1, 1)_B$

Notiamo che

- Il procedimento di calcolo di una base di $V \cap W$ ha prodotto anche basi di $V, V + W$.

- Non é stato quindi necessario calcolare direttamente una base di V .

□

Vediamo ora di dimostrare il caso generico. Noteremo che la dimostrazione segue lo stesso procedimento dell'esempio.

Teorema 15.13 (Formula di Grassman). [HHH12] *Sia U un $\mathbb{K}$ -spazio di dimensione finita n e $V, W \subseteq U$. Allora*

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$

Dimostrazione. Dato che U ha dimensione finita, V e W hanno dimensione finita e quindi base. Prendiamo $B_v = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ base di V e $B_w = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_q$ base di W . Ogni vettore di V si può scrivere come $\sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i$ ed ogni vettore di W si può scrivere come $\sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j$ (sono dei vettori generici). Abbiamo che

$$\begin{aligned} V \cap W &= \left\{ \underline{u} \in U \mid \exists \underline{a} \in \mathbb{K}^p, \underline{b} \in \mathbb{K}^q \text{ t.c. } \underline{u} = \sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i = \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \mid \exists \underline{a} \in \mathbb{K}^p, \underline{b} \in \mathbb{K}^q \text{ t.c. } \sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i - \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \mid \exists \underline{a} \in \mathbb{K}^p, \underline{b} \in \mathbb{K}^q \text{ t.c. } \sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i + \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0} \right\} \end{aligned}$$

Prendendo per evitare i segni negativi come base di W non i vettori $\underline{w}_j$ ma il loro opposti.

Esaminiamo ora il sistema

$$\sum_{i=1}^p a_i \underline{v}_i + \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j = \underline{0}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & & | & | & & | \\ \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_p & \underline{w}_1 & \cdots & \underline{w}_q \\ | & & | & | & & | \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Riduciamo la matrice con Gauss. Dato che le prime p colonne sono linearmente indipendenti (formano una base di V) mettendo la matrice in forma standard otteniamo

$$G = \left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \quad \text{con } A \text{ qualunque di ordine compatibile e } S \text{ a scala}$$

Innanzitutto notiamo che dato che le colonne della matrice formano un sistema di generatori di $V + W$ e che il numero di colonne linearmente indipendenti è $p + k$, dove k è il rango di S o il suo numero di pivot, abbiamo $\dim V + W = p + k$. Vogliamo dimostrare che se $\underline{\beta}$ è soluzione di $S\underline{\beta} = \underline{0}$, esiste una soluzione di

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Infatti

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p \underline{a} + A \underline{b} \\ S \underline{b} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

e quindi se $\underline{\beta}$ è soluzione di $S\underline{b} = \underline{0}$, ovvero se $S\underline{\beta} = 0$, abbiamo il sistema

$$\begin{pmatrix} I_p \underline{a} + A \underline{\beta} \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow I_p \underline{a} = -A \underline{\beta}$$

con $A \underline{\beta}$ vettore di costanti, e questo sistema ha necessariamente soluzione unica dato che la matrice incompleta (I_p) ha rango massimo p . Possiamo quindi concludere che il sistema ha soluzione se e solo se $S\underline{\beta} = \underline{0}$, e quindi

$$V \cap W = \left\{ \sum_{j=1}^q b_j \underline{w}_j \mid S\underline{b} = \underline{0} \right\}$$

Possiamo ora applicare il Teorema di Rouchè-Capelli, o se preferite il suo Corollario 15.21. Ricordando che $rk(S) = k$ abbiamo che

$$\dim V \cap W = q - k. \quad \text{Quindi} \quad \dim V + W = p + k = p + q - (q - k) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$

Notiamo che abbiamo messo la matrice in forma normale solo per semplificare la notazione. La forma a scala sarebbe bastata ma avremmo avuto un tripudio di indici, avendo dovuto considerare come variabili associate ai pivot non necessariamente $x_1, \dots, x_r$ ma r variabili qualunque tra le $\underline{x}$.

□

Esercizio 15.14. [HHW13] *Dimostrare che*

1. posso partire da un sistema di generatori di V , e nulla cambia.
2. Posso partire da un sistema di generatori di W , ed ottengo non una base ma un sistema di generatori di $V \cap W$. Se voglio una base dovrò estrarla da questi.

15.5 Somma diretta di sottospazi

Problema 15.15. Possiamo usare gli spazi $W_1, \dots, W_n \subseteq_{SSP} V$ come "base" di V ? In un certo senso, possiamo parlare di basi "a blocchi"?

Scegliamo di preservare l'unicità.

Esempio 15.16. [HHH81] *Abbiamo*

$$U = \text{Span}((1, 3, 1, 2), (0, 1, 0, 1)), \quad W = \text{Span}((0, 0, 3, 2), (0, 0, 1, 2))$$

Vediamo che il vettore $(1, 3, 4, 4)$ si può scrivere come somma di vettori di U, W

$$(1, 3, 4, 4) = (1, 3, 1, 2) + (0, 0, 3, 2)$$

in modo unico, perché il sistema di equazioni

$$\alpha(1, 3, 1, 2) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 3, 2) + \delta(0, 0, 1, 2) = (1, 3, 4, 4)$$

ha un'unica soluzione, dato che la matrice incompleta del sistema associato (vettori per colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

non singolare, ha rango massimo, e quindi la soluzione esiste unica.

Questo significa che **ogni** vettore di $\mathbb{R}^4$ si può scrivere in modo unico come somma di un vettore di U ed uno di W .

Definizione 15.17. [HHH37] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq_{SSP} V$. Allora diciamo che

- V è somma di $W_1, \dots, W_n$ se

$$\forall \underline{v} \in V \exists \underline{w}_1 \in W_1, \dots, \underline{w}_n \in W_n \text{ tali che } \underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n \Leftrightarrow V = W_1 + \dots + W_n$$

Scriveremo anche $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$ o $V = \sum_{i=1}^n W_i$.

- V è somma diretta di $W_1, \dots, W_n$, e scriviamo $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ se

$$\forall \underline{v} \in V \exists! \underline{w}_1 \in W_1, \dots, \underline{w}_n \in W_n \text{ tali che } \underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n$$

Scriveremo anche $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$.

Esempio 15.18. [HHH38] I due sottospazi di $\mathbb{R}^5$

$$V = \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2) \quad e \quad W = \text{Span}(\underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$$

sono in somma diretta e $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$, dato che ogni vettore $\underline{u}$ di $\mathbb{R}^5$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\underline{e}_i$,

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \underline{e}_i + \sum_{i=3}^5 \lambda_i \underline{e}_i$$

si scrive in modo unico come un vettore $\underline{v} + \underline{w}$ con $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in W$.

Esempio 15.19. [HHH39] I due sottospazi di $\mathbb{C}[x]$

$$V = \text{Span}(x^2 + x, x^2 - 1, 3) \quad e \quad W = \text{Span}(x^2, 3x - 1, x^4)$$

non sono in somma diretta. dato che il vettore $x^2 = (x^2 - 1) + 1/3 \cdot 3$ si può scrivere in due modi diversi come somma di due vettori di V, W .

$$x^2 = (x^2 - 1) + 1/3 \cdot 3 + \underline{0} = \underline{0} + x^2$$

$\downarrow$
 V
 $\downarrow$
 W
 $\downarrow$
 V
 $\downarrow$
 W

Notiamo che $x^2 \in V \cap W$. Può venire il sospetto che se $V \cap W \neq \{\underline{0}\}$ la somma non possa essere diretta. In effetti, questo è vero e vale anche il viceversa

Proposizione 15.20. [HHH41] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq_{SSP} V$. Allora

1. Se $n = 2$ abbiamo che la somma di W_1, W_2 è diretta se e solo se

$$W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \dim W_1 \cap W_2 = 0$$

2. La somma di $W_1, \dots, W_n$ è diretta se e solo se

$$\dim \bigoplus_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \dim W_i$$

3. (non svolto in aula, non richiesto) In generale abbiamo che la somma di $W_1, \dots, W_n$ è diretta se e solo se

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{\underline{0}\} \text{ come dire } W_i \cap \bigoplus_{j \neq i} W_j = \{\underline{0}\}$$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che la somma di W_1, W_2 non è diretta se e solo se $W_1 \cap W_2 \neq \{\underline{0}\}$

- (a) È facile vedere che se $W_1 \cap W_2 \neq \{\underline{0}\}$ la somma non è diretta. Infatti

$$\exists \underline{w} \neq \underline{0} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{w} = \underset{W_1}{\underline{0}} + \underset{W_2}{\underline{w}} = \underset{W_1}{\underline{w}} + \underset{W_2}{\underline{0}}$$

ed abbiamo scritto $\underline{w}$ in due modi diversi come somma di vettori di W_1 e W_2 .

- (b) Dimostriamo che se la somma non è diretta l'intersezione non è solo $\underline{0}$.

Supponiamo che la somma $V + W$ non sia diretta. Allora posso scrivere un vettore $\underline{u} \in V + W$ in due modi diversi,

$$\underline{u} = \underline{v}_1 + \underline{w}_1 = \underline{v}_2 + \underline{w}_2 \text{ e quindi } \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -\underline{w}_1 + \underline{w}_2$$

ed il vettore $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in V$ per costruzione, mentre $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$ e quindi $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in V \cap W$ da cui $V \cap W \neq \{\underline{0}\}$.

2. Dimostriamo che se la somma è diretta vale la formula

$$\dim \text{Span}(W_1, \dots, W_n) = \sum_{i=1}^n \dim W_i$$

per induzione sul numero di addendi. Potremmo partire dal caso $n = 1$, ma anche il caso $n = 2$ già dimostrato, è la formula di Grassman. Supponiamo vera la formula per n . Dimostriamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{i=1}^{n+1} W_i &= \dim \left(\left(\bigoplus_{i=1}^n W_i \right) + W_{n+1} \right) \\ &\text{per Grassman} \\ &= \dim \bigoplus_{i=1}^n W_i + \dim W_{n+1} \\ &\text{per Ipotesi induttiva} \\ &= \sum_{i=1}^n \dim W_i + \dim W_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \dim W_i \end{aligned}$$

Il viceversa è lasciato per esercizio.

□

È molto utile il seguente corollario del teorema di Rouché-Capelli.

Corollario 15.21. [GGQ66] *Siano dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ $\mathbb{K}$ -spazio, linearmente indipendenti, $S \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$*

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \{a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

e

$$W = \{x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ t.c. } S \cdot \underline{x} = \underline{0}\}$$

allora

1. $W \underset{SSP}{\subseteq} V$.
2. $\dim W = \dim V - rk(A) = n - rk(A)$.
3. Un vettore generico di W si ottiene da un vettore generico di V , $a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$, aggiungendo le condizioni $S \cdot \underline{x} = \underline{0}$.
4. Una base di W si ottiene come al solito dal suo vettore generico raccogliendo le x_i .

Dimostrazione.

1. Dato che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, e generano V per costruzione, sono base $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di V . Se scriviamo W usando le coordinate dei vettori in base B abbiamo che e

$$W = \{(a_1, \dots, a_n)_B \in V \mid A \cdot \underline{a} = \underline{0}\} = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

che sappiamo già essere un sottospazio di V .

2. Per il teorema di Rouché-Capelli, $\dim W = \dim V - rk(A)$.
3. Ovvio considerando la dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli omogeneo.
4. Ovvio.

□

Osservazione 15.22. [GGQ51] *Con la notazione del corollario precedente, ma se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ non sono linearmente indipendenti, continua a valere la formula*

$$\dim W = \dim V - rk(S) = n - rk(S)$$

Se $V = \mathbb{K}^p$, e quindi i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ formano, per righe o per colonne, una matrice A , abbiamo

$$\dim W = rk(A) - rk(S)$$

Esempio 15.23. [MEK09] *Troviamo una base del sottospazio*

$$W = \{x(1, 2, 3) + y(4, 5, 6) \mid x - 2y = 0\}$$

Soluzione. Aggiungiamo al vettore $\underline{v} = x(1, 2, 3) + y(4, 5, 6)$ la condizione $C : x - 2y = 0$, ottenendo

$$\underline{v} + C = 2y(1, 2, 3) + y(4, 5, 6) = y(6, 9, 12) = 3y(2, 3, 4)$$

Quindi $W = \text{Span}(2, 3, 4)$.

□

Un utile riassunto della situazione per la ricerca della base di una somma di sottospazi:

Osservazione 15.24. [GGA62] Dati $V, W \subseteq U \mathbb{K}$ – spazio di dimensione finita, con sistemi di generatori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ costruisco

1. la matrice per righe

$$A = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n]$$

e la riduco alla matrice a scala S . Le righe di S che non si riducono a zero (o le corrispondenti righe di A – attenzione agli scambi di riga) mi danno una base di $V + W$.

2. La matrice per colonne

$$A = [\underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_n^T, \underline{w}_1^T, \dots, \underline{w}_n^T]$$

e la riduco alla matrice a scala S senza scambi di colonna. Le posizioni dei pivot di S mi danno le posizioni delle colonne di A che formano una base di $V + W$.

3. Nel caso immediatamente precedente, non necessariamente le colonne di S contenenti un pivot mi danno un sistema di generatori di $V + W$, tantomeno una base di $V + W$.

Osservazione 15.25. [GGQ22] Dato un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V , ed un sistema di equazioni lineari omogenee nelle variabili $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} p_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ p_m(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

il sottoinsieme di

$$\left\{ \underline{v} \in V \mid \begin{cases} p_1(\underline{v}) = 0 \\ \vdots \\ p_m(\underline{v}) = 0 \end{cases} \right\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale di V e

$$\begin{cases} p_1(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ p_m(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

è la sua descrizione cartesiana. Vedremo più in dettaglio questo argomento quando avremo parlato di morfismi. Un esempio è $\text{Sol}(A\underline{x}) = 0$, le soluzioni di un sistema lineare omogeneo su un campo.

Per le operazioni sui sottospazi, alcuni metodi sono dettagliati sotto. Altre strade sono paossibili, sia in generale che caso per caso.

Osservazione 15.26. [GGA02] Dato un $\mathbb{K}$ -spazio V di dimensione n con base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

1. Dato $W \subseteq V$ e $\underline{v} \in V$ decidere se $\underline{v} \in W$. Se W ha base $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ si risolve decidendo se il sistema lineare

$$x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_p \underline{w}_p = \underline{v}$$

ha soluzioni.

Questo si può fare, se stiamo lavorando in $\mathbb{K}^n$ nei seguente due modi, tra altri, se abbiamo un sistema di generatori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t$ per W

- Costruiamo la matrice per righe

$$\begin{pmatrix} - & \underline{w}_1 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \underline{w}_t & - \\ - & \underline{v} & - \end{pmatrix}$$

e riduciamola a scala. Se la riga $\underline{v}$ si riduce a zero, $\underline{v} \in W$.

- Costruiamo la matrice per colonne

$$\begin{pmatrix} | & \dots & | & | \\ \underline{w}_1 & \dots & \underline{w}_t & \underline{v} \\ | & \dots & | & | \end{pmatrix}$$

e riduciamola a scala. Se la riga $\underline{v}$ non ha pivot, $\underline{v} \in W$.

2. Dati $U, W \underset{\overline{SSP}}{\subseteq} V$, decidere se $U \underset{\overline{SSP}}{\subseteq} W$. Date basi B_U, B_W di U, W si può risolvere vedendo se ogni elemento di B_U sta in W , procedendo come sopra.

N.B. Si può anche procedere controllando la dimensione di $U \cap W$ usando il metodo usuale.

3. Dati $U, W \underset{\overline{SSP}}{\subseteq} V$, decidere se $U = W$. Si risolve verificando se $U \underset{\overline{SSP}}{\subseteq} W$ e $W \underset{\overline{SSP}}{\subseteq} U$.

Capitolo 16

Sedicesima Lezione - Esercizi

Esercizio 16.1. [HHH68] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 3), (1, -1, 3, 3)) \text{ e } W = \text{Span}((3, 2, 4, 4), (1, 1, 2, 2))$$

determinare una base di $V + W$.

Dimostrazione. Svolgiamo, per esercizio, i conti sia per righe che per colonne.

- Procediamo per righe

```
M:=Mat([[1,1,1,1],
        [2,1,3,3],
        [1,-1,3,3],
        [3,2,4,4],
        [1,1,2,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
      2^a-2*1^a [0, -1, 1, 1]
      3^a-1*1^a [0, -2, 2, 2]
      4^a-3*1^a [0, -1, 1, 1]
      5^a-1*1^a [0, 0, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
----- [0, -1, 1, 1]
      3^a-2*2^a [0, 0, 0, 0]
      4^a-1*2^a [0, 0, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, 1]
Potrei fermarmi qui ma continuo per avere una matrice a scala
cambio la 3^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 1],
      [0, -1, 1, 1],
      [0, 0, 1, 1],
```

```
[0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0] ])
```

Una base di $V + W$ è data da $B = (1, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$, le righe con pivot della matrice ridotta. Avrei potuto dirlo anche prima di fare lo scambio di righe per trovare la riduzione a scala.

Un'altra base è data dalla prima, seconda e quinta riga della matrice M , $B_1(1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2)$, ricordandomi che ho scambiato la terza e quinta riga durante la riduzione.

Se vogliamo una base ancora più semplice possiamo mettere la matrice in forma standard.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1, 1]
      2^a*-1 [0, 1, -1, -1]
----- [0, 0, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-1*3^a [1, 1, 0, 0]
      2^a--1*3^a [0, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-1*2^a [1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
```

Un'altra base di $V + W$ è $B_2 = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$.

- Procediamo per colonne

```
M1:=Mat([[1, 2, 1, 3, 1],
         [1, 1, -1, 2, 1],
         [1, 3, 3, 4, 2],
         [1, 3, 3, 4, 2]]);
RiduciScalaVerbose(M1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 3, 1]
      2^a-1*1^a [0, -1, -2, -1, 0]
      3^a-1*1^a [0, 1, 2, 1, 1]
      4^a-1*1^a [0, 1, 2, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 3, 1]
----- [0, -1, -2, -1, 0]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 1]
      4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 1]
```

```

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1,  2,  1,  3, 1]
----- [0, -1, -2, -1, 0]
----- [0,  0,  0,  0, 1]
      4^a-1*3^a [0,  0,  0,  0, 0]

```

I pivot della ridotta sono nella prima, seconda e quinta colonna. Una base di $V + W$ è data dalla prima, seconda e quinta colonna della matrice M : $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2)$.

Ricordiamo che le colonne della matrice ridotta non necessariamente generano $V + W$, o in generale lo Span delle colonne della matrice di partenza. Per esempio in questo caso le colonne della ridotta hanno sempre 0 nell'ultima componente, e una loro combinazione lineare non può generare per esempio $(1, 1, 1, 1)$, la prima colonna di M , che ha l'ultima componente non nulla.

□

Esempio 16.2. [GGG28]

$$\begin{aligned}
 \text{Span}_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ i \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ i \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5\alpha \\ i\alpha \\ 7\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 3\beta \\ 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 5\alpha + 3\beta \\ i\alpha + 2\beta \\ 7\alpha + \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{Q}^3
 \end{aligned}$$

Esempio 16.3. [GGG61] In $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ il vettore $x^3 + 2x - 1$ si scrive

- $(1, 0, 2, -1)_B$ rispetto alla base $B = x^3, x^2, x, 1$.
- $(-1, 2, 0, 1)_{B_1}$ rispetto alla base $B_1 = 1, x, x^2, x^3$.
- $(1, 0, 2, \frac{6}{5})_{B_2}$ rispetto alla base $B_2 = x^3 - 1, x^2 + x, x - 3, 5$ dato che

$$x^3 + 2x - 1 = \boxed{1}(x^3 - 1) + \boxed{0}(x^2 + x) + \boxed{2}(x - 3) + \boxed{\frac{6}{5}}(5)$$

[Verificare per esercizio che B_2 sia base]

Esempio 16.4. [GGG62] In $\mathcal{F} = \{F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ sia dato $V = \text{Span}(x, e^x, \sin^2 x, 1)$ di base $B = x, e^x, \sin^2 x, 1$. Il vettore $5x + \sin^2 x$ si scrive come

- $(5, 0, 1, 0)_B$ rispetto alla base B .

- $(1, 0, -1, 2)_{B'}$ rispetto alla base $B' = 5x, e^x, \cos^2 x, \frac{1}{2}$ dato che

$$5x + \sin^2 x = 1 \cdot (5x) + 0 \cdot (e^x) - 1 \cdot (\cos^2 x) + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

Per esercizio, verificare che B, B' siano basi di V .

Esempio 16.5. [HHH02] L $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{C}$ ha $\mathbb{R}$ -base $1, i$ ed ha $\mathbb{R}$ -dimensione 2 ($\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$), ovvero $\mathbb{C}$ ha dimensione 2 come $\mathbb{R}$ -spazio.

Soluzione. Che $1, i$ generino è immediato, dato che ogni $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere in forma cartesiana $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Per l'indipendenza lineare, vediamo che

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

per il principio di identità dei complessi in forma cartesiana, □

Esercizio 16.6. [KK12] Abbiamo i due $\mathbb{R}$ -sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(2x + y, 6x + 4y, 4x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

È vero che $V \subseteq W$? $V \supseteq W$? $V = W$?

Soluzione. Innanzitutto, per evitare confusioni con i nomi delle variabili, cambiamo la descrizione di W in

$$W = \{(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') \mid x', y' \in \mathbb{R}\}$$

Rispondiamo alle prime due domande. Se la risposta per entrambe è affermativa, allora $V = W$, altrimenti no.

- $V \subseteq W$ Questa domanda equivale a chiedersi se ogni elemento di V stia in W . Dato che ogni elemento di V si può scrivere come $(x, 2x, 3x)$ per un qualche $x \in \mathbb{R}$, mentre ogni elemento di W si può scrivere come $(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y')$ con $x', y' \in \mathbb{R}$, questo equivale a chiedersi

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists x', y' \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (x, 2x, 3x) = (2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y')$$

ovvero stiamo cercando di vedere se il sistema lineare nelle incognite x', y' (legate a $\exists$) e nel parametro x (legato a $\forall$)

$$(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') = (x, 2x, 3x) \text{ ovvero } \begin{cases} 2x' + y' = x \\ 6x' + 4y' = 2x \\ 4x' + y' = 3x \end{cases}$$

ha soluzioni. Creiamo la matrice completa associata al sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 6 & 4 & 2x \\ 4 & 1 & 3x \end{array} \right)$$

e riduciamola con Gauss.


```

Use R:=Q[x];
M:=Mat([[2,1,x],[6,4,2x],[4,1,3x]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, x]
      2^a-3*1^a [0, 1, -x]
      3^a-2*1^a [0, -1, x]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, x]
----- [0, 1, -x]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0]

```

Dato che l'ultima riga si è cancellata, questo è un sistema di 2 equazioni in 2 incognite, in forma triangolare superiore con pivot non nulli. Ha quindi una ed una sola soluzione, il che ci dice che $V \subseteq W$.

- $W \subseteq V$ Questa domanda equivale a chiedersi se ogni elemento di W stia in V . Dato che ogni elemento di V si può scrivere come $(x, 2x, 3x)$ per un qualche $x \in \mathbb{R}$, mentre ogni elemento di W si può scrivere come $(2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y')$ con $x', y' \in \mathbb{R}$, questa equivale a chiedersi

$$\forall x', y' \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') = (x, 2x, 3x)$$

ovvero stiamo cercandoci di vedere se il sistema nell'incognita x (legata a $\exists$) e nei parametri x', y' (legati a $\forall$)

$$(x, 2x, 3x) = (2x' + y', 6x' + 4y', 4x' + y') \text{ ovvero } \begin{cases} x = 2x' + y' \\ 2x = 6x' + 4y' \\ 3x = 4x' + y' \end{cases}$$

ha soluzioni. Risolviamo prendendo $x = 2x' + y'$ e sostituendo nella seconda e terza equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x = 2x' + y' \\ -2x' - 2y' = 0 \\ 2x' + 2y' = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 2x' + y' \\ x' + y' = 0 \end{cases}$$

e dalla seconda equazione risulta che esistono soluzioni non per tutte le x', y' , ma solo se $x' + y' = 0$. Quindi per esempio, non ci sono soluzioni per $x' = 1, y' = 0$. Quindi $W \not\subseteq V$

Dato che $V \subseteq W$ ma $W \not\subseteq V$ abbiamo che $V \neq W$

□

Provare per esercizio a procedere nel modo seguente: vedere se i vettori di una base di V stiano in W (che mi darebbe $V \subseteq W$) e trovare un vettore di W che non appartiene a V (che mi darebbe $W \not\subseteq V$).

Esercizio 16.7. [HHQ70] Dati i due sottospazi di $\mathbb{K}^5$

$$W_1 = \text{Span}((1, 1, 1, 1, 3), (2, 1, 3, 3, 2)) \text{ e } W_2 = \text{Span}((1, 2, 4, 4, 2), (2, -3, 1, 1, 4), (4, 1, 7, 7, 0))$$

determinare una base di $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

```

M:=Mat([[1, 2, 1, 2, 4],
        [1, 1, 2, -3, 1],
        [1, 3, 4, 1, 7],

```

```

      [1, 3, 4, 1, 7],
      [3, 2, 2, 4, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 4]
      2^a-1*1^a [0, -1, 1, -5, -3]
      3^a-1*1^a [0, 1, 3, -1, 3]
      4^a-1*1^a [0, 1, 3, -1, 3]
      5^a-3*1^a [0, -4, -1, -2, -12]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 4]
----- [0, -1, 1, -5, -3]
      3^a+1*2^a [0, 0, 4, -6, 0]
      4^a+1*2^a [0, 0, 4, -6, 0]
      5^a-4*2^a [0, 0, -5, 18, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 2, 4]
----- [0, -1, 1, -5, -3]
----- [0, 0, 4, -6, 0]
      4^a-1*3^a [0, 0, 0, 0, 0]
      5^a+5/4*3^a [0, 0, 0, 21/2, 0]
Scambio la 4^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 2, 4],
     [0, -1, 1, -5, -3],
     [0, 0, 4, -6, 0],
     [0, 0, 0, 21/2, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0]])

```

Ricordiamo che le prime due colonne sono relative ai generatori di V , le ultime tre colonne sono relative ai generatori di W .

Dato che i pivot sono nelle prime quattro colonne della matrice ridotta, una base di $V + W$ è data dalle prime quattro colonne della matrice di partenza, quindi da

$$(1, 1, 1, 1, 3), (2, 1, 3, 3, 2), (1, 2, 4, 4, 2), (2, -3, 1, 1, 4)$$

Un vettore generico di W è dato da

$$a(1, 2, 4, 4, 2) + b(2, -3, 1, 1, 4) + c(4, 1, 7, 7, 0)$$

Se imponiamo le condizioni date dalle righe della matrice con le prime due componenti nulle (le equazioni che coinvolgono solo le variabili a, b, c)

$$[0, 0, 4, -6, 0] \longrightarrow 4a - 6b = 0 \quad [0, 0, 0, 21/2, 0] \longrightarrow 21/2b = 0$$

ovvero $a = 3/2b$, $b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ otteniamo un vettore generico di $V \cap W$

$$0(1, 2, 4, 4, 2) + 0(2, -3, 1, 1, 4) + c(4, 1, 7, 7, 0)$$

da cui un sistema di generatori di $V \cap W$ è $c(4, 1, 7, 7, 0)$ e quindi una base di $V \cap W$ è $(4, 1, 7, 7, 0)$.

Esercizio 16.8. [EE8a] Siano dati i due $\mathbb{R}$ sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$V = \text{Span}(x^3 + x^2 + 7x + 2, x^3 + 2x^2 + 31x + 1, x)$$

$$W = \text{Span}(2x^3 + 16x + 8, x^3 - x^2 + 21x + 6, x)$$

- Determinare una base per V e una base per W .
- Determinare $\dim(V + W)$, $\dim(V \cap W)$.
- Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$V_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a^2 = b^2\}$$

determinare $(V \cap W) \cap V_1$.

Soluzione. Notiamo immediatamente che $x \in V, W$ e quindi $x \in V \cap W$, quindi $\dim V \cap W \geq 1$.

Con un lieve abuso di notazione, denotiamo i vettori di V, W con le loro coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$:

$$V = \text{Span}(\underline{u}_1 = (1, 1, 7, 2), \underline{u}_2 = (1, 2, 31, 1), \underline{u}_3 = (0, 0, 1, 0))$$

$$W = \text{Span}(\underline{v}_1 = (2, 0, 16, 8), \underline{v}_2 = (1, -1, 21, 6), \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0))$$

Scegliamo di trovare innanzitutto le basi di U, W

- Determinare una base per V e una base per W . Per determinare una base di V controlliamo se i tre vettori che lo generano sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice (vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ per riga)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 31 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è facile vedere che, per esempio, la sottomatrice

$$A_{(1,2,3);(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 31 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, sviluppando il determinante con Laplace secondo la terza riga. I vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ sono quindi linearmente indipendenti e $\dim U = 3$. Invece di prendere $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ come base, semplifichiamola (mettiamo i tre vettori per riga e operiamo alcune riduzioni - usiamo la terza riga per eliminare la terza componente del primo e secondo vettore, facciamo una riduzione di Gauss tra la prima e seconda riga)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 31 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base è quindi $(1, 1, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)$, ovvero $x^3 + x^2 + 2, x^2 - 1, x$.

Per determinare una base di W controlliamo se i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ che lo generano sono linearmente indipendenti calcolando il rango della matrice (vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ per riga)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 & 8 \\ 1 & -1 & 21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice

$$B_{(1,2,3);(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 1 & -1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, e quindi il rango di B è 3, i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti, $\dim W = 3$. Operando come per V , troviamo la base di W

$$(1, 0, 0, 4), (0, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0) \quad \text{ovvero} \quad x^3 + 4, -x^2 + 2, x$$

- Determinare $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$.

Per determinare $\dim(U + W)$ calcoliamo il rango della matrice le cui righe sono i vettori delle basi di U e W

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sottomatrice

$$C_{(1,2,3,4);(1,2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è non singolare, dato che sviluppando il determinante secondo Laplace per la terza riga otteniamo,

$$\begin{aligned} \det(C_{(1,2,3,4);(1,2,3,4)}) &= 1 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) + 4 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-1 - 2) + 4(1) \neq 0 \end{aligned}$$

Il rango della matrice è quindi 4, $\dim(U + W) = 4$ e per la formula di Grassman abbiamo che

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - 4 = 3 + 3 - 4 = 2$$

N.B. Avremmo potuto mettere i generatori di V, W per colonna e dopo una riduzione di gauss contare il numero di pivot. Visto che non è richiesta poi una base dell'intersezione, i due procedimenti sono equivalenti.

- Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$V_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a^2 = b^2\}$$

determinare $(U \cap W) \cap V_1$.

L'insieme V_1 non è lineare. Esprimendo i polinomi in base $B = x^3, x^2, x, 1$

$$V_1 = \{(a, b, c, d)_B \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 = b^2\}$$

L'intersezione $U \cap W$ ha dimensione 2, ed è un piano di $\mathbb{R}^4$ con un vettore generico (conosciamo già una sua base)

$$\alpha(1, 1, 0, 2) + \beta(0, 0, 1, 0) = (\alpha, \alpha, \beta, 2\alpha)$$

o se preferite

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = 2\alpha \end{cases}$$

La condizione di appartenenza di questo vettore generico a V_1 è $\alpha^2 = \alpha^2$, sempre verificata. Quindi il vettore generico di $U \cap W$ appartiene a V_1 , quindi ogni vettore di $U \cap W$ appartiene a V_1 e quindi l'insieme V_1 contiene $U \cap W$ e

$$(U \cap W) \cap V_1 = U \cap W$$

□

Vediamo un esercizio in spazi di dimensione alta, con molti conti. Non ci saranno esercizi computazionalmente così pesanti in un compito.

Esercizio 16.9. [III44] *Dati*

$$\begin{aligned} V &= \text{Span}((1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 4, 6, 8), (1, 1, -3, 6, 9, 12)) \\ W &= \text{Span}((1, 1, 0, 2, 3, 5), (2, 2, 0, 2, 3, 5), (1, 1, 1, 0, 0, 1)) \end{aligned}$$

Determinare dimensioni e basi per $V, W, V + W, V \cap W$.

Soluzione: Ricordiamo che il metodo prevede di uguagliare dei vettori generici di V, W per determinare le condizioni da porre al vettore generico di W per appartenere anche a V e quindi a $V \cap W$. Ovvero cercare le $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui esiste la relazione

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero di risolvere il sistema nelle variabili x, y, z, a, b, c , di cui però siamo interessati solo alle soluzioni in a, b, c soltanto (alle relazioni tra a, b, c).

```
V:=Mat([[1,1,1,1,1,1],
        [1,1,2,4,6,8],
        [1,1,-3,6,9,12]]);
W:=Mat([[1,1,0,2,3,5],
        [2,2,0,2,3,5],
        [1,1,1,0,0,1]]);
VW:=BlockMat([V],[W]);VW;
Mat[
  [1, 1, 1, 1, 1, 1],
  [1, 1, 2, 4, 6, 8],
```

```

[1, 1, -3, 6, 9, 12],
[1, 1, 0, 2, 3, 5],
[2, 2, 0, 2, 3, 5],
[1, 1, 1, 0, 0, 1]]
VW:=Transposed(VW);VW;
Mat[
  [1, 1, 1, 1, 2, 1],
  [1, 1, 1, 1, 2, 1],
  [1, 2, -3, 0, 0, 1],
  [1, 4, 6, 2, 2, 0],
  [1, 6, 9, 3, 3, 0],
  [1, 8, 12, 5, 5, 1]]
-- Questa e' la matrice associata al sistema che stiamo considerando;
-- le colonne sono i generatori di V, W
RiduciScalaVerbose(VW);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
      2^a-1*1^a [0, 0, 0, 0, 0, 0]
      3^a-1*1^a [0, 1, -4, -1, -2, 0]
      4^a-1*1^a [0, 3, 5, 1, 0, -1]
      5^a-1*1^a [0, 5, 8, 2, 1, -1]
      6^a-1*1^a [0, 7, 11, 4, 3, 0]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 3, 5, 1, 0, -1],
     [0, 5, 8, 2, 1, -1],
     [0, 7, 11, 4, 3, 0]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0]
      4^a-3*2^a [0, 0, 17, 4, 6, -1]
      5^a-5*2^a [0, 0, 28, 7, 11, -1]
      6^a-7*2^a [0, 0, 39, 11, 17, 0]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 17, 4, 6, -1],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 28, 7, 11, -1],
     [0, 0, 39, 11, 17, 0]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=17
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]

```

```

----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
----- [0, 0, 17, 4, 6, -1]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0]
    5^a-28/17*3^a [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17]
    6^a-39/17*3^a [0, 0, 0, 31/17, 55/17, 39/17]
Scambio la 4^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 17, 4, 6, -1],
     [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 0, 31/17, 55/17, 39/17]]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=7/17
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
----- [0, 0, 17, 4, 6, -1]
----- [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0]
    6^a-31/7*4^a [0, 0, 0, 0, -12/7, -4/7]
Scambio la 5^a e la 6^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 1, 1, 2, 1],
     [0, 1, -4, -1, -2, 0],
     [0, 0, 17, 4, 6, -1],
     [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17],
     [0, 0, 0, 0, -12/7, -4/7],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0]]
Ho trovato il pivot in posizione A[5, 5]=-12/7
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 2, 1]
----- [0, 1, -4, -1, -2, 0]
----- [0, 0, 17, 4, 6, -1]
----- [0, 0, 0, 7/17, 19/17, 11/17]
----- [0, 0, 0, 0, -12/7, -4/7]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

Ricordiamo che le prime tre colonne (generatori di V) sono associate alle variabili x, y, z , che compaiono nella descrizione generica di V . Ricordiamo che le ultime tre colonne (generatori di W) sono associate alle variabili

a, b, c , che compaiono nella descrizione generica di W . Quindi le relazioni tra a, b, c sono

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7/17a + 19/17b + 1/17c = 0 \\ -12/7b - 4/7c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 19b + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 19b - 3b = 0 \\ c = -3b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 16b = 0 \\ c = -3b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{7}b \\ c = -3b \end{cases} \end{aligned}$$

Abbiamo un vettore generico di W

$$\begin{aligned} a(1, 1, 0, 2, 3, 5) + b(2, 2, 0, 2, 3, 5) + c(1, 1, 1, 0, 0, 1) = \\ = (a + 2b + c, a + 2b + c, c, 2a + 2b, 3a + 3b, 5a + 5b + c) \end{aligned}$$

Imponiamo le relazioni $a = -\frac{16}{7}b$, $c = -3b$

$$\begin{aligned} \left(\left(-\frac{16}{7}b \right) + 2b - 3b, \left(-\frac{16}{7}b \right) + 2b - 3b, -3b, 2 \left(-\frac{16}{7}b \right) + 2b, \right. \\ \left. 3 \left(-\frac{16}{7}b \right) + 3b, \right. \\ \left. 5 \left(-\frac{16}{7}b \right) + 5b - 3b \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{23}{7}b, -\frac{23}{7}b, -3b, -\frac{18}{7}b, -\frac{27}{7}b, -\frac{66}{7}b \right) = \frac{b}{7}(-23b, -23b, -21b, -18b, -27b, -66b)$$

quindi

- $\dim V \cap W = 1$ e una sua base è

$$(-23, -23, -21, -18, -27, -66) \quad \text{o} \quad (23, 23, 21, 18, 27, 66)$$

.

- $\dim V = 3$ (tre pivot nelle colonne dei generatori di V); i suoi generatori sono anche sua base.
- $\dim V + W = 5$ (cinque pivot); una base è data dai generatori di V e dai primi due generatori di W .
- Da Grassman, $\dim W = \dim(V + W) + \dim V \cap W - \dim V = 5 + 1 - 3 = 3$. Quindi una base di W (che non abbiamo calcolato) è comunque data dai suoi tre generatori.

□

Esercizio 16.10. [IIB87] *Dati i sottospazi*

$$V = \text{Span}((1, 3, 0, 2), (1, 1, 1, 0), (3, 5, 2, 2)) \quad W = \text{Span}((-1, 7, -5, 8), (-1, 3, -3, 4), (0, 2, -1, 2))$$

di $\mathbb{C}^4$ vedere se $V = W$.

Dimostrazione. Determiniamo basi per V, W , vedremo poi se i vettori della base di V appartengono a W (mi darebbe $V \subseteq W$) e se i vettori della base di W appartengono a V (mi darebbe $W \subseteq V$). Se si verificano entrambi, avremo $V = W$.

- Determiniamo una base di V . I tre vettori generano V , vediamo quali sono linearmente indipendenti, per esempio riducendo con Gauss la matrice che li ha come righe

```
V:=Mat([[1,3,0,2],
        [1,1,1,0],
        [3, 5, 2, 2]]);
RiduciScalaVerbose(V);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 0, 2]
      2^a-(1)*1^a [0, -2, 1, -2]
      3^a-(3)*1^a [0, -4, 2, -4]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 0, 2]
----- [0, -2, 1, -2]
      3^a-(2)*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Non ci sono scambi di riga. I primi due vettori non si riducono a zero, quindi sono linearmente indipendenti. Il terzo, che si riduce a zero, è quindi una combinazione lineare dei primi due. Una base di V è quindi (visto che abbiamo messo i vettori come righe possiamo prendere indifferentemente le righe iniziali o quelle ridotte)

$$B_V = \underline{v}_1 = (1, 3, 0, 2), \quad \underline{v}_2 = (0, -2, 1, -2)$$

- Determiniamo una base di W . I tre vettori generano W , vediamo quali sono linearmente indipendenti, per esempio riducendo con Gauss la matrice che li ha come colonne

```
W:=Mat([[-1, -1, 0],
        [7, 3, 2],
        [-5, -3, -1],
        [8, 4, 2]]);
RiduciScalaVerbose(W);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [-1, -1, 0]
      2^a-(-7)*1^a [0, -4, 2]
      3^a-(-5)*1^a [0, 2, -1]
      4^a-(-8)*1^a [0, -4, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-4
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
```

```

----- [-1, -1, 0]
----- [0, -4, 2]
3^a-(-1/2)*2^a [0, 0, 0]
4^a-(1)*2^a [0, 0, 0]

```

Non ci interessa verificare se ci sono scambi di riga. Solo la prima e seconda colonna hanno un pivot, quindi sono linearmente indipendenti e la terza colonna è loro combinazione lineare. Una base di W è quindi (visto che abbiamo messo i vettori come colonne dobbiamo prendere le colonne iniziali, non possiamo prendere quelle ridotte)

$$B_W = \underline{w}_1 = (-1, 7, -5, 8), \underline{w}_2 = (-1, 3, -3, 4)$$

- Verifichiamo che i vettori della base di W appartengano a V verificando se le loro righe associate si riducono a zero riducendo con Gauss la matrice

$$\begin{bmatrix} - & \underline{v}_1 & - \\ - & \underline{v}_2 & - \\ - & \underline{w}_1 & - \\ - & \underline{w}_2 & - \end{bmatrix}$$

```

VW:=Mat([[1, 3, 0, 2],
         [0, -2, 1, -2],
         [-1, 7, -5, 8],
         [-1, 3, -3, 4]]);
RiduciScalaVerbose(VW);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 0, 2]
0 sotto pivot[0, -2, 1, -2]
3^a-(-1)*1^a [0, 10, -5, 10]
4^a-(-1)*1^a [0, 6, -3, 6]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, 0, 2]
----- [0, -2, 1, -2]
3^a-(-5)*2^a [0, 0, 0, 0]
4^a-(-3)*2^a [0, 0, 0, 0]

```

Dato che le ultime due colonne si riducono a zero, $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in V \Rightarrow W \subseteq V$.

- Verifichiamo che i vettori della base di V appartengano a W riducendo con Gauss la matrice

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \underline{w}_1 & \underline{w}_2 & \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

```

WV:=Mat([[-1, -1, 1, 0],
         [ 7,  3, 3, -2],
         [-5, -3, 0,  1],
         [ 8,  4, 2, -2]]);
RiduciScalaVerbose(WV);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-1

```

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```
----- [-1, -1, 1, 0]
2^a-(-7)*1^a [0, -4, 10, -2]
3^a-(5)*1^a [0, 2, -5, 1]
4^a-(-8)*1^a [0, -4, 10, -2]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-4

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```
----- [-1, -1, 1, 0]
----- [0, -4, 10, -2]
3^a-(-1/2)*2^a [0, 0, 0, 0]
4^a-(1)*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Dato che solo prime due colonne, associate a $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ hanno pivot, le ultime due, associate $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, sono loro combinazione lineare e quindi $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W \Rightarrow V \subseteq W$.

- Dato che $W \subseteq V$ e $V \subseteq W$, abbiamo che $V = W$.

□

Esercizio 16.11. [IIB01] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$M = \text{Span}((1, 0, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 4))$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Soluzione: Strategia: imponiamo ad un vettore generico di M le condizioni di appartenenza a N . Estrarremo un sistema di generatori dal vettore generico di $M \cap N$ ottenuto, ed una base da questo.

- Un vettore generico di M è

$$\underline{v} = x(1, 0, 1, 2) + y(2, 0, 1, 1) + z(-1, 0, 1, 4) = (x + 2y - z, 0, x + y + z, 2x + y + 4z)$$

- Le condizioni di appartenenza a N sono immediatamente leggibili dalla sua descrizione, ma per evitare confusioni riscriviamo

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\} \text{ come } \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b + c + d = 0\}$$

la condizione di appartenenza di un vettore a N è quindi $b + c + d = 0$ (la somma delle sue ultime tre componenti è nulla)

- Imponiamo questa condizione al vettore generico di M : $(x + 2y - z, 0, x + y + z, 2x + y + 4z)$. otteniamo

$$(0) + (x + y + z) + (2x + y + 4z) = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 5z = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z$$

- Un vettore generico di $M \cap N$ è quindi

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z\right)(1, 0, 1, 2) + y(2, 0, 1, 1) + z(-1, 0, 1, 4) &= \left(\frac{4}{3}y - \frac{8}{3}z, 0, \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) \\ &= y\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + z\left(-\frac{8}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Un sistema di generatori di $M \cap N$ è quindi

$$\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{8}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

o anche, se preferiamo, dopo aver moltiplicato il primo vettore per 3 ed il secondo per -3

$$(4, 0, 1, -1), (8, 0, 2, -2)$$

dato che il secondo vettore è multiplo del primo, una base $M \cap N$ è $(4, 0, 1, -1)$ e quindi $\dim M \cap N = 1$.

- La dimensione di N è chiaramente 3 (una sola condizione in uno spazio di dimensione 4). Per avere una base, vediamo che l'insieme delle soluzioni di $y + z + t = 0 \Leftrightarrow y = -z - t$ è (in $\mathbb{R}^4$)

$$\{(x, -z - t, z, t) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, -1, 1, 0) + z(0, -1, 0, 1) \mid x, z, t \in \mathbb{R}\}$$

ed una base è quindi $(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$.

- Calcoliamo la dimensione di M . Il rango della matrice che ha i generatori di M per colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è 2, dato che l'unica sottomatrice 3×3 che non sia ovviamente singolare,

$$A_{(1,2,3);(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha comunque determinante nullo. Per la formula di Grassman,

$$\dim M + N = \dim M + \dim N - \dim M \cap N \Rightarrow \dim M + N = 2 + 3 - 1 = 4$$

e dato che $M + N \subseteq \mathbb{R}^4$ ed ha dimensione 4, abbiamo che $M + N = \mathbb{R}^4$ ed ha come base, e.g. quella canonica E_4 .

□

Esercizio 16.12. [HHQ99] *Dati i sottospazi U, W generati rispettivamente dalle righe delle matrici A, B , determinare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U + W$ ed una base di $U \cap W$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$*

```
Use R:=Q[a];
-- Processo di costruzione della matrice
A:=Mat([[1,2,1,3,5],
        [2,4,3,1,0],
        [0,2,2,2,2]]);
B:=Mat([[1,1,1,1,0],
        [3, 8, 6, 6, 7],
        [-1, 2, 2a, 2, a]]);
AB:=BlockMat([A], [B]);
AB:=Mat([[1, 2, 1, 3, 5],
        [2, 4, 3, 1, 0],
        [0, 2, 2, 2, 2],
```

```

      [1, 1, 1, 1, 0],
      [3, 8, 6, 6, 7],
      [-1, 2, 2a, 2, a]])
AB:=Transposed(AB);

-- Questa e' la matrice che riduciamo
AB:=Mat([[1, 2, 0, 1, 3, -1],
        [2, 4, 2, 1, 8, 2],
        [1, 3, 2, 1, 6, 2a],
        [3, 1, 2, 1, 6, 2],
        [5, 0, 2, 0, 7, a]])
RiduciScalaVerbose(AB);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
        2^a-2*1^a [0, 0, 2, -1, 2, 4]
        3^a-1*1^a [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
        4^a-3*1^a [0, -5, 2, -2, -3, 5]
        5^a-5*1^a [0, -10, 2, -5, -8, a + 5]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 0, 1, 3, -1],
     [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1],
     [0, 0, 2, -1, 2, 4],
     [0, -5, 2, -2, -3, 5],
     [0, -10, 2, -5, -8, a + 5]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
----- [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
0 sotto pivot[0, 0, 2, -1, 2, 4]
  4^a+5*2^a [0, 0, 12, -2, 12, 10a + 10]
  5^a+10*2^a [0, 0, 22, -5, 22, 21a + 15]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
----- [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
----- [0, 0, 2, -1, 2, 4]
        4^a-6*3^a [0, 0, 0, 4, 0, 10a - 14]
        5^a-11*3^a [0, 0, 0, 6, 0, 21a - 29]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=4
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 3, -1]
----- [0, 1, 2, 0, 3, 2a + 1]
----- [0, 0, 2, -1, 2, 4]
----- [0, 0, 0, 4, 0, 10a - 14]
        5^a-3/2*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 6a - 8]

```

Leggiamo i risultati dalla matrice ridotta:

- Se $a \neq 4/3$: ho cinque pivot nella ridotta, di cui tre nelle prime tre colonne, quindi $\dim U = 3$ e

$\dim U + W = 5$. Imponiamo al vettore generico di W

$$x(1, 1, 1, 1, 0) + y(3, 8, 6, 6, 7) + z(-1, 2, 2a, 6, 9a)$$

le condizioni che ci derivano dalle righe con le prime tre componenti nulle ricordando $a \neq 4/3$:

$$\begin{cases} 4x + (10a - 14)z = 0 \\ (6a - 8)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e quindi un vettore generico di $U \cap W$ è $y(3, 8, 6, 6, 7)$, una base $(3, 8, 6, 6, 7)$, e $\dim(U \cap W) = 1$ e per Grassman $\dim W = 3$. Avremmo potuto calcolare separatamente la dimensione di W , ma ci viene gratis dai conti già fatti.

- Se $a = 4/3$ la matrice diviene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 11/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ho quattro pivot nella ridotta, di cui tre nelle prime tre colonne, quindi $\dim U = 3$ e $\dim U + W = 4$. Imponiamo al vettore generico di W

$$x(1, 1, 1, 1, 0) + y(3, 8, 6, 6, 7) + z(-1, 2, 2a, 6, 9a)$$

le condizioni che ci derivano dalle righe con le prime tre componenti nulle

$$4x - 2/3z = 0 \Leftrightarrow x = 1/6z$$

Otteniamo un vettore generico di $U \cap W$

$$\frac{z}{6}(1, 1, 1, 1, 0) + y(3, 8, 6, 6, 7) + z(-1, 2, 8/3, 6, 12) = y(3, 8, 6, 6, 7) + z(1, 2, 8/3, 6, 12)$$

Quindi $(3, 8, 6, 6, 7)$, $(1, 2, 8/3, 6, 12)$, che sono ovviamente indipendenti, generano $U \cap W$ e ne sono quindi base. Abbiamo $\dim(U \cap W) = 2$ e quindi, per Grassman, $\dim W = 3$. Come prima, avremmo potuto calcolare separatamente la dimensione di W , ma ci viene gratis dai conti già fatti.

Esercizio 16.13. [HHA00] Dire se i tre sottospazi di R^7

$$W_1 = \text{Span}((1, 2, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3))$$

$$W_2 = \text{Span}((3, 2, 0, 0, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 3, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$$

$$W_3 = \text{Span}((2, 4, 3, 3, 2, 2, 2), (3, 2, 0, 1, 1, 2, 1))$$

sono in somma diretta.

Soluzione. Vediamo facilmente che $\dim W_1 = \dim W_3 = 2$. Dato che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i generatori di W_3 ha la sottomatrice $A_{(1,2,3);(4,5,7)}$ non singolare, ha rango 3, le righe sono linearmente indipendenti e quindi $\dim W_3 = 2$. La dimensione attesa di $W_1 + W_2 + W_3$ perché esso sia somma diretta è 7. Vediamo

```

M1:=Mat([[1,2,0,0,0,1,2],[1,1,1,2,2,3,3]]);
M2:=Mat([[3,2,0,0,0,1,1],[1,2,3,3,2,1,0],[0,0,0,1,1,1,0]]);
M3:=Mat([[2, 4, 3, 3, 2, 2, 2],[3, 2, 0, 1, 1, 2, 1]]);
M:=BlockMatrix([[M1],[M2],[M3]]);
M:=Mat([[1, 2, 0, 0, 0, 1, 2],
        [1, 1, 1, 2, 2, 3, 3],
        [3, 2, 0, 0, 0, 1, 1],
        [1, 2, 3, 3, 2, 1, 0],
        [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0],
        [2, 4, 3, 3, 2, 2, 2],
        [3, 2, 0, 1, 1, 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
      2^a-1*1^a [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
      3^a-3*1^a [0, -4, 0, 0, 0, -2, -5]
      4^a-1*1^a [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
      6^a-2*1^a [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
      7^a-3*1^a [0, -4, 0, 1, 1, -1, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
      3^a-4*2^a [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
0 sotto pivot[0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
      7^a-4*2^a [0, 0, -4, -7, -7, -9, -9]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
      4^a+3/4*3^a [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
      6^a+3/4*3^a [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
      7^a-1*3^a [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-3
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
      5^a+1/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
      6^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
      7^a+1/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]

```

Una riga tra le sette righe della matrice si riduce a 0, quindi possiamo dire subito che $\dim W_1 + W_2 + W_3 < 7$

e la somma non può essere diretta.

Potevamo fare il conto mettendo i vettori per colonna

```

M1:=Mat([[1,2,0,0,0,1,2],[1,1,1,2,2,3,3]]);
M2:=Mat([[3,2,0,0,0,1,1],[1,2,3,3,2,1,0],[0,0,0,1,1,1,0]]);
M3:=Mat([[2, 4, 3, 3, 2, 2, 2],[3, 2, 0, 1, 1, 2, 1]]);
M:=Transposed(BlockMatrix([M1],[M2],[M3]]));
M:=Mat([[1, 1, 3, 1, 0, 2, 3],
        [2, 1, 2, 2, 0, 4, 2],
        [0, 1, 0, 3, 0, 3, 0],
        [0, 2, 0, 3, 1, 3, 1],
        [0, 2, 0, 2, 1, 2, 1],
        [1, 3, 1, 1, 1, 2, 2],
        [2, 3, 1, 0, 0, 2, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
      2^a-2*1^a [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
      0 sotto pivot[0, 1, 0, 3, 0, 3, 0]
      0 sotto pivot[0, 2, 0, 3, 1, 3, 1]
      0 sotto pivot[0, 2, 0, 2, 1, 2, 1]
      6^a-1*1^a [0, 2, -2, 0, 1, 0, -1]
      7^a-2*1^a [0, 1, -5, -2, 0, -2, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
      3^a+1*2^a [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
      4^a+2*2^a [0, 0, -8, 3, 1, 3, -7]
      5^a+2*2^a [0, 0, -8, 2, 1, 2, -7]
      6^a+2*2^a [0, 0, -10, 0, 1, 0, -9]
      7^a+1*2^a [0, 0, -9, -2, 0, -2, -9]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
----- [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
      4^a-2*3^a [0, 0, 0, -3, 1, -3, 1]
      5^a-2*3^a [0, 0, 0, -4, 1, -4, 1]
      6^a-5/2*3^a [0, 0, 0, -15/2, 1, -15/2, 1]
      7^a-9/4*3^a [0, 0, 0, -35/4, 0, -35/4, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-3
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
----- [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
----- [0, 0, 0, -3, 1, -3, 1]
      5^a-4/3*4^a [0, 0, 0, 0, -1/3, 0, -1/3]
      6^a-5/2*4^a [0, 0, 0, 0, -3/2, 0, -3/2]

```



```

7^a-35/12*4^a [0, 0, 0, 0, -35/12, 0, -35/12]
Ho trovato il pivot in posizione A[5, 5]=-1/3
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, 0, 2, 3]
----- [0, -1, -4, 0, 0, 0, -4]
----- [0, 0, -4, 3, 0, 3, -4]
----- [0, 0, 0, -3, 1, -3, 1]
----- [0, 0, 0, 0, -1/3, 0, -1/3]
6^a-9/2*5^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
7^a-35/4*5^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

Dato che abbiamo 5 pivot, $\dim W_1 + W_2 + W_3 = 5$.

Potevamo anche calcolare il rango di M con altri metodi.....

□

Esercizio 16.14. [HHA01] *Dire se i tre sottospazi di R^7*

$$W_1 = \text{Span}((1, 2, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3))$$

$$W_2 = \text{Span}((3, 2, 0, 0, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 3, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$$

$$W_3 = \text{Span}((2, 0, 3, 3, 0, 2, 0), (2, 2, 0, 1, 1, 2, 1))$$

sono in somma diretta:

Soluzione: Come per l'esercizio 16.13, si vede facilmente che $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim W_3 = 2$.

```

M1:=Mat([[1,2,0,0,0,1,2],[1,1,1,2,2,3,3]]);
M2:=Mat([[3,2,0,0,0,1,1],[1,2,3,3,2,1,0],[0,0,0,1,1,1,0]]);
M3:=Mat([[2, 0, 3, 3, 0, 2, 0],[2, 2, 0, 1, 1, 2, 1]]);
M:=BlockMatrix([M1],[M2],[M3]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
2^a-1*1^a [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
3^a-3*1^a [0, -4, 0, 0, 0, -2, -5]
4^a-1*1^a [0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
6^a-2*1^a [0, -4, 3, 3, 0, 0, -4]
7^a-2*1^a [0, -2, 0, 1, 1, 0, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
3^a-4*2^a [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
0 sotto pivot[0, 0, 3, 3, 2, 0, -2]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
6^a-4*2^a [0, 0, -1, -5, -8, -8, -8]
7^a-2*2^a [0, 0, -2, -3, -3, -4, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-4

```

```

Cancello la 3a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
      4a+3/4*3a [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
      6a-1/4*3a [0, 0, 0, -3, -6, -11/2, -23/4]
      7a-1/2*3a [0, 0, 0, 1, 1, 1, -1/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=-3
Cancello la 4a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
      5a+1/3*4a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
      6a-1*4a [0, 0, 0, 0, -2, 2, 3]
      7a+1/3*4a [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -41/12]
Ho trovato il pivot in posizione A[5, 5]=-1/3
Cancello la 5a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
----- [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
      6a-6*5a [0, 0, 0, 0, 0, 11, 41/2]
      7a-1*5a [0, 0, 0, 0, 0, 0, -1/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[6, 6]=11
Cancello la 6a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 2]
----- [0, -1, 1, 2, 0, 2, 2, 1]
----- [0, 0, -4, -8, -8, -10, -9]
----- [0, 0, 0, -3, -4, -15/2, -35/4]
----- [0, 0, 0, 0, -1/3, -3/2, -35/12]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 11, 41/2]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1/2]

```

Abbiamo 7 pivot, quindi $\dim W_1 + W_2 + W_3 = 7 = \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3$ e la somma è quindi diretta. $\square$

Esercizio 16.15. [HHA02] Dati $W_1, W_2, W_3 \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^7$,

$$W_1 = \text{Span}((1, 2, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 2, 2, 3, 0))$$

$$W_2 = \text{Span}((0, 2, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0))$$

$$W_3 = \text{Span}((1, 0, 2, 3, 0, 2, 0), (0, 2, 1, 1, 1, 2, 0))$$

dire se $W_1 + W_2 + W_3$ sono in somma diretta:

Soluzione: È immediato che $\dim W_2 = \dim W_3 = 2$. Per calcolare $\dim W_2$ vediamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è 3 in quanto la sottomatrice $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$ è non singolare.

Quindi il rango atteso è $2+3+2=7$. Notiamo però che tutti i generatori dei W_i hanno ultima componente nulla. Quindi tutti e tre sono sottospazi di $\{(x, y, z, t, a, b, c) \in \mathbb{R}^7 \mid c = 0\}$ che ha dimensione 6 e quindi $W_1 + W_2 + W_3$ ha dimensione al più 6, e la somma non può essere diretta. $\square$

Esercizio 16.16. [HHA18] *Vogliamo determinare una base dell'intersezione degli spazi*

$$W_1 = \text{Span}((1, 1, 0, 1, 1), (2, 3, 4, 2, 1), (0, -1, -4, 1, 1))$$

$$W_2 = \text{Span}((1, 1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 3, 8, 0, 0))$$

Soluzione: Col metodo dei vettori generici

```
-- Costruiamo la matrice
W1:=Mat([[1,1,0,1,1],[2,3,4,2,1],[0, -1, -4, 1,1]]);
W2:=Mat([[1,1,1,1,2],[1, 0, 1, 1,0],[1, 3, 8, 0,0]]);
M:=BlockMat([[Transposed(W1),Transposed(W2)]]);
-- Questa e' la matrice che riduciamo
M:=Mat([[1, 2, 0, 1, 1, 1],
        [1, 3, -1, 1, 0, 3],
        [0, 4, -4, 1, 1, 8],
        [1, 2, 1, 1, 1, 0],
        [1, 1, 1, 2, 0, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 1, -1, 0, -1, 2]
0 sotto pivot[0, 4, -4, 1, 1, 8]
      4^a-1*1^a [0, 0, 1, 0, 0, -1]
      5^a-1*1^a [0, -1, 1, 1, -1, -1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, 0, -1, 2]
      3^a-4*2^a [0, 0, 0, 1, 5, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 1, 0, 0, -1]
      5^a+1*2^a [0, 0, 0, 1, -2, 1]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 2, 0, 1, 1, 1],
     [0, 1, -1, 0, -1, 2],
     [0, 0, 1, 0, 0, -1],
     [0, 0, 0, 1, 5, 0],
     [0, 0, 0, 1, -2, 1]]
```

```

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, 0, -1, 2]
----- [0, 0, 1, 0, 0, -1]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 5, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, -2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 4]=1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, 0, -1, 2]
----- [0, 0, 1, 0, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5, 0]
      5^a-1*4^a [0, 0, 0, 0, -7, 1]

```

Questo ci dice che le relazioni tra le variabili a, b, c sono

$$\begin{cases} a + 5b = 0 \\ -7b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5b \\ c = 7b \end{cases}$$

e che quindi la dimensione dell'intersezione è 1 (#variabili - #condizioni indipendenti) e che il vettore generico dell'intersezione è

$$\begin{aligned} a(1, 1, 1, 1, 2) + b(1, 0, 1, 1, 0) + c(1, 3, 8, 0, 0) &= -5b(1, 1, 1, 1, 2) + b(1, 0, 1, 1, 0) + 7b(1, 3, 8, 0, 0) \\ &= (3b, 16b, 52b, -4b, -10b) \end{aligned}$$

e quindi una base di $W_1 \cap W_2$ è $(3, 16, 52, -4, -10)$. Quindi $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. Leggiamo dalla matrice $\dim W_1 + W_2 = 5$ e $\dim W_1 = 3$ (le prime tre colonne sono linearmente indipendenti). Quindi $\dim W_2 = 3$. Notiamo che comunque NON abbiamo una base di W_2 , mentre abbiamo le basi di W_1 , (i tre generatori), $W_1 + W_2$ (i tre generatori di W_1 e i primi due di W_2) e un sistema di generatori di $W_1 \cap W_2$, da cui abbiamo estratto una base. $\square$

Esercizio 16.17. [IID67] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^6$*

$$\begin{aligned} V &= \text{Span}((1, 2, 3, 5), (3, 1, 2, 1), (-3, 4, 5, 13)) \\ W &= \text{Span}(-3x - 2, 4x + 1, 5x + 1, 13x + 4), (3, 1, x, x)) \end{aligned}$$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ determinare basi di $V, W, V + W$ e $V \cap W$.

Soluzione: Per esercizio, verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$, i vettori $(1, 2, 3, 5), (3, 1, 2, 1), (-3, 4, 5, 13)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di W . Hint: vedere che la matrice associata ai due vettori ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$, almeno una sottomatrice di ordine due non singolare. Quindi $\dim V = 2$

Procediamo mettendo i generatori di V (per primi) e di W (per secondi) come colonne di una matrice e riducendola con Gauss.

```

--Costruiamo la matrice
W1:=Mat([[1,2,3,5],[3,1,2,1],[-3, 4, 5, 13]]);
W2:=Mat([[-3x - 2, 4x + 1, 5x + 1, 13x + 4],[3,1,x,x]]);
M:=BlockMat([Transposed(W1),Transposed(W2)]);
-- Questa e' la matrice che riduciamo

```

```

M:=Mat([[1, 3, -3, -3x - 2, 3],
        [2, 1, 4, 4x + 1, 1],
        [3, 2, 5, 5x + 1, x],
        [5, 1, 13, 13x + 4, x]]);
RiduciScalaVerbose(M);

```

```

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, -3, -3x - 2, 3]
      2^a-(2)*1^a [0, -5, 10, 10x + 5, -5]
      3^a-(3)*1^a [0, -7, 14, 14x + 7, x - 9]
      4^a-(5)*1^a [0, -14, 28, 28x + 14, x - 15]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 3, -3, -3x - 2, 3]
----- [0, -5, 10, 10x + 5, -5]
      3^a-(7/5)*2^a [0, 0, 0, 0, x - 2]
      4^a-(14/5)*2^a [0, 0, 0, 0, x - 1]

```

Vediamo i due casi

- $x \neq 2$. Al prossimo passo di riduzione la matrice diviene

```

[1, 3, -3, -3x - 2, 3]
[0, -5, 10, 10x + 5, -5]
[0, 0, 0, 0, x - 2]
[0, 0, 0, 0, 0]

```

Ci sono tre pivot, quindi $\dim V + W = 3$. Una base di $V + W$ è formata dai generatori associati alle colonne coi pivot, (NON dalle colonne ridotte, cfr. esercizi precedenti)quindi

$$B_{V+W} = (1, 2, 3, 5), (3, 1, 2, 1), (3, 1, x, x)$$

Le prime tre colonne hanno due pivot, quindi $\dim V = 2$, ed una base di V è formata dai primi due generatori, quelli associati alle colonne coi pivot.

$$B_V = (1, 2, 3, 5), (3, 1, 2, 1)$$

La formula di Grassman ci dá

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Troviamo la base di $V \cap W$. Abbiamo che le ultime due righe della matrice sono quelle che ci danno la parte $[0|S]$, e che la matrice S , che ci dá le condizioni di appartenenza del vettore generico

$$\alpha \cdot (-3x - 2, 4x + 1, 5x + 1, 13x + 4) + \beta \cdot (3, 1, x, x)$$

di W anche a V è

$$\begin{pmatrix} 0 & x-2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui le condizioni sono

$$\begin{pmatrix} 0 & x-2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \cdot \alpha + (x-2) \cdot \beta = 0 \\ 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x-2) \cdot \beta = 0$$

e dato che $x - 2 \neq 0$ concludiamo che $\beta = 0$. Questa è l'unica condizione da imporre al vettore generico di W perché stia anche in V . Imponiamo ed otteniamo che

$$\alpha \cdot (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4) + \beta \cdot (3, 1, x, x) \quad + \text{ condizione } \beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4)$$

è il vettore generico di $V \cap W$. Una base di $V \cap W$ è quindi, al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$B_{V \cap W} = (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4)$$

- $x = 2$ La matrice è

$$\begin{bmatrix} 1, & 3, & -3, & -3x-2, & 3 \\ 0, & -5, & 10, & 10x+5, & -5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Con uno scambio di righe la portiamo a scala

$$\begin{bmatrix} 1, & 3, & -3, & -3x-2, & 3 \\ 0, & -5, & 10, & 10x+5, & -5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Procedendo come nel caso precedente $x \neq 0$ troviamo le stesse basi di $V, V+W$ e come prima $\dim V \cap W = 1$. La matrice S , che ci dá le condizioni di appartenenza del vettore generico

$$\alpha \cdot (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4) + \beta \cdot (3, 1, x, x)$$

di W anche a V è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui le condizioni sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = 0 \\ 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = 0$$

Questa è l'unica condizione da imporre al vettore generico di W perché stia anche in V . Imponiamo ed otteniamo che

$$\alpha \cdot (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4) + \beta \cdot (3, 1, x, x) \quad + \text{ condizione } \beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4)$$

è il vettore generico di $V \cap W$. Una base di $V \cap W$ è quindi, al variare di $x \in \mathbb{R}$, è, come prima

$$B = (-3x-2, 4x+1, 5x+1, 13x+4)$$

□

Esercizio 16.18. [GGQ33] *Abbiamo che*

$$\underline{v} = (1, 3, 2, 1) \in \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\} = W ?$$

In questo caso W è del tipo $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$. Vediamo se $\underline{v}$ è soluzione del sistema. Sostituiamo.

$$\begin{cases} x - 2z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}_{x=1, y=3, z=2, t=1} = \begin{cases} 1 - 4 + 1 = 0 \\ 1 - 3 + 2 = 0 \end{cases}$$

La prima non è un'uguaglianza. Quindi $\underline{v} \notin W$

Esercizio 16.19. [GGQ32]

- È vero che

$$(4, 0, 2, 1) \in \text{Span}((1, 0, 3, 2), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 0)) ?$$

Usando la definizione di Span, bisogna vedere se esistono α, β, γ tali che

$$\alpha(1, 0, 3, 2) + \beta(1, 0, 1, 1) + \gamma(2, 0, 0, 0) = (4, 0, 2, 1)$$

ovvero se il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ha soluzioni. La matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Il rango dell'incompleta è massimo, 3, perché la sottomatrice

$$A_{(1,3,4);(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare. Il rango della completa è 3 dato che il suo determinante è nullo ed ha la stessa sottomatrice 3×3 dell'incompleta. Dato che i due ranghi sono uguali, esistono soluzioni per il teorema di Rouché-Capelli.

- È vero che

$$\underline{v} = (1, 2, 3, 2) \in \text{Span}((1, 0, 3, 2), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 0)) ?$$

No, perché tutti i vettori nello Span hanno seconda componente nulla, e $\underline{v}$ no.

Esercizio 16.20. [MK55] Determinare se le matrici

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, & M_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ M_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, & M_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, & M_6 &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti, ed in caso contrario determinare una base dello spazio che generano e le relazioni tra di esse.

Soluzione. Esprimiamo la matrici nella base canonica di $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $(M_{1,1}, M_{1,2}, M_{2,1}, M_{2,2})$, dove

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} M_1 &= (1, 2, 3, 2), & M_2 &= (1, 0, -1, 3), & M_3 &= (2, 2, 2, 5) \\ M_4 &= (0, 1, 2, 1), & M_5 &= (1, 4, 7, 1), & M_6 &= (1, -4, -9, 5) \end{aligned}$$

Mettiamo i vettori, per riga, nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_7 \end{matrix}$$

e riduciamola con Gauss

```
A:=Mat([[1, 2, 3, 2],
        [1, 0, -1, 3],
        [2, 2, 2, 5],
        [0, 1, 2, 1],
        [1, 4, 7, 1],
        [1, -4, -9, 5]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2]
      2^a-1*1^a [0, -2, -4, 1]
      3^a-2*1^a [0, -2, -4, 1]
0 sotto pivot[0, 1, 2, 1]
      5^a-1*1^a [0, 2, 4, -1]
      6^a-1*1^a [0, -6, -12, 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2]
----- [0, -2, -4, 1]
      3^a-1*2^a [0, 0, 0, 0]
      4^a+1/2*2^a [0, 0, 0, 3/2]
      5^a+1*2^a [0, 0, 0, 0]
      6^a-3*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Dato che non abbiamo effettuato scambi ri riga, questo ci dice che le matrici M_1, M_2, M_4 sono linearmente indipendenti, mentre le matrici M_3, M_5, M_6 si esprimono come combinazione lineare di queste.

Vogliamo adesso trovare queste combinazioni lineari. Usiamo il metodo delle variabili tag, aggiungendo l'opportuna colonna alla matrice A

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & m_1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & m_2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & m_3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & m_4 \\ 1 & 4 & 7 & 1 & m_5 \\ 1 & -4 & -9 & 5 & m_6 \end{pmatrix}$$

```
Use R:=Q[m[1..6]];
A1:=Mat([[1, 2, 3, 2,m[1]],
         [1, 0, -1, 3,m[2]],
         [2, 2, 2, 5,m[3]],
         [0, 1, 2, 1,m[4]],
         [1, 4, 7, 1,m[5]],
         [1, -4, -9, 5,m[6]]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A1);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2, m[1]]
      2^a-1*1^a [0, -2, -4, 1, -m[1] + m[2]]
      3^a-2*1^a [0, -2, -4, 1, -2m[1] + m[3]]
0 sotto pivot[0, 1, 2, 1, m[4]]
      5^a-1*1^a [0, 2, 4, -1, -m[1] + m[5]]
      6^a-1*1^a [0, -6, -12, 3, -m[1] + m[6]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 2, m[1]]
----- [0, -2, -4, 1, -m[1] + m[2]]
      3^a-1*2^a [0, 0, 0, 0, -m[1] - m[2] + m[3]]
      4^a+1/2*2^a [0, 0, 0, 3/2, -1/2m[1] + 1/2m[2] + m[4]]
      5^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, -2m[1] + m[2] + m[5]]
      6^a-3*2^a [0, 0, 0, 0, 2m[1] - 3m[2] + m[6]]
```

Le ultime componenti della terza, quinta e sesta riga ci dicono che

$$\begin{aligned} -M[1] - M[2] + M[3] &= 0 \\ -2M[1] + M[2] + M[5] &= 0 \\ 2M[1] - 3M[2] + M[6] &= 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} M[3] &= M[1] + M[2] \\ M[5] &= 2M[1] - M[2] \\ M[6] &= -2M[1] + 3M[2] \end{aligned}$$

e queste sono le combinazioni lineari richieste.

□

Esempio 16.21. [GGG15] L'insieme $\pi : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b + c + 1 = 0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ non è un $\mathbb{R}$ -sottospazio di $\mathbb{R}^3$. È facile vedere che $\underline{0} \notin \pi$, dato che $\underline{0}$ non soddisfa la condizione di appartenenza a π .

$$(0, 0) \in \pi \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + 1 = 0 & \text{falso} \end{cases}$$

Notiamo che π è un piano dello spazio $\mathbb{R}^3$ che non passa per l'origine.

Esercizio 16.22. [HHH27] Completare se possibile a base di $\mathbb{R}^6$ i vettori

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (0, 1, 2, 0, 1, 0), & \underline{v}_2 &= (0, 1, 2, 0, 2, 0), & \underline{v}_3 &= (0, 1, 2, 0, 3, 0), \\ \underline{v}_4 &= (0, 0, 0, -3, -5, 0), & \underline{v}_5 &= (1, 0, 0, 2, 5, 0) \end{aligned}$$

Soluzione. Costruiamo la matrice che ha i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5$ come righe e riduciamola a scala. Per l'ultima colonna, aggiungiamo le "tag variables" $v[1], \dots, v[5]$ per tenere conto degli scambi di riga. Sull'ultima colonna non effettuiamo altre operazioni che gli scambi di riga, dato che non siamo interessati alle particolari combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_5$ che mi danno le righe della matrice.

```
Use R:=Q[v[1..5]];
M:=Mat([[0,1,2,0,1,0,v[1]],
        [0,1,2,0,2,0,v[2]],
        [0,1,2,0,3,0,v[3]],
        [0,0,0,-3,-5,0,v[4]],
        [1,0,0,2,5,0,v[5]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Scambio la 1^a e la 5^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]],
     [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]],
     [0, 1, 2, 0, 3, 0, v[3]],
     [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]],
     [0, 1, 2, 0, 1, 0, v[1]]]
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
    0 sotto pivot[0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
    0 sotto pivot[0, 1, 2, 0, 3, 0, v[3]]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
    0 sotto pivot[0, 1, 2, 0, 1, 0, v[1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
----- [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
          3^a-1*2^a [0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
          5^a-1*2^a [0, 0, 0, 0, -1, 0, v[1]]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]],
     [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]],
     [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]],
```

```

[0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]],
[0, 0, 0, 0, -1, 0, v[1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=-3
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
----- [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
----- [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1, 0, v[1]]

Ho trovato il pivot in posizione A[4, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 5, 0, v[5]]
----- [0, 1, 2, 0, 2, 0, v[2]]
----- [0, 0, 0, -3, -5, 0, v[4]]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, v[3]]
    5^a+1*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 0, v[1]]

```

Quindi le prime quattro righe (i vettori $\underline{v}_5, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_3$) sono linearmente indipendenti. Il vettore $\underline{v}_1$ è combinazione lineare di $\underline{v}_5, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_3$ e una base di $\mathbb{R}^5$ mi è data da $\underline{v}_5, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_3, \underline{e}_6$, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, □

Esercizio 16.23. [HHQ61] *Caratterizzare i sottospazi di $\mathbb{R}^2$.*

Soluzione. Abbiamo sicuramente $\text{Span}(\underline{0})$ e $\mathbb{R}^2$, i sottospazi banali. I sottospazi propri devono avere dimensione strettamente compresa tra 0 e 2, quindi devono avere dimensione 1. Devono contenere almeno un vettore $(a, b) \neq \underline{0}$, e quindi tutti i suoi multipli. Devono quindi contenere tutti i vettori della retta per (a, b) . Devono altresì contenere il vettore $\underline{0}$, quindi queste rette devono passare per l'origine. Le rette che passano per l'origine sono quindi sottospazi di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1. Vediamo che non ce ne sono altri:

Sia $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$, $\dim V = 1$. Quindi V ha base $B = \underline{v}_1$. Dato che la base genera, ogni vettore di V deve essere multiplo di $\underline{v}_1$, e quindi V è una retta (passante per l'origine). □

Esempio 16.24. [GGA37]

1. $(3, 2, 1) \in \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Infatti $(3, 2, 1) = 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3$
2. $(2, 1, 3, 2) \in \text{Span}((1, 2, 3, 2), (3, 1, 2, 2), (2, 2, 2, 2))$ dato che una soluzione del sistema

$$\alpha(1, 2, 3, 2) + \beta(3, 1, 2, 2) + \gamma(2, 2, 2, 2) = (2, 1, 3, 2)$$

è $(1, 1, -1)$, il che implica che

$$(2, 1, 3, 2) = (1, 2, 3, 2) + (3, 1, 2, 2) - (2, 2, 2, 2)$$

3. $x^3 + 3x^2 - 1 \in \text{Span}(1, x, x^2, x^3)$, dato che chiaramente

$$x^3 + 3x^2 - 1 = -1(1) + 0(x) + 3(x^2) + 1(x^3)$$

Esercizio 16.25. [GGG43]

1. $x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$?

(a) Potrei vedere se un polinomio generico $ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{K}$ di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ appartiene a $\text{Span}(x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1)$, ovvero dimostrare che il sistema nelle variabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) \equiv ax^2 + bx + c$$

ha soluzione per ogni valore dei parametri a, b, c . Ma il sistema è

$$(\alpha + \delta)x^2 + (2\beta + \gamma + \delta)x + \alpha - \beta + 3\gamma - \delta \equiv ax^2 + bx + c$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha + \delta = a \\ 2\beta + \gamma + \delta = b \\ \alpha - \beta + 3\gamma - \delta = c \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e dato che la sottomatrice $A_{(1,2,3);(1,2,3)}$ è non singolare il rango dell'incompleta è massimo, 3, ed esistono $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Quindi $x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$.

(b) Dato che so che $1, x, x^2$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ potrei vedere se $1, x, x^2$ appartengono a

$$\text{Span}(x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1)$$

Ovvero risolvere i tre sistemi

$$\alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) \equiv 1$$

$$\alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) \equiv x$$

$$\alpha(x^2 + 1) + \beta(2x - 1) + \gamma(x + 3) + \delta(x^2 + x - 1) \equiv x^2$$

Ma noto che ciascuno di questi sistemi ha matrice incompleta uguale alla matrice incompleta del sistema risolto al punto precedente, e quindi ciascuno ha ∞^1 soluzioni, $1, x, x^2$ appartengono a $\text{Span}(x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1)$ e $x^2 + 1, 2x - 1, x + 3, x^2 + x - 1$ generano $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$.

2. $\text{Span}(x^2 + 1, 2x - 3) \subset \text{Span}(x^2, x + 1, x - 1)$? Dovrei controllare se $x^2 + 1, 2x - 3$ siano combinazioni lineari di $x^2, x + 1, x - 1$, ovvero se

$$x^2 + 1 \in \text{Span}(x^2, x + 1, x - 1) \quad \text{e} \quad 2x - 3 \in \text{Span}(x^2, x + 1, x - 1)$$

ovvero se i due sistemi

$$x^2 + 1 \equiv \alpha(x^2) + \beta(x + 1) + \gamma(x - 1) \quad \text{e} \quad 2x - 3 \equiv \lambda(x^2) + \mu(x + 1) + \nu(x - 1)$$

abbiano soluzioni Svolgiamo i calcoli

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \beta - \gamma \equiv x^2 + 1 \quad \text{e} \quad \lambda x^2 + (\mu + \nu)x + \mu - \nu \equiv 2x - 3$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 2 \\ \beta - \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

E dato che le due matrici incomplete sono non singolari, entrambi i sistemi hanno soluzione unica e quindi $\text{Span}(x^2 + 1, 2x - 3) \subset \text{Span}(x^2, x + 1, x - 1)$

Proposto: rifare i conti portando i polinomi a vettori mediante una base e usando le matrici

Esercizio 16.26. [GGG56]

1. $(1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 3, 2), (2, 2, 2)$ generano $\mathbb{R}^3$?

- (a) Potrei vedere se ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare di $(1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 3, 2), (2, 2, 2)$.
 (b) Oppure, sapendo già che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ generano $\mathbb{R}^3$, potrei vedere se $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sono combinazioni lineari di $(1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 3, 2), (2, 2, 2)$.
 (c) Ovvero potrei vedere se $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sono linearmente dipendenti da $(1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 3, 2), (2, 2, 2)$.
 Per fare questo mi basta ridurre con Gauss la matrice

```
M:=Mat[[1, 2, 1],
        [2, 1, 1],
        [0, 3, 2],
        [2, 2, 2],
        [1, 0, 0],
        [0, 1, 0],
        [0, 0, 1]];
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1]
      2^a-2*1^a [0, -3, -1]
    0 sotto pivot[0, 3, 2]
      4^a-2*1^a [0, -2, 0]
      5^a-1*1^a [0, -2, -1]
    0 sotto pivot[0, 1, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1]
----- [0, -3, -1]
      3^a+1*2^a [0, 0, 1]
      4^a-2/3*2^a [0, 0, 2/3]
      5^a-2/3*2^a [0, 0, -1/3]
      6^a+1/3*2^a [0, 0, -1/3]
    0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1]
----- [0, -3, -1]
----- [0, 0, 1]
      4^a-2/3*3^a [0, 0, 0]
      5^a+1/3*3^a [0, 0, 0]
      6^a+1/3*3^a [0, 0, 0]
      7^a-1*3^a [0, 0, 0]
```

Noto che non ci sono stati scambi di riga. Il risultato mi dice che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sono combinazioni lineari di $(1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 3, 2)$, ed anche $(2, 2, 2)$ lo è.

2. $(3, 5, 7, 5), (1, 6, 11, 6), (1, 4, 7, 4)$ generano $\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1))$?

$(3, 5, 7, 5), (1, 6, 11, 6), (1, 4, 7, 4)$ sono combinazioni lineari di $\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1))$ dato che

```
M:=Mat[[1, 4, 7, 4],
        [1, 6, 11, 6],
        [3, 5, 7, 5],
        [1, 2, 3, 2],
        [1, 1, 1, 1]];
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 7, 4]
          2^a-1*1^a [0, 2, 4, 2]
          3^a-3*1^a [0, -7, -14, -7]
          4^a-1*1^a [0, -2, -4, -2]
          5^a-1*1^a [0, -3, -6, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 7, 4]
----- [0, 2, 4, 2]
          3^a+7/2*2^a [0, 0, 0, 0]
          4^a+1*2^a [0, 0, 0, 0]
          5^a+3/2*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Quindi $(1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)$ sono combinazioni lineari di $(3, 5, 7, 5), (1, 6, 11, 6), (1, 4, 7, 4)$, anzi di $(3, 5, 7, 5), (1, 6, 11, 6)$ dato che anche la terza riga di M viene ridotta a zero. Quindi

$$\begin{aligned}\text{Span}((1, 2, 3, 2), (1, 1, 1, 1)) &= \text{Span}((3, 5, 7, 5), (1, 6, 11, 6), (1, 4, 7, 4)) \\ &= \text{Span}((3, 5, 7, 5), (1, 6, 11, 6))\end{aligned}$$

Esercizio 16.27. [GGG10] Sia $\mathcal{F} = \{F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\}$

$$\begin{aligned}\circ: \quad \mathcal{F} \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} & \text{dove} \quad F \circ G: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (F, G) &\mapsto F \circ G & a &\mapsto F(G(a)) \\ \therefore \quad \mathbb{K} \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} & \text{dove} \quad \lambda F: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda, F) &\mapsto \lambda F & a &\mapsto \lambda F(a)\end{aligned}$$

Allora $(\mathcal{F}, \circ, \cdot)$ non è un $\mathbb{K}$ -spazio perché non tutte le funzioni ammettono un'inversa rispetto alla composizione, e quindi la composizione non è un'operazione chiusa, e $(\mathcal{F}, \circ)$ non è un gruppo.

Esercizio 16.28. [GGG29] Sia $W = \{F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \mid F \text{ invertibile}\}$

$$\begin{aligned}\circ: \quad W \times W &\rightarrow W & \text{dove} \quad F \circ G: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (F, G) &\mapsto F \circ G & a &\mapsto F(G(a))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{K} \times W &\rightarrow W & \text{dove} & \quad \lambda F: \quad \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda, F) &\mapsto \lambda F & & \quad a \mapsto \lambda F(a) \end{aligned}$$

Allora $(W, \circ, \cdot)$ non è un $\mathbb{K}$ -spazio perché sebbene $(W, \circ)$ sia un gruppo, non è commutativo (la composizione di funzioni non è commutativa per funzioni invertibili). Infatti date le funzioni

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} & G: \quad \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto 3x+1 & e & \quad x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

abbiamo

$$F \circ G \neq G \circ F$$

dato che

$$F \circ G(2) = F(G(2)) = F(4) = 13 \neq G \circ F(2) = G(F(2)) = G(4) = 16$$

ricordiamo che

$$F \circ G \equiv G \circ F \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{K} \quad F \circ G(a) = G \circ F(a) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{K} \quad F(G(a)) = G(F(a)).$$

Esercizio 16.29. [GGG08] Sia $\mathcal{F} = \{F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\}$

$$\begin{aligned} \oplus: \quad \mathcal{F} \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} & \text{dove} & \quad F \oplus G: \quad \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ (F, G) &\mapsto F \oplus G & & \quad a \mapsto F(a) + G(a) \\ \odot: \quad \mathbb{K} \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} & \text{dove} & \quad \lambda \odot F: \quad \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda, F) &\mapsto \lambda \odot F & & \quad a \mapsto \lambda F(a) \end{aligned}$$

$(\mathcal{F}, \oplus, \odot)$ è un $\mathbb{K}$ -spazio?

Dimostrazione. Le verifiche sono semplici, per esempio è immediato che esista il neutro additivo

$$\begin{aligned} 0: \quad \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

e che per ogni $F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ esista opposto, $-F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ □

In generale useremo la notazione $(\mathcal{F}, +, \cdot)$, lasciando spesso indicato il $\cdot$.

Esercizio 16.30. [LL58] Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare una base di

$$V = \text{Span}((1, 2, 3, \alpha), (3, 2, 0, \alpha), (\alpha, 1, 2, 0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$$

Soluzione. Usiamo il metodo della matrice. Potremmo vedere il rango di questa matrice in dipendenza da α direttamente. Qui facciamo invece i calcoli con Gauss.

Ci ricordiamo che i vettori sono scritti nella matrice per riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 3 & 2 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comodità spostiamo la prima colonna in terza posizione, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo con Gauss

```

A:=Mat[[2,3,a,1],
        [2,0,a,3],
        [1,2,0,a]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ritorna la matrice e le colonne dei pivot
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, a, 1]
      2^a-1*1^a [0, -3, 0, 2]
      3^a-1/2*1^a [0, 1/2, -1/2a, a - 1/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, a, 1]
----- [0, -3, 0, 2]
      3^a+1/6*2^a [0, 0, -1/2a, a - 1/6]

```

Per avere l'ultima riga nulla bisognerebbe che, contemporaneamente,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha = 0 \\ \alpha - \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

che è impossibile. La terza riga è quindi sempre non nulla e i tre vettori sono quindi linearmente indipendenti e dato che per costruzione generano V , sono una base di V .

□

Esercizio 16.31. [GGQ50]

- Dato $x, y, z, t, u \in \mathbb{R}$ il vettore $(x+y, x-y, z, t+u)$ è vettore generico di $\mathbb{K}^4$. Volendo trovare un sistema di generatori di $\mathbb{K}^4$ abbiamo

$$(x+y, x-y, z, t+u) = x(1, 1, 0, 0) + y(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) + u(0, 0, 0, 1)$$

ed un sistema di generatori (NON una base) di $\mathbb{K}^4$ è

$$(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)$$

Potrei estrarre dal sistema di generatori una base rimuovendo i vettori dipendenti. Procediamo poer esempio mettendo i vettori in colonna.

```

A:=Mat([[1, 1, 0, 0, 0],
        [1, -1, 0, 0, 0],
        [0, 0, 1, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 1]]);
RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, 0, 0]
      2^a-1*1^a [0, -2, 0, 0, 0]
      0 sotto pivot [0, 0, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```



```

----- [1, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -2, 0, 0, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 1, 0, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -2, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 0]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 1]

```

Ho pivot nella prima, seconda, terza e quarta colonna della ridotta. La prima, seconda, terza e quarta colonna di A sono quindi linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbb{K}^4$.

- Avendo $(1, 2, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 2, 2)$ costruiamo un vettore generico

$$x(1, 2, 0, 0) + y(1, -1, 0, 3) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 3, 0, 1) + u(0, 2, 0, 1) = (x + y, 2x - y + 3t + 2u, z, 3y + t + u)$$

di $\mathbb{K}^4$.

- Un altro vettore generico di $\mathbb{K}^4$, costruito sulla sua base canonica, è, per esempio, (x, y, z, t)

Esempio 16.32. [GGQ70] Dato $W = \text{Span}(x + 3, x^2 - 1, 5) \in \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ un suo vettore (polinomio) generico è

$$a(x + 3) + b(x^2 - 1) + c5 = bx^2 + ax + 3a - b + 5c$$

Esempio 16.33. [GGQ45] Dato $W = \text{Span}((1, 1, 3), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 3))$ un vettore generico di $W \subseteq_{SSP} \mathbb{K}^3$ è

$$x(2, 1, 3) + y(0, 0, 1) + z(1, 1, 1) + t(2, 1, 3) = (2x + z + 2t, x + z + t, 3x + y + z + 3t)$$

con $x, y, z, t \in \mathbb{K}$

Esempio 16.34. [GGQ95] Un vettore generico di $W \subseteq_{SSP} \mathbb{K}^3$ è (x, y, z) con $x, y, z \in \mathbb{K}$

Esercizio 16.35. [GGB20] Completiamo i vettori $\underline{w}_1 = (1, 2, 1, 0, 2)$, $\underline{w}_2 = (1, 2, 3, 2, 1)$, $\underline{w}_3 = (1, 2, 1, 0, 1)$ a base di $\mathbb{R}^5$ con vettori della base canonica E_5 .

Soluzione. Riduciamo a scala la matrice

```

A:=Mat([[1,2,1,0,2],
        [1,2,3,2,1],
        [1,2,1,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 0, 2]
      2^a-1*1^a [0, 0, 2, 2, -1]
      3^a-1*1^a [0, 0, 0, 0, -1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 0, 2]
----- [0, 0, 2, 2, -1]
    0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1]

```

Il risultato è la matrice S . Questo mi dice che A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti e che

$$\text{Span}(A_1, A_2, A_3) = \text{Span}(S_1, S_2, S_3)$$

Scegliamo tra i vettori di E_5 quelli le cui entrate non nulle non coincidono con una colonna con pivot, ovvero e_2, e_4 . Vogliamo provare che i vettori w_1, w_2, w_3, e_2, e_4 sono base di $\mathbb{K}^5$.

I vettori S_1, S_2, S_3, e_2, e_4 sono linearmente indipendenti, dato che se li mettiamo come righe nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

questa è non singolare - basta sviluppare il determinante con Laplace per la quarta e quinta riga per ridursi a calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è banalmente non nullo. Quindi, trattandosi di cinque vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^5$, sono una base di $\mathbb{K}^5$. □

Esercizio 16.36. [GGA99] *Dati*

$$V = \text{Span}((1, 2, 3), (1, 1, 1)) \text{ e } W = \text{Span}((1, 1, 0), (1, 0, 0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

Determinare una base di $V + W$.

Soluzione. Svolgiamo, per esercizio, i conti sia per righe che per colonne.

Per righe

```

• VW:=Mat([[1,2,3],
            [1,1,1],
            [1,1,0],
            [1,0,0]]);
RiduciScalaVerbose(VW);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3]
      2^a-1*1^a [0, -1, -2]
      3^a-1*1^a [0, -1, -3]
      4^a-1*1^a [0, -2, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3]
----- [0, -1, -2]
      3^a-1*2^a [0, 0, -1]
      4^a-2*2^a [0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1

```

Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, 2, 3]
----- [0, -1, -2]
----- [0, 0, -1]
      4a+1*3a [0, 0, 0]
```

Una base di $V + W$ è data da $(1, 2, 3), (0, -1, -2), (0, 0, -1)$, le righe coi pivot della matrice ridotta. Un'altra da $(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 0)$, le corrispondenti righe di della matrice VW .

- Per colonne

```
VW:=Mat([ [1, 1, 1, 1],
           [2, 1, 1, 0],
           [3, 1, 0, 0]]);
RiduciScalaVerbose(VW);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
      2a-2*1a [0, -1, -1, -2]
      3a-3*1a [0, -2, -3, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
----- [0, -1, -1, -2]
      3a-2*2a [0, 0, -1, 1]
```

Una base di $V + W$ è data da $(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 0)$, le colonne della matrice VW corrispondenti alle colonne coi pivot della matrice ridotta, la 1^a, 2^a e 3^a.

□

Vediamo un esempio dove applichiamo le tecniche del teorema di Rouché-Capelli per determinare le soluzioni.

Esercizio 16.37. [FFP39] *Determiniamo le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, ovvero*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo la matrice A in forma normale con Gauss

```
A:=Mat([[1,2,3,4,1,1],
        [1,1,1,3,2,2],
        [0,4,2,1,2,3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 1, 1]
      2a-1*1a [0, -1, -2, -1, 1, 1]
0 sotto pivot[0, 4, 2, 1, 2, 3]
```

```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]==-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4, 1, 1]
----- [0, -1, -2, -1, 1, 1]
      3^a+4*2^a [0, 0, -6, -3, 6, 7]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]==-6
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits
-----
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 2, 3, 4, 1, 1]
      2^a*-1 [0, 1, 2, 1, -1, -1]
      3^a*-1/6 [0, 0, 1, 1/2, -1, -7/6]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-3*3^a [1, 2, 0, 5/2, 4, 9/2]
      2^a-2*3^a [0, 1, 0, 0, 1, 4/3]
----- [0, 0, 1, 1/2, -1, -7/6]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-2*2^a [1, 0, 0, 5/2, 2, 11/6]
----- [0, 1, 0, 0, 1, 4/3]
----- [0, 0, 1, 1/2, -1, -7/6]

```

Anche in questo caso notiamo che non è stato necessario effettuare scambi di colonne. Il sistema associato alla matrice è

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_4 + 2x_5 = \frac{11}{6} \\ x_2 + x_5 = \frac{4}{3} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

ed operando come al solito le sostituzioni

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{2}x_4 - 2x_5 + \frac{11}{6} \\ x_2 &= -x_5 + \frac{4}{3} \\ x_3 &= -\frac{1}{2}x_4 + x_5 - \frac{7}{6} \end{aligned}$$

nel vettore generico $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di $\mathbb{R}^5$ otteniamo il vettore generico delle soluzioni $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$

$$\left(-\frac{5}{2}x_4 - 2x_5 + \frac{11}{6}, -x_5 + \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}x_4 + x_5 - \frac{7}{6}, x_4, x_5\right) = x_4 \left(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + x_5 \left(2, -1, 1, 0, 1\right) + \left(-\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, 0, 0\right)$$

dove $\left(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), (2, -1, 1, 0, 1)$ formano una base di $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ e

$$\left(\frac{11}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0\right) \text{ ovvero } \begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} \\ x_2 = \frac{4}{3} \\ x_3 = -\frac{7}{6} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

è una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$. Vediamo quindi che ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ si può esprimere come una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ più una soluzione generica di $A\underline{x} = \underline{0}$. $\square$

Esercizio 16.38. [HHE12] *Troviamo una base dello spazio*

$$W_1 = \left\{ x(1, 2, 3, 0, 0) + y(1, 3, 2, 2, 2) + z(1, 1, 1, 1, 1) + t(1, 0, 1, 0, 1) \mid S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0} \right\}$$

Svolgimento. La verifica che i quattro vettori sono linearmente indipendenti è lasciata al lettore. Innanzitutto vediamo facilmente che $\dim W_1 = 4 - rk(S) = 2$. La base che cerchiamo avrà quindi due vettori. Se x, y, z, t possono variare in tutto $\mathbb{K}$ otteniamo $W = \text{Span}((1, 2, 3, 0, 0), (1, 3, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 0))$. Se aggiungiamo le condizioni

$$S \cdot \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0}$$

otteniamo W_1 . Risolvendo il sistema $S \cdot \underline{x} = \underline{0}$ abbiamo immediatamente $x = z - t$, $y = -3z + 2t$. Sostituiamo queste condizioni nel vettore generico di W

$$x(1, 2, 3, 0, 0) + y(1, 3, 2, 2, 2) + z(1, 1, 1, 1, 1) + t(1, 0, 1, 0, 1)$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned} & (z - t)(1, 2, 3, 0, 0) + (-3z + 2t)(1, 3, 2, 2, 2) + z(1, 1, 1, 1, 1) + t(1, 0, 1, 0, 1) = \\ & = (-z + 2t, -6z + 4t, -2z + 2t, -5z + 4t, -5z + 5t) \\ & = z(-1, -6, -2, -5, -5) + t(2, 4, 2, 4, 5) \end{aligned}$$

Una base di W_1 è

$$B_1 = (-1, -6, -2, -5, -5), (2, 4, 2, 4, 5)$$

o se preferiamo evitare i negativi

$$B_2 = (1, 6, 2, 5, 5), (2, 4, 2, 4, 5)$$

Se avessimo scritto i vettori nelle coordinate della base

$$B = (1, 2, 3, 0, 0), (1, 3, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1)$$

avremmo sostituito le condizioni $x = z - t$, $y = -3z + 2t$ nel vettore generico di W

$$(x, y, z, t)_B$$

ottenendo

$$(z - t, -3z + 2t, z, t)_B = z(1, -3, 1, 0)_B + t(-1, 2, 0, 1)_B$$

Una base di W_1 scritta in coordinate B è quindi

$$B_1 = (1, -3, 1, 0)_B, (-1, 2, 0, 1)_B$$

□

Esercizio 16.39. [HHH82] *Abbiamo*

$$U = \text{Span}((1, 3, 1, 2), (0, 1, 0, 1)), \quad W = \text{Span}((1, 0, 3, 2), (2, 4, 4, 5), (0, 0, 0, 1))$$

Vediamo che il vettore $(1, 3, 4, 4)$ non si può scrivere come somma di vettori di U, W in modo unico, perché il sistema di equazioni

$$\alpha(1, 3, 1, 2) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(1, 0, 3, 2) + \delta(2, 4, 4, 5) + \eta(0, 0, 0, 1) = (1, 3, 4, 4)$$

non ha una unica soluzione, dato che se consideriamo la matrice incompleta del sistema associato (vettori per colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

questa ha rango massimo 4, dato che si vede facilmente che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi esistono $\infty^{5-4} = \infty^1$ soluzioni.

Esercizio 16.40. [HHH77] *Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio $W_1, \dots, W_n \subseteq_{SSP} V$. Allora non necessariamente*

$$\forall i, j \quad W_i \cap W_j = \{\underline{0}\}$$

implica che la somma di $W_1, \dots, W_n$ sia diretta.

Infatti, siano W_1, W_2, W_3 tre rette distinte di $\mathbb{R}^2$, passanti per l'origine. Allora

- $\forall i, j \quad W_i \cap W_j = \{\underline{0}\}$
- $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 2$ Dato che la loro somma è tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = 1 + 1 + 1 = 3$

Esercizio 16.41. [HHH63] *Dire se*

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}(z_1) = 0 \text{ e } \text{Im}(z_2) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

è un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ spazio e darne la dimensione se possibile.

Dimostrazione.

- Come $\mathbb{C}$ -spazio: vediamo che W non è un $\mathbb{C}$ -sottospazio di $\mathbb{C}^3$, dato che

$$(i, 0, 0) \in W \text{ ma } i \cdot (i, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin W$$

- Come $\mathbb{R}$ -spazio: imponendo ad un vettore

$$(a + bi, c + id, e + if)$$

le condizioni $\operatorname{Re}(z_1) = 0$ e $\operatorname{Im}(z_2) = 0$ di appartenenza a W otteniamo un vettore generico di W

$$(bi, c, e + if)$$

Vediamo che la combinazione lineare di vettori di questo tipo è ancora di questo tipo (ovvero, che la combinazione lineare su $\mathbb{R}$ di due vettori di W appartiene a W). Infatti, con $x, y \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$x(bi, c, e + if) + y(b_1i, c_1, e_1 + if_1) = (xbi + yb_1i, xc + yc_1, xe + ye_1 + xfi + yf_1i) = (Bi, C, E + IF)$$

con

$$B = xb + yb_1 \in \mathbb{R}, \quad C = xc + yc_1 \in \mathbb{R}, \quad E = xe + ye_1 \in \mathbb{R}, \quad F = xf + yf_1 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo adesso una base di W . Una naturale candidata è $(i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, i), (0, 0, 1)$. Vediamo che questi vettori generano W come $\mathbb{R}$ -spazio e che sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

- Generazione: un vettore generico di W è

$$(a, b, c + id) = a(i, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + d(0, 0, i) \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Chiaramente $(i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, i), (0, 0, 1)$ generano W come $\mathbb{R}$ -spazio.

- Lineare indipendenza: il sistema di equazioni (variabili $x, y, z, t \in \mathbb{R}$)

$$x(i, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, i) + t(0, 0, 1) = \underline{0} \Leftrightarrow (xi, y, iz + t) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} xi = 0 \\ y = 0 \\ t + iz = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla $x = y = z = t = 0$ per il principio di identità dei complessi in forma cartesiana.

I nostri vettori sono quindi base di W come $\mathbb{R}$ -spazio

perché ho scelto proprio questi quattro vettori

$$(i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, i), (0, 0, 1)$$

per vedere se formavano una base? perché un vettore generico di W è dato da un vettore generico di $\mathbb{C}^3$, $(a + bi, c + id, e + if)$ con le condizioni $a = d = 0$, quindi

$$(bi, c, e + if) = b(i, 0, 0) + c(0, 1, 0) + e(0, 0, i) + f(0, 0, 1)$$

□

16.1 Quarta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

[Auto4A] [Tempo stimato 45m] Tutti gli esercizi valgono 1 punto per la risposta esatta, secca, senza giustificazioni, 0 altrimenti, tranne l'ultimo esercizio, che vale 3 punti.

1. Dare una descrizione cartesiana dello spazio vettoriale $V = \text{Span}((1, 1, 1, 1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

Soluzione. $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x = y, x = z, x = t\}$

□

2. Dare una base dell' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Soluzione. $B = (1, 0), (i, 0), (0, 1)$

□

3. Determinare una base dell' $\mathbb{R}$ -spazio

$$V = \text{Span}(x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6, 3x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6, x^5 + x^6, 5x^5 + 2x^6, x^5 - x^6)$$

Soluzione. I primi quattro polinomi, oppure x^3, x^4, x^5, x^6 o altre.

□

4. Determinare la dimensione del $\mathbb{C}$ -spazio

$$V = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) \underset{SSP}{\subseteq} \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

Soluzione. 3

□

5. Dati i sottospazi di $\mathbb{Q}^4$

$$V = \text{Span}((1, 2, 1, 0), (3, 2, 1, 0)), \quad W = \text{Span}((1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 0))$$

La loro somma è diretta?

Soluzione. No.

□

6. Con la notazione $\underline{v} \perp \underline{u} \Leftrightarrow \underline{v} \cdot \underline{u} = 0$, determinare la dimensione di

$$V = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{v} \perp (1, 2, 1), \underline{v} \perp (5, 2, 3), \underline{v} \perp (3, 2, 2)\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

Soluzione. $\dim V = 1$.

□

7. Determinare una base del sottospazio vettoriale $V = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\}$

Soluzione. $B = \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5$.

□

8. Determinare la dimensione come $\mathbb{R}$ -spazio di

$$V = \text{Span}((i, 1), (i + 3, 3), (i, 3)) \subset \mathbb{C}^2$$

Soluzione. 3

□

9. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $W = \{(a+b, 2a+b-2c, a+b, a+2b+2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Soluzione. 2

□

10. Determinare due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{C}^2$ tali che $A = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^2 \mid \underline{v} \cdot \underline{v} = 0\} = V_1 \cup V_2$

Soluzione. $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x+iy = 0\}$, $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x-iy = 0\}$ oppure $V_1 = \text{Span}(i, 1)$, $V_2 = \text{Span}(1, i)$

□

16.2 Quarta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi

[Auto4B]

[Tempo stimato 2h30m]

Esercizio 16.42 (6pt). [KKL13] *Dati i vettori in $\mathbb{R}^5$*

$$(1, 1, 4, 7, 0), (1, 1, 4, 7, 8), (1, 1, 3, 5, 3), (1, 1, 2, 3, 4)$$

determinare una base di $\mathbb{R}^5$ che ne contenga il massimo numero possibile.

Soluzione. Usiamo il teorema del completamento. Mettiamo i vettori come righe di una matrice, e riduciamola con Gauss. I pivot della matrice ci forniranno tutte le informazioni necessarie.

```

M:=Mat([[1, 1, 4, 7, 0],
        [1, 1, 4, 7, 8],
        [1, 1, 3, 5, 3],
        [1, 1, 2, 3, 4]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 4, 7, 0]
      2^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 0, 8]
      3^a-(1)*1^a [0, 0, -1, -2, 3]
      4^a-(1)*1^a [0, 0, -2, -4, 4]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 4, 7, 0],
     [0, 0, -1, -2, 3],
     [0, 0, 0, 0, 8],
     [0, 0, -2, -4, 4]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 4, 7, 0]
----- [0, 0, -1, -2, 3]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, 8]
      4^a-(2)*2^a [0, 0, 0, 0, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=8
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 4, 7, 0]
----- [0, 0, -1, -2, 3]
----- [0, 0, 0, 0, 8]
      4^a-(-1/4)*3^a [0, 0, 0, 0, 0]

```

Quindi, la quarta riga è combinazione lineare delle prime tre, e non può fare parte di una base che le contenga. Vediamo una base che contenga i primi tre vettori. I pivot sono in posizione 1, 3, 5, e quindi la base che contiene i primi tre vettori è $B = (1, 1, 4, 7, 0), (1, 1, 4, 7, 8), (1, 1, 3, 5, 3), e_2, e_4$. $\square$

Esercizio 16.43 (6pt). [KL13a] *Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$*

$$M = \text{Span}(x^3 - 1, 2x^2 + x, x^2 + x + 1)$$

$$N = \text{Span}(2x^3 - 6x^2 - 3x - 2, 3x^3 - 4x^2 - 2x - 3, x^3 + 3x^2 + 2x)$$

Determinare

- $\dim(M)$, $\dim(N)$.
- $\dim(M \cap N)$.
- Una base di $M \cap N$.

Soluzione: scriviamo i polinomi mediante le loro coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Con un piccolo abuso di notazione, denotiamo M e N come

$$M = \text{Span}(\underline{u}_1 = (1, 0, 0, -1), \underline{u}_2 = (0, 2, 1, 0), \underline{u}_3 = (0, 1, 1, 1))$$

$$N = \text{Span}(\underline{v}_1 = (2, -6, -3, -2), \underline{v}_2 = (3, -4, -2, -3), \underline{v}_3 = (1, 3, 2, 0))$$

- Calcoliamo $\dim(N)$, poi dedurremo $\dim(M)$ facendo i conti per il calcolo di una base di $M \cap N$. Costruiamo una matrice le cui colonne sono i generatori di N riduciamola e vediamo il rango (ricordiamo che il numero di righe e di colonne linearmente indipendenti è uguale, e quindi la dimensione di N si può calcolare indifferentemente dal rango della matrice che ha per righe o per colonne i generatori di N).

```
N:=Mat[[ 2, 3, 1],
        [-6,-4, 3],
        [-3,-2, 2],
        [-2,-3, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(N);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1]
      2^a+3*1^a [0, 5, 6]
      3^a+3/2*1^a [0, 5/2, 7/2]
      4^a+1*1^a [0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1]
----- [0, 5, 6]
      3^a-1/2*2^a [0, 0, 1/2]
      0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1]
----- [0, 5, 6]
----- [0, 0, 1/2]
      4^a-2*3^a [0, 0, 0]
```

dato che ci sono tre pivot, i tre generatori iniziali di N (e anche quelli dati dalle colonne della matrice finale) sono linearmente indipendenti e $\dim(N) = 3$.

- Per calcolare $\dim(M)$ e $\dim(N + M)$, da cui calcoleremo $\dim(M \cap N)$, costruiamo la matrice le cui colonne sono i generatori di M e quelli di N e riduciamola con Gauss

```
MN:=Mat[[ 1, 0, 0, 2, 3, 1],
          [ 0, 2, 1, -6, -4, 3],
          [ 0, 1, 1, -3, -2, 2],
          [-1, 0, 1, -2, -3, 0]];
```

```

L:=RiduciScalaVerbose(MN);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
      0 sotto pivot[0, 2, 1, -6, -4, 3]
      0 sotto pivot[0, 1, 1, -3, -2, 2]
      4^a+1*1^a [0, 0, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
----- [0, 2, 1, -6, -4, 3]
      3^a-1/2*2^a [0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
----- [0, 2, 1, -6, -4, 3]
----- [0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]
      4^a-2*3^a [0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

Dato che ci sono tre pivot, $\dim(M + N) = 3$. Dato che nelle prime tre colonne, quelle relative a M , ci sono tre pivot, le tre colonne sono linearmente indipendenti e quindi $\dim(M) = 3$. quindi, per la formula di Grassman

$$\dim(M \cap N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M + N) = 3 + 3 - 3 = 3$$

quindi $\dim(M \cap N) = 3$.

- Dato che $M \supseteq M \cap N$ e $\dim(M) = \dim(M \cap N) = 3$, abbiamo che $M = M \cap N$, e quindi ogni base di M , per esempio

$$(x^3 - 1, 2x^2 + x, x^2 + x + 1)$$

che è base perché genera M ed ha tanti elementi quanto la dimensione di M è uguale alla dimensione di $M \cap N$.

□

Esercizio 16.44 (9pt). [KKI88] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 3), (4, 8, 4, 6))$$

e

$$W = \text{Span}((1, 1, 2, a), (1, a, 1, a))$$

determinare basi di V , W , $V + W$, $V \cap W$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Dire se $\underline{v} = (3, 6, 5, 2) \in V + W$.

Soluzione. Procediamo col metodo standard. Troviamo una base di W

Verifichiamo, al variare di a , l'indipendenza lineare dei generatori di W . La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

ha rango due, visto che la sottomatrice $A_{(1,2);(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare. I due generatori di W sono quindi indipendenti e formano una sua base, e la sua dimensione due, per ogni a .

Riduciamo con Gauss la matrice le cui colonne sono i generatori di V, W .

```

Use R:=Q[a];
M:=Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
        [2, 2, 2, 8, 1, a],
        [1, 1, 1, 4, 2, 1],
        [1, 2, 3, 6, a, a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
      2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
      3^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 0, 1, 0]
      4^a-(1)*1^a [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
Scambio la 2^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
     [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1],
     [0, 0, 0, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
----- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, 1, 0]
      0 sotto pivot [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
----- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0]
      4^a-(-1)*3^a [0, 0, 0, 0, 0, a - 2]

```

Per ogni a ci sono solo 2 pivot nelle prime quattro colonne, quelle associate a V , e quindi $\dim V = 2$. Una base di V si ha dai vettori associati alle colonne che contengono i pivot, quindi una base di V è $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$. Esaminiamo i casi $a \neq 2$, $a = 2$

- $a \neq 2$. Ci sono 4 pivot, $\dim V + W = 4$ e una base di $V + W = \mathbb{R}^4$ è per esempio E_4 .
Dalla formula di Grassmann, abbiamo $\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 4 = 0$.
Quindi $\dim V \cap W = 0$ e non ho base dell'intersezione. Il vettore $\underline{v}$, come ogni altro vettore di $\mathbb{R}^4$ appartiene a $V + W = \mathbb{R}^4$.
- $a = 2$. Ci sono 3 pivot, quindi $\dim V + W = 3$ e una base di $V + W$ è

$$(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, a) \xrightarrow{a=2} (1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)$$

Dalla formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 3 = 1$$

La relazione tra i coefficienti del vettore generico di W

$$\alpha(1, 1, 2, a) + \beta(1, a, 1, a) \xrightarrow{a=2} \alpha(1, 1, 2, 2) + \beta(1, 2, 1, 2)$$

è data dalle ultime due entrate dell'ultima riga non nulla della matrice (la terza) $(1, 0)$ moltiplicate per (α, β) ed uguagliate a zero

$$(1, 0) \cdot (\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Quindi un vettore generico dell'intersezione è $\beta(1, 2, 1, 2)$ ed una base per esempio $(1, 2, 1, 2)$.

Per vedere se

$$(3, 6, 5, 2) = \underline{v} \in V + W = \text{Span}((1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2))$$

vediamo se in una riduzione di Gauss si annulla la quarta riga della matrice

```
M:=Mat([[1,2,1,1],
        [1,2,1,2],
        [1,1,2,2],
        [3,6,5,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 1]
      2^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 1]
      3^a-(1)*1^a [0, -1, 1, 1]
      4^a-(3)*1^a [0, 0, 2, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 0, 2, -1]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 1]
----- [0, -1, 1, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, 2, -1]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 2, -1],
     [0, 0, 0, 1]])
```

La quarta riga non si riduce a zero e quindi $\underline{v} \notin V + W$.

Riassumendo, abbiamo che per ogni a si ha che $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$ è base di V e $(1, 1, 2, a), (1, a, 1, a)$ è base di W .

- se $a \neq 2$ abbiamo che E_4 è base di $V + W = \mathbb{R}^4$, $V \cap W = \{0\}$ e quindi non ha base ed il vettore $((3, 6, 5, 2) \in V + W$.
- Se $a = 2$ abbiamo che $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)$ è base di $V + W$, $(1, 2, 1, 2)$ è base di $V \cap W$ ed il vettore $((3, 6, 5, 2) \notin V + W$.

□

16.3 Esercizi proposti

Esercizio 16.45. [IID66] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^6$*

$$M = \text{Span}((1, 3, 0, 2, 2, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 1), (3, 5, 2, 2, 4, 3))$$

$$N = \text{Span}((0, 2, -1, 2, 1, 0), (-1, 3, -3, 4, 1, -1), (-1, 7, -5, 8, 3, -1))$$

Dire se $M \subseteq N$, $N \subseteq M$, $M = N$.

Soluzione: Si, Si, Si

□

Esercizio 16.46. [MK11] *Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$*

$$U = \text{Span}(x^2 + 1, 3x - 2) \text{ e } W = \text{Span}(x^2 + 3x - 1, x^2 - 3x + 1)$$

Dire se la loro somma è diretta.

Soluzione: No

□

Esercizio 16.47. [HHH99] *Dati i sottospazi generati rispettivamente dalle righe delle matrici A, B , determinare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U + W$ ed una base di $U \cap W$ nei seguenti casi*

1. $A := \text{Mat}([[1, 2, 1, 3, 5], [2, 4, 3, 1, 0], [0, 2, 2, 2, 2]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 1, 1, 1, 0], [3, 8, 6, 6, 7], [-1, 2, 2, 6, 9]])$;

Soluzione: $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim U + W = 4$, $\dim U \cap W = 2$

2. $A := \text{Mat}([[0, 4, 1, 0, 5], [2, 2, 3, 0, 0], [0, 2, 1, 0, 1]])$;
 $B := \text{Mat}([[3, 2, 5, 1, 0], [1, 0, 2, 1, 0], [-1, 2, 2, 6, 9]])$;

Soluzione: $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim U + W = 5$, $\dim U \cap W = 1$

3. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5], [1, 0, 0, 1, 0], [0, 2, 1, 0, -1]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 10], [2, -6, -2, 2, 8], [1, 2, 1, 0, 0]])$;

Soluzione: $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim U + W = 4$, $\dim U \cap W = 2$

4. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5, 0], [1, 0, 0, 1, 0, 0], [-2, 0, 3, -2, 15, 0]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 10, 0], [3, 2, 5, 2, 20, 0], [1, 2, 1, 0, 0, 0]])$;

Soluzione: $\dim U = 2$, $\dim W = 2$, $\dim U + W = 2$, $\dim U \cap W = 1$

5. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5, 0],$
 $[1, 0, 1, 1, 0, 0],$
 $[-2, 0, 3, -2, 15, 0]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 10, 0],$
 $[3, 0, 5, 0, 20, 0],$
 $[1, 0, 1, 0, 0, 0]])$;

Soluzione: $\dim U = 3, \dim W = 3, \dim U + W = 4, \dim U \cap W = 2$

6. $A := \text{Mat}([[0, 0, 1, 0, 5, 0],$
 $[1, 0, 1, 1, 0, 0],$
 $[2, 0, 0, -2, 15, 0]])$;
 $B := \text{Mat}([[1, 0, 2, 1, 5, 0],$
 $[3, 0, 2, -1, 20, 0],$
 $[5, 0, 2, -3, 35, 0]])$;

Soluzione: $\dim U = 3, \dim W = 2, \dim U + W = 3, \dim U \cap W = 2$

Esercizio 16.48. [HHZ98] *Ripetere l'esercizio precedente prendendo gli spazi generati dalle colonne delle matrici*

Esercizio 16.49. [IID00] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^6$*

$$M = \text{Span}((1, 0, 1, 2, 2, 0), (2, 0, 1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 0, 4, 2))$$

$$N = \text{Span}((0, 2, 1, 3, 2, 3), (1, 0, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 4, 1))$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 16.50. [IID01] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$*

$$M = \text{Span}((1, 2, 1), (2, 3, 1), (-4, -5, -1))$$

$$N = \text{Span}((5, 2, 1), (1, 3, 1), (7, -5, -1))$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 16.51. [IID03] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$M = \text{Span}((1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 1))$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - t = 0\}$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 16.52. [IID04] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = y + z + t = 0\}$$

$$N = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}$$

Determinare dimensioni e basi per $M, N, M + N, M \cap N$.

Esercizio 16.53. [IID77] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((3, 0, 2, 0), (1, 3, 3, -1), (7, -6, 0, 2))$$

$$W = \text{Span}((-2x + 8, 3x - 3, x + 3, -x + 1), (0, x, x, 1))$$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ determinare dimensioni e basi per $V, W, V + W, V \cap W$.

Esercizio 16.54. [LL93] *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^5$*

$$U = \text{Span}(\underline{u}_1 = (1, 2, 1, 0, 3), \underline{u}_2 = (0, -2, 0, 1, -3), \underline{u}_3 = (2, 10, 2, -3, 15))$$

$$W = \text{Span}(\underline{w}_1 = (2, 1, 0, 1, 0), \underline{w}_2 = (3, 5, 1, 0, 6), \underline{w}_3 = (5, 6, 1, 1, 1), \underline{w}_4 = (0, 9, 2, -4, 14))$$

determinare una base di $U \cap W$.

Soluzione. La dimensione di $U \cap W$ è 3. □

Esercizio 16.55. [HHH34] *Sia $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$*

$$W_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = f(i)\} \text{ e } W_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(i) = f(3)\}$$

Determinare $W_1 \cap W_2$.

Esercizio 16.56. [HHQ98] *Dati i sottospazi U, W generati rispettivamente dalle righe delle matrici A, B , determinare $\dim U, \dim W, \dim U + W$ ed una base di $U \cap W$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$*

Use $R := \mathbb{Q}[a]$;

```
A:=Mat([ [0, 0, 1, 0, 5, 0],
           [1, 0, 1, 1, 0, 0],
           [2, 0, 0, -2, 15, 0] ]);
B:=Mat([ [1, 0, 2, 1, 5, 0],
           [3, 0, 2, -1, 20, 0],
           [5, 0, 2, -3a, 35a, 0] ]);
```

Sol: In ogni caso, $\dim U = 3$

- Se $a \neq 1$: $\dim W = 3, \dim U + W = 4, \dim U \cap W = 2$ ed una base di $U \cap W$ è $(1, 0, 2, 1, 5, 0), (3, 0, 2, -1, 20, 0)$.
- Se $a = 1$: $\dim W = 2, U = W, \dim U + W = 3, \dim U \cap W = 2$ e una base di $U \cap W$ è data dai generatori di W .

Esercizio 16.57. [HHH67] *Sia $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$*

$$W_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = f(i) = 0\} \text{ e } W_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(2) = f(i) = 0\}$$

Determinare

$$W_1 \cap W_2$$

Osservazione 16.58. [HHH40] *Notiamo che se $W_1, W_2, W_3 \subseteq V$ $\mathbb{K}$ -spazio, in genere non è vero che*

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 + \\ &\quad - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \\ &\quad + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \end{aligned}$$

[Proposto]: trovare un esempio non banale dove quanto sopra è vero ed un esempio dove quanto sopra è falso.

Parte V

Morfismi di spazi vettoriali

Capitolo 17

Diciassettesima lezione - Morfismi

17.1 Definizione ed esempi di morfismo

Definizione 17.1. [III01] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi e $F: V \rightarrow W$ una funzione. Se

- $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ abbiamo che $F(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2)$ (additività, chiusura sulla somma)
- $\forall \underline{v} \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo che $F(\lambda \underline{v}) = \lambda F(\underline{v})$ (omogeneità, chiusura sul prodotto esterno)

diciamo che la funzione $F: V \rightarrow W$ è lineare o morfismo (o morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi o applicazione $\mathbb{K}$ -lineare se vogliamo specificare gli scalari).

Possiamo, come per gli spazi vettoriali, riformulare le condizioni sulla somma ed il prodotto esterno mediante il concetto di combinazione lineare.

Proposizione 17.2. [III02] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi e $F: V \rightarrow W$ una funzione. La funzione F è lineare se e solo se

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \text{ abbiamo che } F(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) = \lambda_1 F(\underline{v}_1) + \lambda_2 F(\underline{v}_2)$$

Dimostrazione. Ovvio. □

Corollario 17.3. [III21] Data una funzione lineare $F: V \rightarrow W$

1. $F(\underline{0}) = \underline{0}$.
2. $\forall v \in V \quad F(-v) = -F(v)$

Dimostrazione. Immediata, lasciata per esercizio. □

Esercizio 17.4. [III13] Dati V $\mathbb{K}$ -spazio e $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V ,

1. La funzione coordinate

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}}: \quad V &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \underline{v} &\mapsto \underline{\alpha} \end{aligned}$$

dove $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{\alpha} \cdot \underline{v}$ è ben definita e lineare.

2. La funzione

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow V \\ \underline{\alpha} &\mapsto \underline{\alpha} \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad \text{con } \underline{\alpha} \cdot \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

è lineare ed è l'inversa di $F_{\mathcal{B}}$, che è quindi bigettiva.

Dimostrazione. Discende immediatamente dalle proprietà di unicità di rappresentazione delle basi □

Esempio 17.5. [III22] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x^2, x + y, x) \end{aligned}$$

non è lineare, dato che

$$F(2(1, 1)) = F((2, 2)) = (4, 4, 2) \neq (2, 4, 2) = 2(1, 2, 1) = 2F((1, 1))$$

Esempio 17.6. [III09] *La funzione nulla*

$$\begin{aligned} F: \quad V &\rightarrow W \\ \underline{v} &\mapsto \underline{0} \end{aligned}$$

è lineare.

Esempio 17.7. [III10] *La funzione identità*

$$\begin{aligned} F: \quad V &\rightarrow V \\ \underline{v} &\mapsto \underline{v} \end{aligned}$$

è lineare.

Esempio 17.8. [III04] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx \end{aligned}$$

è lineare, dato che

$$F(ax + by) = m(ax + by) = amx + bmy = aF(x) + bF(y)$$

Esempio 17.9. [IIZ04] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx + 3 \end{aligned}$$

non è lineare, dato che $F((0) = (3) \neq 0$.

Esempio 17.10. [III03] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

è lineare.

Dimostrazione. Usiamo la definizione.

$$\begin{aligned} F(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2) \\ &= \alpha(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + \beta(y_1 + y_2, y_1 - y_2) \\ &= \alpha F((x_1, y_1)) + \beta F((x_2, y_2)) \end{aligned}$$

□

17.2 Nucleo e immagine

Definizione-Proposizione 17.11. [III19] Dato un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow W$

1. L'insieme $\ker T = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \underline{0}\}$ è detto nucleo di T ed è un sottospazio di V .
2. L'insieme $\operatorname{Im} T = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\}$ è detto immagine di T ed è un sottospazio di W . Definiamo $\operatorname{rk} T = \dim \operatorname{Im} T$.

Dimostrazione.

1. Dobbiamo verificare la chiusura per somma e prodotto esterno. Verifichiamo la prima lasciando la seconda per esercizio.

Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F$, dobbiamo dimostrare che $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\underline{w}_1 \in \operatorname{Im} F &\Leftrightarrow \exists \underline{v}_1 \in V \text{ t.c. } F(\underline{v}_1) = \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F &\Leftrightarrow \exists \underline{v}_2 \in V \text{ t.c. } F(\underline{v}_2) = \underline{w}_2\end{aligned}$$

e quindi

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2) = F(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \operatorname{Im} F$$

2. Dobbiamo verificare che se $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ allora

$$\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2 \in \ker F \Leftrightarrow F(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2) = \underline{0}$$

Infatti

$$F(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2) = \lambda F(\underline{v}_1) + \mu F(\underline{v}_2) = \lambda \underline{0} + \mu \underline{0} = \underline{0}$$

dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker F \Leftrightarrow F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2) = \underline{0}$.

□

Richiamo 17.12. [IIZ70] Ricordiamo che una funzione $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se e solo se

$$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Proposizione 17.13. [III53] Sia $F: V \rightarrow W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi. Allora F è iniettivo se e solo se $\ker F = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione.

1. Dimostriamo che se $\ker F = \{\underline{0}\}$ allora F è iniettivo.

Dobbiamo dimostrare che $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \quad F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2) \Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2$

Abbiamo

$$\begin{aligned}F(\underline{v}_1) = F(\underline{v}_2) &\Leftrightarrow F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \ker F \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \{\underline{0}\} \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2\end{aligned}$$

2. Dimostriamo che se F è iniettiva allora $\ker F = \{\underline{0}\}$.

Ci basta dimostrare che $\underline{v} \in \ker F \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Infatti

$$\underline{v} \in \ker F \Leftrightarrow F(\underline{v}) = \underline{0} = F(\underline{0}) \Rightarrow F(\underline{v}) = F(\underline{0}) \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

dove l'ultima equivalenza è data dall'injectività di F .

□

Un morfismo F conserva le relazioni lineari tra gli elementi del dominio, e non ne aggiunge se è iniettivo.

Proposizione 17.14. [III90] *Dato $F: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in V$. Allora*

1. *Se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_p \underline{v}_p = \underline{0}_V$ allora $\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_p F(\underline{v}_p) = \underline{0}_W$. (Conservazione delle dipendenze lineari)*
2. [III902] *Se F è iniettiva e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ sono linearmente indipendenti, lo sono anche $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$. Ovvero, un morfismo iniettivo conserva le indipendenze lineari.*
3. *Se $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ sono linearmente indipendenti lo sono anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$.*

Dimostrazione.

1. Immediata dalla linearità di F .
2. Dimostriamo che $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ sono linearmente indipendenti con la definizione.

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i F(\underline{v}_i) = \underline{0}_W \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}_{\mathbb{K}^p}$$

Abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^p \alpha_i F(\underline{v}_i) = \underline{0}_W & & \\ \Downarrow & \text{linearità di } F & \\ F\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{v}_i\right) = F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W & & \\ \Downarrow & \text{iniettività di } F & \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}_V & & \\ \Downarrow & \text{lineare indipendenza dei } \underline{v}_i & \\ \underline{\alpha} = \underline{0}_{\mathbb{K}^p} & & \end{array}$$

3. Immediato dal punto 2. Ricordiamo che per due affermazioni logiche P, Q da $P \Rightarrow Q$ deduciamo non $Q \Rightarrow$ non P . Quindi se F è iniettiva da

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \text{ linearmente dipendenti implica } F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p) \text{ linearmente dipendenti}$$

abbiamo

$$F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p) \text{ linearmente indipendenti implica } \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \text{ linearmente indipendenti}$$

□

In genere scriveremo $\underline{0}$ senza specificare lo spazio come ad esempio $\underline{0}_V$, $\underline{0}_W$, $\underline{0}_{\mathbb{K}^p}$...

Osservazione 17.15. [IIA90] Dato $F: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p \in V$, possiamo avere $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ linearmente indipendenti ma $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_p)$ dipendenti. Basta prendere per esempio $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ linearmente indipendenti e $V = \text{Span}(\underline{v})$

$$F \equiv \underline{0}: \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & W \\ \underline{v}_i & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

Proposizione 17.16. [III92] Dato $F: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V . Allora

$$F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_n) \text{ generano } \text{Im } F$$

Se F è iniettiva, $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_n)$ sono base di $\text{Im } F$.

Dimostrazione. Un vettore $\underline{w} \in \text{Im } F$ è, per definizione, l'immagine di un vettore $\underline{v} \in V$. Dato che B è base, esistono $\underline{\alpha}$ tali che $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$. Ma allora

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(\underline{v}_i)$$

che è la tesi.

Il secondo punto segue dal primo e dalla Proposizione 17.14 (vettori immagine di indipendenti secondo un morfismo iniettivo sono indipendenti). $\square$

Osservazione 17.17. [III85] In generale l'immagine secondo F di una base di V non è base di $\text{Im } F$

Esempio 17.18. [III86] Sia data la funzione

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 2x + 4y) \end{array}$$

ed abbiamo $F(\underline{e}_1) = (1, 2)$ e $F(\underline{e}_2) = (2, 4)$, ma i due vettori $(1, 2), (2, 4)$ non formano una base di $\text{Im } F = \text{Span}((1, 2))$, che ha dimensione 1, mentre ciascuno di loro è base $\text{Im } F = \text{Span}((1, 2))$.

17.3 Isomorfismi

Osservazione 17.19. [JJJ00] Dati V, W $\mathbb{K}$ -spazi, è immediato verificare che l'insieme

$$\text{hom}(V, W) = \{T: V \rightarrow W \mid T \text{ morfismo di } \mathbb{K}\text{-spazi}\} \subseteq_{SSP} \{f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}\}$$

Proposizione 17.20. [JJJ40] Dati $f: V \rightarrow W$, $g: W \rightarrow U$ morfismi di $\mathbb{K}$ -spazi, la funzione $g \circ f: V \rightarrow U$ è un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi.

Dimostrazione. Abbiamo $f \in \text{hom}(V, W)$, $g \in \text{hom}(W, U)$ e vogliamo che $f \circ g \in \text{hom}(V, U)$. Verifichiamolo con la definizione di morfismo (testiamo la chiusura sulla combinazione lineare):

$$\begin{aligned} f \circ g(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2) &= f(g(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2)) \\ &= f(\lambda g(\underline{v}_1) + \mu g(\underline{v}_2)) \\ &= \lambda f(g(\underline{v}_1)) + \mu f(g(\underline{v}_2)) \\ &= \lambda f \circ g(\underline{v}_1) + \mu f \circ g(\underline{v}_2) \end{aligned}$$

$\square$

Esempio 17.21. [JJJ12] Abbiamo i due morfismi di $\mathbb{R}$ -spazio

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, x + y) \end{array} \quad e \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x, 0) \end{array}$$

è facile verificare che

$$f \circ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f(g((x, y))) = f((2x, 0)) = (2x, 2x) \end{array}$$

è un morfismo di $\mathbb{R}$ -spazio.

Definizione 17.22. [JJJ04] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi. Se esiste un morfismo bigettivo (invertibile) $T: V \rightarrow W$ diciamo che T è un isomorfismo, che V, W sono isomorfi e scriviamo $V \simeq W$.

Richiamo 17.23. [JJJ15] Ricordiamo che una funzione $g: B \rightarrow A$ è l'inversa di una funzione $f: A \rightarrow B$ se e solo se

$$f \circ g \equiv \text{id}_A \quad e \quad g \circ f \equiv \text{id}_B$$

Proposizione 17.24 (Inverso di un morfismo è morfismo). [III15] Sia $F: V \rightarrow W$ una funzione invertibile, morfismo di $\mathbb{K}$ spazi. Allora $F^{-1}: W \rightarrow V$ è un morfismo.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad F^{-1}(\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2) = \lambda F^{-1}(\underline{w}_1) + \mu F^{-1}(\underline{w}_2)$$

Dato che F è invertibile, è surgettiva. Quindi esistono $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ tali che

$$\begin{aligned} F(\underline{v}_1) = \underline{w}_1 & \Leftrightarrow \underline{v}_1 = F^{-1}(\underline{w}_1) \\ F(\underline{v}_2) = \underline{w}_2 & \Leftrightarrow \underline{v}_2 = F^{-1}(\underline{w}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{-1}(\lambda \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2) &= F^{-1}(\lambda F(\underline{v}_1) + \mu F(\underline{v}_2)) \\ &= F^{-1}(F(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2)) \quad F \text{ lineare} \\ &= \lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{v}_2 \quad F \text{ inversa di } F^{-1} \\ &= \lambda F^{-1}(\underline{w}_1) + \mu F^{-1}(\underline{w}_2) \end{aligned}$$

□

Definizione 17.25. [JJJ03] Un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow V$ si dice endomorfismo.

Osservazione 17.26. [JJJ25] La relazione $\simeq$ ha tutte le proprietà della relazione di uguaglianza:

1. (riflessiva): $V \simeq V$: basta prendere id_V come isomorfismo.
2. (simmetrica): $V \simeq W \Leftrightarrow W \simeq V$: Se $V \simeq W$ esiste un isomorfismo $f: V \rightarrow W$, che è invertibile con inversa lineare $f^{-1}: W \rightarrow V$. Dato che anche f^{-1} è isomorfismo, $W \simeq V$. Il viceversa si dimostra in modo analogo.
3. (transitiva): Se $V \simeq W$ e $W \simeq U$ allora $V \simeq U$. Dato che $V \simeq W$, $W \simeq U$ esistono isomorfismi $f: V \rightarrow W$, $g: W \rightarrow U$. Dato che la composizione di morfismi è morfismo e la composizione di bigettive è bigettiva, la funzione $f \circ g: V \rightarrow U$ è isomorfismo, e quindi $V \simeq U$.

Osservazione 17.27. [JJJ11] *Due spazi isomorfi sono sostanzialmente lo stesso spazio, a meno dei nomi che diamo agli oggetti, dato che c'è una corrispondenza biunivoca che trasporta le operazioni sia da V a W che viceversa. Tutte le proprietà di spazio vettoriale si trasportano per isomorfismo.*

Esempio 17.28. [JLL11] *I morfismi*

$$1. \text{ id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \\ & a, b, c & \mapsto at^2 + bt + c \end{array}$$

$$3. \text{ dato } W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = 0, d = 0\} \quad T: \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & W \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, 0, 0) \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{ccc} F: & \mathbb{R}[t] & \rightarrow \mathbb{R}[x] \\ & f(t) & \mapsto f(x) \end{array}$$

sono isomorfismi, con facile verifica

Esempio 17.29. [JLL12] *I morfismi*

$$1. \quad \begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto (x, x) \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \\ & a, b, c, d & \mapsto at^2 + bt + c \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} F: & \mathbb{R}[t] & \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 10} \\ & f(t) & \mapsto f(x) \end{array}$$

non sono isomorfismi, con facile verifica

17.4 Morfismi con dominio di dimensione finita

Definizione per linearità.

Definizione-Proposizione 17.30. [III17] *Siano V, W due $\mathbb{K}$ -spazi, $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare*

$$F: V \rightarrow W \quad \text{tale che } F(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad i: 1, \dots, n$$

Questa applicazione si dice definita su B ed estesa per linearità, o semplicemente definita su B

Dimostrazione.

1. Esistenza: definiamo una funzione che soddisfa la proprietà e dimostriamo che è lineare. La funzione è

$$T: \quad \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & W \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i \end{array}$$

Ogni vettore $\underline{v} \in V$ si può rappresentare come combinazione lineare di dei vettori $\underline{v}_i$, dato che B è base di V ; la funzione quindi è ben definita. Vediamo la linearità

$$\begin{aligned}
 F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i\right) &= F\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \underline{v}_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) F(\underline{v}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \underline{w}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{w}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i F(\underline{v}_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i F(\underline{v}_i) \\
 &= F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) + F\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \underline{v}_i\right)
 \end{aligned}$$

2. Unicità: vogliamo dimostrare che se un'altra applicazione lineare $G: V \rightarrow W$ è tale che

$$G(\underline{v}_i) = F(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad i: 1, \dots, n$$

abbiamo necessariamente $F \equiv G$. Per il principio di identità delle funzioni, questo equivale a

$$\forall \underline{v} \in V \quad F(\underline{v}) = G(\underline{v})$$

Dato che B è una base di V abbiamo che esiste $\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\forall \underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) &= G\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right) \\
 \sum_{i=1}^n \alpha_i F(\underline{v}_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i G(\underline{v}_i) \\
 \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{w}_i
 \end{aligned}$$

ed abbiamo concluso. □

Ricordiamo che due funzioni sono uguali come funzioni se assumono lo stesso valore su ogni elemento del dominio. Per morfismi di spazi finiti possiamo dire di più:

Corollario 17.31. [III18] *Due funzioni lineari che assumono gli stessi valori su una base del dominio sono uguali come funzioni.*

Possiamo facilmente passare da una rappresentazione per formula ad una su base e viceversa.

Esercizio 17.32. [IIT28] *Definiamo su E_2 il morfismo*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 1, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (1, 0, 2) \end{aligned}$$

Vogliamo scrivere F per formula: vediamo che per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\begin{aligned} F((x, y)) &= F(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2) = xF(\underline{e}_1) + yF(\underline{e}_2) \\ &= x(1, 1, 0) + y(1, 0, 2) \\ &= (x, x, 0) + (y, 0, 2y) \\ &= (x + y, x, 2y) \end{aligned}$$

Esercizio 17.33. [IIT29] *Per morfismo*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y, 0, x) \end{aligned}$$

vale

$$\underline{e}_1 \mapsto (1, 1, 0, 1), \quad \underline{e}_2 \mapsto (1, -1, 0, 0)$$

17.4.1 Morfismi e matrici

È immediata conseguenza della Definizione-Proposizione 17.30 che un morfismo tra spazi finiti, una volta che abbiamo identificato una base del dominio, può essere definito da una matrice.

Proposizione 17.34. [IIX23] *La funzione*

$$\begin{aligned} T: \quad \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \{F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \mid F \text{ morfismo}\} \\ M &\mapsto T(M) = L_M: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ &\quad \underline{v} \mapsto M \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione.

1. Buona definizione. La funzione $T(M) = L_M$ è lineare dato che

$$L_M(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = M \cdot (\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = M \cdot (\alpha \underline{v}) + M \cdot (\beta \underline{w}) = \alpha M \cdot (\underline{v}) + \beta M \cdot (\underline{w}) = \alpha L_M(\underline{v}) + \beta L_M(\underline{w})$$

2. Linearità.

$$\begin{aligned} T(\lambda A + \mu B) &= \lambda A + \mu B: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ &\quad \underline{v} \mapsto (\lambda A + \mu B) \cdot \underline{v} \\ &= \lambda \left(A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \right) + \mu \left(B: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \right) \\ &\quad \underline{v} \mapsto A \cdot \underline{v} \quad \underline{v} \mapsto B \cdot \underline{v} \\ &= \lambda T(A) + \mu T(B) \end{aligned}$$

3. Iniettività. Basta dimostrare che $\ker T = \{0_{m \times n}\}$. Dato che $T(M) = L_M$ abbiamo

$$T(M) \equiv 0 \Leftrightarrow L_M \equiv 0 \Leftrightarrow \forall \underline{v} \in \mathbb{K}^n \quad L_M(\underline{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow \forall i : 1, \dots, n \quad M \cdot \underline{e}_i = \underline{0}_m \Leftrightarrow M = 0_{m \times n}$$

Dove la penultima equivalenza è data dal fatto che un morfismo è nullo se e solo se è nullo su una base, e l'ultima dal fatto che $M \cdot \underline{e}_i$ sono le colonne della matrice M .

4. Surgettività. Dato un morfismo $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ e matrice

$$M_F = \begin{pmatrix} | & & | \\ F(\underline{e}_1) & \cdots & F(\underline{e}_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

abbiamo che $T(M_F) = L_{M_F} \equiv F$ per la Proposizione-Definizione 17.30, dato che hanno stessa immagine su una base.

□

Definizione 17.35. [IIY23] Con le notazioni della proposizione precedente, indichiamo L_M come il morfismo associato alla matrice M e M_F come la matrice associata a F . Se vogliamo specificare che i le coordinate dei vettori che stiamo considerando sono rispetto alle basi canoniche, scriveremo $(M_E)_E^E$.

Corollario 17.36. [IIZ23] Con le notazioni della proposizione precedente ??, l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H: \{F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \mid F \text{ morfismo}\} & \rightarrow & \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ F & \mapsto & H(F) = \begin{pmatrix} | & & | \\ F(\underline{e}_1) & \cdots & F(\underline{e}_n) \\ | & & | \end{pmatrix} \end{array}$$

è morfismo e l'inversa di T .

Dimostrazione. Lasciata per esercizio.

□

Notiamo che il corollario 17.36 può sostituire parte della dimostrazione della Proposizione 17.34.

Corollario 17.37. [JJJ09] Sia T l'isomorfismo introdotto nella proposizione precedente 18.8. Allora per le proprietà dei morfismi di $\mathbb{K}$ -spazi è immediato che $T(0) = 0$ e se $m = n$ e quindi esistono $\text{id}_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n}$ e $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ invertibili, abbiamo che

$$T(\text{id}_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n}) = I_n \quad e \quad T(f^{-1}) = T(f)^{-1}$$

in la notazione $L_{(\cdot)}$ scriviamo

$$M_{\text{id}_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n}} = I_n \quad e \quad (L_M)^{-1} = L_{M^{-1}}$$

Spesso sarà necessario specificare le basi con cui stiamo operando.

Definizione 17.38. [JJH09] Siano dati V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $B = b_1, \dots, b_n$ e C basi di V, W rispettivamente ed un morfismo

$$\begin{array}{ccc} T: & V & \rightarrow & W \\ & b_i & \mapsto & T(b_i)_C \end{array}$$

dove il vettore $T(b_i)_C$ è espresso in coordinate rispetto alla base C . Allora la matrice associata a T rispetto alle due basi B, C è

$$(M_T)_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(\underline{b}_1)_C & \cdots & T(\underline{b}_n)_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

diciamo che B è la base di partenza e C la base di arrivo. Notiamo che le colonne della matrice sono i trasformati degli elementi della base di partenza nelle coordinate della base di arrivo.

Osservazione 17.39. [JJH67] *Con le notazioni della definizione precedente, Notiamo che $F(v_B) = \left((M_T)_C^B \cdot v_B\right)_C$, ovvero che la matrice $(M_T)_C^B$ prende in input vettori in coordinate B , li trasforma e li restituisce in coordinate C .*

Riscriviamo i due esempi precedenti in notazione matriciale

Esempio 17.40. [IIY28] *Il morfismo*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 1, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (1, 0, 2) \end{aligned}$$

è associato alla matrice $(M_T)_{E_4}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esempio 17.41. [IIY29] *Per morfismo*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y, 0, x) \end{aligned}$$

vale

$$\underline{e}_1 \mapsto (1, 1, 0, 1), \quad \underline{e}_2 \mapsto (1, -1, 0, 0)$$

ed è associato alla matrice $(M_T)_{E_4}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vedremo alcune utili conseguenze di questa notazione quando parleremo di cambio di basi.

17.5 Teorema della dimensione

Teorema 17.42 (Teorema della dimensione). [III55] *Sia $T: V \rightarrow W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi, con $\dim V = n$. Allora*

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \ker T + rk(T)$$

Dimostrazione. Immediato dal teorema di Rouché-Capelli in forma omogenea, cfr. Proposizione 15.7. □

Il teorema della dimensione ha alcuni utili corollari:

Corollario 17.43. [III61] *Dato $T: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, con $\dim V$ finita*

1. *T è iniettiva se e solo se $\dim(V) \leq \dim(W)$ e $rk(T) = \dim V$*
2. *T è surgettiva se e solo se $\dim(W) \leq \dim(V)$ e $rk(T) = \dim W$*
3. *Nel caso particolare $T: V \rightarrow V$ abbiamo che T iniettiva $\Leftrightarrow T$ surgettiva*

In particolare

1. *Se $\dim(V) > \dim(W)$ non c'è spazio in W per $\dim V$ vettori linearmente indipendenti, quindi le immagini dei vettori di una base di V sono dipendenti, ed F non può essere iniettiva.*

2. Se $\dim(W) > \dim(V)$ le immagini di una base di V non riescono a coprire tutto W .

Se lavoriamo su spazi vettoriali di dimensione finita possiamo prendere $V = \mathbb{K}^n$ e $W = \mathbb{K}^m$:

Corollario 17.44. [IIQ61] Siano V, W $\mathbb{K}$ -spazi di dimensione rispettivamente n, m . Data $T: V \rightarrow W$ morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi con associata matrice A

1. T è iniettiva se e solo se $\text{rk}(T) = \dim V$ se e solo se $m \geq n$ e $\text{rk}(A) = n$
2. T è surgettiva se e solo se $m \leq n$ e $\text{rk}(A) = m$
3. Nel caso particolare $T: V \rightarrow V$

$$T \text{ iniettiva} \Leftrightarrow T \text{ surgettiva} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow T \text{ invertibile} \Leftrightarrow T \text{ bigettiva}$$

Dimostrazione. Tutte le affermazioni sono immediate conseguenze del Teorema della Dimensione. □

17.6 Esercizi proposti

Esercizio 17.45. [IIQ67] *Descrivere le applicazioni lineari descritte dalle seguenti matrici attraverso l'immagine del vettore generico del dominio (per esempio $T((x, y)) = (x, y, 3x - y)$).*

$$1. T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, M_T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. T: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, M_T = \begin{pmatrix} i & i & i \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & i \end{pmatrix}$$

$$5. T: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 17.46. [IIP89] *Determinare basi di $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ per le applicazioni lineari descritte dalle seguenti matrici*

$$1. T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, M_T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. T: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, M_T = \begin{pmatrix} i & i & i \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & i \end{pmatrix}$$

$$5. T: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 17.47. [IIP33] *Determinare le matrici associate ai morfismi*

$$1. \quad \begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto 2x - y, x + y \end{array} ,$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto 2x - y + z, x + y - z \end{array} ,$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ & (x, y) & \mapsto y + z, x - z, x, x \end{array} ,$$

Esercizio 17.48. [IIQ47] Dati i vettori linearmente indipendenti $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ e l' applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{v}_1 &\mapsto \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 &\mapsto \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ \underline{v}_3 &\mapsto \underline{v}_1 + \underline{v}_3 \end{aligned}$$

determinare basi di $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 17.49. [IIQ03] Dati i vettori linearmente indipendenti $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ e, al variare di $k \in \mathbb{R}$ l' applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{v}_1 &\mapsto k\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 &\mapsto \underline{v}_2 + k\underline{v}_3 \\ \underline{v}_3 &\mapsto \underline{v}_1 + \underline{v}_3 \end{aligned}$$

determinare basi di $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

Esercizio 17.50. [LL88] Abbiamo l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (1, 1, 0) &\mapsto (1, 1, 0, 1) \\ (1, -1, 2) &\mapsto (1, 2, -1, 0) \\ (0, 0, 1) &\mapsto (0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

1. L'applicazione T è iniettiva, surgettiva, biunivoca?
2. Determinare l'immagine di $(2, 0, 3)$.

Esercizio 17.51. [IIQ45] [Difficile] Dato $\mathcal{F} = \{T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid T(0) = 0\}$ ed i suoi sottoinsiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(1) = T(2) - T(3)\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(1) = T(2) = T(3)\} \end{aligned}$$

dimostrare che $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq_{SSP} \mathcal{F}$ e determinare $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$

Esercizio 17.52. [IIQ66] [Difficile] Dato $\mathcal{F} = \{T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid T(0) = 0\}$ ed i suoi sottoinsiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(3) = T(1) + T(2)\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{T: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid T(0) = 0, T(2) = 2T(1), T(3) = 3T(1)\} \end{aligned}$$

dimostrare che $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq_{SSP} \mathcal{F}$ e determinare $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$

Esercizio 17.53. [JJ15] [Difficile, utile più teoria] Sia dato l'endomorfismo

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (1, 2, 3) &\mapsto (2, 2, 6) \\ (1, 1, 3) &\mapsto (3, 3, 3) \\ (1, 1, 1) &\mapsto \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Determinare la matrice associata a T mediante le basi canoniche, ovvero $(M_T)_{E_3}^{E_3}$

Esercizio 17.54. [KL07] [Difficile, utile più teoria] Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, si determini se esista una applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl}
 T : \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 (1, 2, 3) & \mapsto & (3, 1, 5) \\
 (3, 1, 0) & \mapsto & (1, 2, 3) \\
 (1, 1, 1) & \mapsto & (2, 0, 0) \\
 (4, 2, 1) & \mapsto & (3, 2, 3) \\
 (a, b, 0) & \mapsto & (a, b, c)
 \end{array}$$

determinando altresì $(M_T)_{E_3}^{E_3}$

Esercizio 17.55. [KL11] [Difficile, utile più teoria] Abbiamo $a, b \in \mathbb{R}$ e una funzione

$$\begin{array}{rcl}
 T : \quad \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\
 (1, 2, 3, 0) & \mapsto & (1, 1, 1, 2) \\
 (3, 0, 1, 1) & \mapsto & (1, -1, 2, 1) \\
 (3, -6, -7, 2) & \mapsto & (-1, -5, a, b) \\
 (1, 1, 2, 0) & \mapsto & \underline{0} \\
 \underline{e}_4 & \mapsto & \underline{e}_4
 \end{array}$$

1. Per quali a, b , la funzione può essere un applicazione lineare?
2. Dare, per una base a scelta B di $\mathbb{R}^4$, la matrice $(M_T)_B^B$
3. Dare la matrice $(M_T)_E^E$

Esercizio 17.56. [LLL89] Determinare tutti i morfismi $T: \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ che soddisfano le condizioni

$$x^2 + 1 \mapsto x^2 + 1 \quad x^2 + 3 \mapsto x^3 - 2$$

1. Tra questi, dire se esistono determinare tutti i morfismi iniettivi.
2. Per questi questi, determinare $T(x)^{-1}$

Esercizio 17.57. [LLL90] Determinare tutti i morfismi $T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ che soddisfano le seguenti condizioni

1. $\dim \ker T = 1$.
2. $I_2 \in \text{Im } T$.
3. $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

Esercizio 17.58. [LLS90] Determinare tutti i morfismi $T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ che soddisfano le seguenti condizioni

1. $\dim \ker T = 1$.
2. $I_2 \in \text{Im } T$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Im } T$.
4. $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

Esercizio 17.59. [LLX90] *Dare descrizione cartesiana dei seguenti spazi*

1. $V = \text{Span}((1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{Q}^4.$
2. $V = \text{Span}((i+1, i+1, i+1, i+1), (0, i+1, 1, 2), (i, i, i, i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^4.$
3. $V = \{(a+b+c, a-b, -a-c, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$
4. $V = \{(a+b+c, a+b-c, a+b+3c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$
5. $V = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

Esercizio 17.60. [LLX91] *Dare descrizione parametrica dei seguenti spazi*

1. $V = \{(x, y, z, t) \mid \{2x + y - 3z = 0\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$
2. $V = \{(x, y, z) \mid \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$
3. $V = \{(x, y) \mid \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^2$
4. $V = \{(x, y, z, t) \mid \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+t=0 \\ 2x-3y-4z+t=0 \end{cases} \} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

Osservazione 17.61. [NNW61] *Diciamo che due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$ sono ortogonali, e scriviamo $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.*

Dato $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^n$, definiamo lo spazio ortogonale di V come

$$V^\perp = \{\underline{w} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{w} \perp \underline{v}\}$$

Si vede facilmente che si tratta di un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

Esercizio 17.62. [NNA61] *Determinare una base degli spazi*

1. $\text{Span}((1, 1))^\perp.$
2. $\text{Span}((1, 1), (2, 1))^\perp.$
3. $\text{Span}((1, 1, 0, 1), (2, 0, 2, 1))^\perp.$
4. $\text{Span}((1, 1, 0, 1), (2, 0, 2, 1), (9, 0, 2, 3))^\perp.$
5. $\text{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))^\perp.$
6. $\{(x, y, z, t) \mid x + y - t = 0 \text{ e } 2x - 3y + 4t = 0\}^\perp.$
7. $\{(2x + y, x - y, x + y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}^\perp.$

Esercizio 17.63. [IIQ01] *Determinare, se esiste, un'applicazione lineare che soddisfi le condizioni*

1.

$$\begin{array}{ccc}
 T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 & (1, 1, 0) & \mapsto (1, 2, 0, 8) \\
 & (1, 1, -2) & \mapsto (2, 3, -1, 16) \\
 & (0, 1, 2) & \mapsto (0, 1, 1, 0)
 \end{array}$$

2. $rk(T) = 2$, $e_1 \in \text{Im } T$

Esercizio 17.64. [IIQ22] Determinare, se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, un'applicazione lineare che soddisfi le condizioni

1.

$$\begin{array}{ccc}
 T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 & (1, 1, 0) & \mapsto (1, 2, 0) \\
 & (1, 1, 1) & \mapsto (a, a-1, -a-1) \\
 & (1, 1, 2) & \mapsto (0, 1, 1)
 \end{array}$$

2. $\dim \ker T = 1$ e determinare una base di $\ker T$

Osservazione 17.65. [NNU62] Una base $B = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^n$ si dice ortonormale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali e il modulo $(|\cdot|)$ di ogni vettore è 1. Ricordiamo che $|(a_1, \dots, a_n)| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

Esercizio 17.66. [NNA62] Trovare una base ortonormale di $B = \text{Span}((1, 0, 1), (1, 2, 0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$

Esercizio 17.67. [NNA63] Trovare una base ortonormale di $B = \text{Span}((1, 0, 1, 3), (1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

Esercizio 17.68. [NNA64] Dati i vettori $(2, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(3, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ determinare una base ortonormale del sottospazio da essi generato.

Esercizio 17.69. [NNY33] È vero che $\forall \underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$|\lambda \underline{v}| = \lambda |\underline{v}| \text{ ?}$$

Capitolo 18

Diciottesima Lezione - Esercizi

18.1 Esercizi svolti

Esercizio 18.1. [III28] Definiamo su $\mathbb{R}^3$ il morfismo

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 1, 0, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (0, 1, 0, 1) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Vogliamo scrivere F direttamente: vediamo che per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\begin{aligned} F((x, y, z)) &= F(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3) = xF(\underline{e}_1) + yF(\underline{e}_2) + zF(\underline{e}_3) \\ &= x(1, 1, 0, 0) + y(0, 1, 0, 1) + z(1, 1, 1, 1) \\ &= (x, x, 0, 0) + (0, y, 0, y) + (z, z, z, z) \\ &= (x + z, x + y + z, z, y + z) \end{aligned}$$

Esercizio 18.2. [IIQ28] Definiamo su $\mathbb{R}^3$ il morfismo

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - 2y + 3z, 4x + 5z) \end{aligned}$$

Vogliamo scrivere la matrice associata ad F dalla base E_3 : vediamo che

$$\begin{aligned} F(\underline{e}_1) &= F((1, 0, 0)) = (1, 4) \\ F(\underline{e}_2) &= F((0, 1, 0)) = (-2, 0) \\ F(\underline{e}_3) &= F((0, 0, 1)) = (3, 5) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a F dalla base E_3 è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Possiamo scrivere F come

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 4) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (-2, 0) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (3, 5) \end{aligned}$$

o come

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{v} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

Esercizio 18.3. [III27] Dato il morfismo

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, y + z) \end{aligned}$$

notiamo che

$$F(\underline{e}_1) = F((1, 0, 0)) = (1, 0), \quad F(\underline{e}_2) = F((0, 1, 0)) = (1, 1), \quad F(\underline{e}_3) = F((0, 0, 1)) = (0, 1)$$

e quindi F è uguale al morfismo definito per linearità

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (1, 1) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

dato che assumono gli stessi valori su una base.

Esercizio 18.4. [III58] Data la funzione

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (1, 2, 1) &\mapsto (1, 0, 0, 0) \\ (1, 1, 1) &\mapsto (1, 0, 1, 0) \\ (0, 3, 2) &\mapsto (2, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

determinare se possibile una base di $\ker F$ e $\operatorname{Im} F$.

Soluzione: Verifichiamo che F sia definita su una base di $\mathbb{R}^3$, controllando che i vettori

$$(1, 2, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (0, 3, 2)$$

formino una base di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo il determinante della matrice (sviluppiamo per la terza riga)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

che ha quindi rango 3. $B = (1, 2, 1), (1, 1, 1), (0, 3, 2)$ è base di $\mathbb{R}^3$ e T è ben definita.

Vediamo se F è iniettiva - basta vedere se $\ker F = \{\underline{0}\}$, ovvero se l'unica soluzione del sistema omogeneo

$$F((x, y, z)) = \underline{0} \Leftrightarrow x(1, 0, 0, 0) + y(1, 0, 1, 0) + z(2, 0, 1, 0) = \underline{0}$$

è quella nulla. La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si vede immediatamente che il rango della completa (e dell'incompleta, è un sistema omogeneo) è 2, quindi non esiste soluzione unica, la funzione non è iniettiva e $\dim \ker F \geq 1$. Se vogliamo trovare una base di $\ker F = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ dobbiamo risolvere esplicitamente il sistema, ovvero trovare un vettore generico delle soluzioni e da questo una base.

$$\begin{aligned} F((x, y, z)) = \underline{0} &\Leftrightarrow x(1, 0, 0, 0) + y(1, 0, 1, 0) + z(2, 0, 1, 0) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \end{aligned}$$

Imponendo queste condizioni al vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ troviamo il vettore generico di $\ker F$, $(-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$. Quindi $\ker F = \text{Span}((-1, -1, 1)) = \text{Span}((1, 1, -1))$ e $\dim \ker F = 1$. Dato che

$$\text{Im } F = \text{Span}((1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0))$$

guardiamo la matrice sopra e vediamo che per esempio la prima e seconda colonna sono linearmente indipendenti (hanno i pivot). Quindi l'immagine ha base, per esempio,

$$B' = (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$$

□

Esercizio 18.5. [III26] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, scrivere l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mediante le basi E_2 , E_2 e darne la formula esplicita.

Soluzione. Il morfismo T si può scrivere come

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (1, 5) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (2, 4) \end{aligned}$$

Quindi

$$F((x, y)) = F(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2) = xF(\underline{e}_1) + yF(\underline{e}_2) = x(1, 5) + y(2, 4) = (x + 2y, 5x + 4y)$$

□

Esercizio 18.6. [IIQ04] La funzione

$$\begin{aligned} G: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + y, x - y) \end{aligned}$$

è lineare, per costruzione.

Osservazione 18.7. [JJW11] *La trasposta è un isomorfismo. Dalle proprietà della trasposta si vede che*

$$\begin{aligned} (\cdot)^T: \quad \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^T \end{aligned}$$

è un morfismo di spazi vettoriali con inverso se stesso.

Esercizio 18.8. [JJJ05]

1. $\mathbb{K}^{d+1} \simeq \mathbb{K}[x]_{\leq d}$. Due isomorfismi sono, per esempio,

$$\begin{array}{ccc} F: \quad \mathbb{K}^{d+1} & \rightarrow & \mathbb{K}[x]_{\leq d} \\ \underline{e}_1 & \mapsto & 1 \\ \underline{e}_2 & \mapsto & x \\ \vdots & \mapsto & \vdots \\ \underline{e}_{d+1} & \mapsto & x^d \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} G: \quad \mathbb{K}^{d+1} & \rightarrow & \mathbb{K}[x]_{\leq d} \\ \underline{e}_1 & \mapsto & x^d \\ \underline{e}_2 & \mapsto & x^{d-1} \\ \vdots & \mapsto & \vdots \\ \underline{e}_{d+1} & \mapsto & 1 \end{array}$$

2. $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn}$. Un isomorfismo è

$$\begin{aligned} T: \quad \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K}^{mn} \\ M_{ij} &\mapsto \underline{e}_{f(i,j)} \end{aligned}$$

dove $f: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow 1, \dots, mn$ è una bigezione.

3. $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \simeq \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$. Sia direttamente con la trasposta sia da

$$\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn} \simeq \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$$

4. Se V, W sono $\mathbb{K}$ -spazi di dimensione finita n , $V \simeq \mathbb{K}^n$. Dato $\dim V = \dim W = n$ esistono due basi $\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{w}}$ rispettivamente di V, W della stessa cardinalità. Basta considerare l'isomorfismo

$$\begin{aligned} T: \quad V &\rightarrow W \\ \underline{v}_i &\mapsto \underline{w}_i \end{aligned}$$

che è morfismo perché è definito per linearità sulla base $\underline{\underline{v}}$ ed è bigettivo perché invertibile, dato che la funzione

$$\begin{aligned} G: \quad W &\rightarrow V \\ \underline{w}_i &\mapsto \underline{v}_i \end{aligned}$$

è chiaramente la sua inversa.

5. Come immediata conseguenza, se W è un $\mathbb{K}$ -spazio di dimensione finita n , $V \simeq \mathbb{K}^n$.

Osservazione 18.9. [JJJ20] Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e ricordiamo la definizione del morfismo associato

$$\begin{aligned} L_A: \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \underline{v} &\mapsto A \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è invertibile.
2. L_A è iniettiva ($\ker L_A = \{\underline{0}\}$).
3. L_A è surgettiva ($\text{Im } L_A = \mathbb{K}^n$).

4. $\text{rk } A = n$.
5. Le colonne di A sono linearmente indipendenti.
6. Le righe di A sono linearmente indipendenti.
7. $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) = \{\underline{0}\}$.
8. $\forall \underline{b} \in \mathbb{K}^n \quad \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{A^{-1}\underline{b}\}$.
9. Riducendo A alla forma a scala S , questa ha n pivot (è non singolare).
10. $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Tutte le equivalenze sono banali. □

Definizione 18.10. [III56] Data una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, definiamo

1. $\ker A = \ker L_A$
2. $\text{Im } A = \text{Im } L_A = \text{rk } L_A$

Osservazione 18.11. [III54] Sia $L_A: V \rightarrow W$ un morfismo di $\mathbb{K}$ spazi. Allora

1. $\text{Im } T = \text{Span}(A^1, \dots, A^n)$ le colonne di A .
2. $\dim \text{Im } T = \text{rk}(A)$.

Dimostrazione.

1. Le colonne di A sono per costruzione $T(\underline{e}_1), \dots, T(\underline{e}_n)$, che generano $\text{Im } A$ per la Proposizione 17.13.
2. Il rango di A è proprio il numero massimo di colonne indipendenti, che è per definizione $\dim \text{Im } T$.

□

Ricordiamo che dalla definizione di prodotto di matrici discende immediatamente che $M \cdot \underline{e}_i = i$ -esima colonna di M .

Osservazione 18.12. [III57] Possiamo riscrivere il Teorema di Rouché-Capelli nel linguaggio di morfismi: Data una matrice $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$,

$$n = \dim \ker A + \text{rk}(A)$$

Questo è noto come Teorema della Dimensione, La dimostrazione è immediata dalla dimostrazione del Teorema di Rouché-Capelli vista in precedenza.

Esercizio 18.13. [IIX17] La funzione

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}[x] &\rightarrow \mathbb{K}[x] \\ f(x) &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

è un morfismo.

Esercizio 18.14. [IIY17] La funzione

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}[x] &\rightarrow \mathbb{K}[x] \\ f(x) &\mapsto f(x^2) \end{aligned}$$

è un morfismo

Esercizio 18.15. [IIG17] *La funzione*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}[x] &\rightarrow \mathbb{K}[x] \\ f(x) &\mapsto f(3x) \end{aligned}$$

è un morfismo

Esercizio 18.16. [IIF17] *La funzione*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}[x] &\rightarrow \mathbb{K}[x] \\ f(x) &\mapsto f(3x+2) \end{aligned}$$

non è un morfismo

Osservazione 18.17. [III06]

1. *la funzione nulla* $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $T(\underline{v}) = \underline{0}$ *si può scrivere come*

$$L_0: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad L_0(\underline{v}) = 0_{m \times n} \cdot \underline{v}$$

2. *la funzione identità* $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $T(\underline{v}) = \underline{v}$ *si può scrivere come*

$$L_{I_n}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad L_{I_n}(\underline{v}) = I_n \cdot \underline{v}$$

Esercizio 18.18. [III41] *Dato il morfismo*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (ix + y, 5x + z, 2iy + 3z) \end{aligned}$$

Determinare M_T

Soluzione. Abbiamo che

$$T(\underline{e}_1) = T((1, 0, 0)) = (i, 5, 0)$$

$$T(\underline{e}_2) = T((0, 1, 0)) = (1, 0, 2i)$$

$$T(\underline{e}_3) = T((0, 0, 1)) = (0, 1, 3)$$

e quindi

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Osservazione 18.19. [III70] *Data* $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ *e* $L_A: V \rightarrow W$ *abbiamo che*

$$\ker A = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

Esercizio 18.20. [IIQ44] *La funzione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y + 2, x - y) \end{aligned}$$

non è lineare, dato che $F((0, 0)) = (2, 0) \neq \underline{0}$.

Esercizio 18.21. [PP03] Sia $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tale che l'applicazione

$$\begin{aligned} T: F &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f &\mapsto (f(a), 2f(1) + a + b) \end{aligned}$$

sia lineare

Soluzione. Procediamo con la definizione. Dobbiamo avere che

- $\forall f \in F, \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda f) = \lambda T(f)$. Ma

$$\begin{aligned} T(\lambda f) &= \lambda T(f) \\ (\lambda f(a), 2\lambda f(1) + a + b) &= \lambda(f(a), 2f(1) + a + b) \\ (\lambda f(a), 2\lambda f(1) + a + b) &= (\lambda f(a), 2\lambda f(1) + \lambda(a + b)) \\ &\begin{cases} \lambda f(a) = \lambda f(a) \\ 2\lambda f(1) + a + b = 2\lambda f(1) + \lambda(a + b) \end{cases} \\ &\begin{cases} a + b = \lambda(a + b) \end{cases} \end{aligned}$$

e dato che l'uguaglianza deve valere per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ questo implica $a + b = 0$

- Ponendo $a + b = 0$ verifichiamo che $\forall f, g \in F, T(f + g) = T(f) + T(g)$. Ma

$$\begin{aligned} T(f + g) &= T(f) + T(g) \\ (f + g(a), 2(f + g)(1) + a + b) &= (f(a), 2f(1) + a + b) + (g(a), 2g(1) + a + b) \\ (f(a) + g(a), 2f(1) + 2g(1) + a + b) &= (f(a) + g(a), 2f(1) + 2g(1) + 2(a + b)) \\ &\begin{cases} f(a) + g(a) = f(a) + g(a) \\ 2(f + g)(1) + a + b = 2f(1) + 2g(1) + 2(a + b) \end{cases} \\ &\begin{cases} a + b = 2(a + b) \end{cases} \end{aligned}$$

e questo è verificato per ogni a, b tali che $a + b = 0$

Quindi T è lineare per tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + b = 0$. □

Esercizio 18.22. [JJ13] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ t & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\ker \mathcal{L}_{A_t})$ e $\dim(\operatorname{Im} \mathcal{L}_{A_t})$.
2. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $(2, 2, 0)$ appartiene ad $\operatorname{Im} \mathcal{L}_{A_t}$.

Soluzione.

1. Vogliamo determinare $\dim(\ker \mathcal{L}_{A_t})$ e $\dim(\operatorname{Im} \mathcal{L}_{A_t})$. Calcoliamo il determinante di A sviluppando secondo la terza riga

$$\det A_t = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ t & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & t \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-t^2 - 2) = t^2 - 4$$

Se $t \neq \pm 2$ abbiamo che il determinante di A_t è non nullo e quindi

$$\dim \operatorname{Im}(A_t) = rk A_t = 3 \text{ da cui } \dim \ker(A_t) = 3 - rk A_t = 0$$

Se $t = \pm 2$, abbiamo che $\det A_t = 0$ e quindi $rk A_t < 3$. La sottomatrice

$$A_{(1,3),(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che non dipende da t , è non singolare, e quindi per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\dim \operatorname{Im}(A_t) = rk A_t = 2 \text{ da cui } \dim \ker(A_t) = 3 - rk A_t = 1$$

2. Per determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $(2, 2, 0)$ appartiene ad $\operatorname{Im} \mathcal{L}_{A_t}$ vediamo le t per cui esiste almeno una soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_t}((x_1, x_2, x_3)) &= (2, 2, 0) \\ A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ t & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usiamo il teorema di Rouché-Capelli. La matrice completa è

$$A'_t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & t & 2 \\ t & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se $t \neq \pm 2$ abbiamo già visto che $rk A_t$ è massimo, quindi

$$rk A'_t = rk A_t = 3 \quad \text{massimo}$$

ed esiste un' unica soluzione.

Se $t = \pm 2$, ricordando che $rk A_t = 2$ si vede che i determinanti delle sole altre tre sottomatrici 3×3 di A'_t

$$\begin{aligned} (A_t)_{(1,2,3),(1,2,4)} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ t & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (A_t)_{(1,2,3),(1,3,4)} &= \begin{vmatrix} 1 & t & 2 \\ t & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (A_t)_{(1,2,3),(2,3,4)} &= \begin{vmatrix} 3 & t & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

sono sempre uguali a $2t + 4$, che sia annulla solo per $t = -2$. Quindi

- Se $t = 2$, $rk A_t = 2 \neq rk A'_t = 3$ e non esistono soluzioni.
- Se $t = -2$, $rk A_t = rk A'_t = 2$ ed esistono ∞^1 soluzioni.

□

Esercizio 18.23. [LL31] *Dati U, W sottospazi del $\mathbb{K}$ -spazio V , dimostrare che*

$$U \times W \simeq U \oplus W$$

Dimostrazione. I due spazi non possono essere uguali, dato che il primo ha come elementi coppie di vettori di V mentre il secondo, elementi di V .

$$U \times W \subseteq V^2 \text{ e } U \oplus W \subseteq V$$

Possono però essere isomorfi. Costruiamo un isomorfismo, ovvero un'applicazione lineare bigettiva, tra $U \times W$ e $U \oplus W$.

$$\begin{aligned} \phi: U \times W &\longrightarrow U \oplus W \\ (u, w) &\rightsquigarrow u + w \end{aligned}$$

Questa è lineare perché, per ogni $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \times W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(u_1, w_1) + \mu(u_2, w_2)) &= \phi((\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda w_1 + \mu w_2)) \\ &= \lambda u_1 + \mu u_2 + \lambda w_1 + \mu w_2 \\ &= \lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2 \\ &= \phi((\lambda u_1, \lambda w_1)) + \phi((\mu u_2, \mu w_2)) \\ &= \lambda \phi((u_1, w_1)) + \mu \phi((u_2, w_2)) \end{aligned}$$

Per la bigettività:

Vediamo la dimostrazione per se V ha dimensione finita. Il caso generale è lasciato per esercizio.

Vediamo che $U \oplus W$ e $U \times W$ hanno la stessa dimensione. Infatti

- $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$, usando la formula di Grassman e dato che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ dato che la somma è diretta.
- $\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W)$ dato che se $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_s$ sono basi di U, W rispettivamente, una base di $U \times W$ è data dai $n + s$ vettori

$$(u_1, \underline{0}), \dots, (u_n, \underline{0}), (\underline{0}, w_1), \dots, (\underline{0}, w_s)$$

Quindi basta provare l'iniettività di ϕ , ovvero che $\ker(\phi) = \{\underline{0}\}$. ma

$$(u, w) \in \ker(\phi) \iff u + w = \underline{0}$$

e dato che $w, \underline{0} \in W$ abbiamo che $u \in W$ e dato che $u, \underline{0} \in U$ abbiamo che $w \in U$, da cui $u, w \in W \cap U = \{\underline{0}\}$, ovvero $u = w = \underline{0}$, e quindi abbiamo dimostrato che $(u, w) = (\underline{0}, \underline{0})$.

□

Esercizio 18.24. [MMM01] *Data l'applicazione lineare di $\mathbb{R}$ -spazi*

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\longrightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

determinare $\dim \ker F$.

Soluzione. Risolviamo questo esercizio trasportando il problema in $\mathbb{K}^4$ mediante isomorfismi. Si sarebbe potuto risolvere direttamente per esempio trovando direttamente una base di $\ker F$.

Abbiamo che

$$\begin{aligned} F(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi un polinomio generico di $\ker F$ è dato dall'applicazione delle condizioni $a = b = c = 0$ al polinomio generico $ax^3 + bx^2 + cx + d$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Otteniamo che un polinomio generico del $\ker F$ dato da $p(x) = d$, quindi $\ker F$ è composto dai polinomi costanti ed una sua base è 1. La dimensione di $\ker F$ è quindi 1.

Mediate gli isomorfismi:

Introduciamo i tre morfismi

$$\begin{aligned} \psi: \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &\mapsto (a, b, c, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ (a, b, c, d) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{F}: \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d) &\mapsto (a, b, c, a+b) \end{aligned}$$

I primi due sono chiaramente isomorfismi e chiaramente

$$\phi \circ \overline{F} \circ \psi \equiv F$$

Dato che ψ, ϕ sono isomorfismi, $rk F = rk \overline{F}$ e quindi

$$\dim \ker F = 4 - rk F = 4 - rk \overline{F}$$

Dato che

$$\begin{aligned} F((1, 0, 0, 0)) &= (1, 0, 0, 1) \\ F((0, 1, 0, 0)) &= (0, 1, 0, 0) \\ F((0, 0, 1, 0)) &= (0, 0, 1, 0) \\ F((0, 0, 0, 1)) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Costuiamo

$$(M_F)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che si vede facilmente avere rango tre. Quindi $\dim \ker F = 4 - 3 = 1$

□

Esercizio 18.25. [LL15] *Sia data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} T: & \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto AX - XA \end{array}$$

1. T è lineare?
2. Determinare $\dim \ker(T)$.
3. Determinare $\ker(T), \text{Im}(T)$. [Lasciato per esercizio]
4. È vero che $\ker(T) \oplus \text{Im}(T) = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$? [Lasciato per esercizio]

Soluzione.

1. T è lineare? Verifichiamo le condizioni:

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, X \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ abbiamo

$$T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda AX - \lambda XA = \lambda(AX - XA) = \lambda T(X)$$

(b) $\forall X, Y \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\begin{aligned} T(X + Y) &= A(X + Y) - (X + Y)A \\ &= AX + AY - XA - YA \\ &= (AX - XA) + (AY - YA) \\ &= T(X) + T(Y) \end{aligned}$$

Quindi T è lineare.

2. Notiamo che

$$T(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} T(e_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T(e_{21}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ T(e_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trasportiamo il nostro problema in $\mathbb{R}^4$ usando le due basi canoniche e l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} F: & \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & e_{11} & \mapsto \underline{e}_1 \\ & e_{12} & \mapsto \underline{e}_2 \\ & e_{21} & \mapsto \underline{e}_3 \\ & e_{22} & \mapsto \underline{e}_4 \end{array}$$

e quindi rispetto alla base canonica $E_{2 \times 2} = e_{11}, \dots, e_{22}$ il morfismo T è associato alla matrice che ha per colonne le trasformate dei vettori e_{ij} scritte in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_{2 \times 2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che la seconda riga è nulla, la prima multipla della quarta e la sottomatrice di indici $(3, 4); (1, 2)$ non singolare. Quindi $rk(M_T)_{E_4}^{E_{2 \times 2}} = rk T = 2$ e per il Teorema della Dimensione

$$\dim \ker T = 4 - rk T = 2$$

□

Esercizio 18.26. [ES2122C] Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita dalla formula

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ x - 2y + z \\ -2x + y + z \end{pmatrix}$$

1. Dire se f è iniettiva o surgettiva.
2. Determinare immagine e $\ker$ di f .
3. Determinare $f^{-1}((3, 0, 3))$, la controimmagine di $(3, 0, 3)$.
4. Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che $(1, k + 1, k^2 - 2) \in \text{Im } f$.

Soluzione. Dato che le entrate del vettore immagine sono polinomi omogenei di grado 1 nelle tre variabili x, y, z , la funzione f è un morfismo di $\mathbb{R}$ -spazi. Determiniamo la matrice che gli viene associata dalle basi canoniche. Dato che

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1, -2) \quad f((0, 1, 0)) = (1, -2, 1) \quad f((0, 0, 1)) = (-2, 1, 1)$$

abbiamo

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dire se f è iniettiva o surgettiva.

Dato che, con facili calcoli, si trova che

$$\det(M_f)_{E_3}^{E_3} = 0$$

e che la prima e seconda riga sono chiaramente indipendenti, $rk(f) = 2 \neq 3$ e quindi f non è surgettiva. Per il teorema della dimensione, $\dim \ker(f) = 3 - rk(f) = 3 - 2 \neq 0$ e quindi f non è iniettiva.

2. Determinare immagine e $\ker$ di f .

Riduciamo con Gauss $(M_f)_{E_3}^{E_3}$

```

M:=Mat([[ 1, 1,-2],
        [ 1,-2, 1],
        [-2, 1, 1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2]
      2^a-1*1^a [0, -3, 3]
      3^a+2*1^a [0, 3, -3]

```

```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2]
----- [0, -3, 3]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0]

```

Una base di $\text{Im } f$ è data dalle colonne originarie che hanno un pivot nella riduzione, ovvero $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$.
Quindi

$$\text{Span}(\text{Im } f) = ((1, 1, -2), (1, -2, 1))$$

Per determinare una base del $\ker$ troviamo le soluzioni del sistema associato alla matrice $(M_f)_{E_3}^{E_3}$, ovvero, per comodità, alla sua riduzione

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Quindi un vettore generico delle soluzioni è (z, z, z) e

$$\ker(f) = \text{Span}((1, 1, 1))$$

3. Determinare $f^{-1}((3, 0, 3))$, la controimmagine di $(3, 0, 3)$.

Per definizione

$$f^{-1}((3, 0, 3)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z)) = (3, 0, 3)\}$$

ovvero, $f^{-1}((3, 0, 3))$ è composto dalle soluzioni (x, y, z) del sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Risolvi il sistema con Gauss

```

M:=Mat([[ 1, 1, -2, 3],
        [ 1, -2, 1, 0],
        [-2, 1, 1, 3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2, 3]
      2^a-1*1^a [0, -3, 3, -3]

```

```
3^a+2*1^a [0, 3, -3, 9]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, 1, -2, 3]
----- [0, -3, 3, -3]
3^a+1*2^a [0, 0, 0, 6]
```

vediamo immediatamente dall'ultima riga che il sistema non ha soluzioni, e quindi $f^{-1}((3, 0, 3)) = \emptyset$.

4. Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che $(1, k+1, k^2-2) \in \text{Im } f$.

Dato che una base di $\text{Im } f$ è $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$, ci viene chiesto di determinare se esistono, al variare di k , combinazioni lineari di questi vettori che diano $(1, k+1, k^2-2)$, ovvero valori del parametro k tali che il sistema

$$a(1, 1, -2) + b(1, -2, 1) = (1, k+1, k^2-2)$$

nelle variabili a, b abbia soluzioni. Risolviamo con Gauss.

```
Use R:=Q[k];
M:=Mat([ [1, 1,      1],
          [1,-2,    k+1],
          [-2,1, k^2-2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1]
2^a-1*1^a [0, -3, k]
3^a+2*1^a [0, 3, k^2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1,      1]
----- [0, -3,      k]
3^a+1*2^a [0, 0, k^2 + k]
```

Chiaramente soluzioni esistono se e solo se $k^2 + k = 0$, ovvero se $k = 0, -1$, dato che solo in questo caso abbiamo due pivot sia nella completa che nell'incompleta.

I conti possono essere sostanzialmente minimizzati risolvendo prima il punto 3, e sfruttando la riduzione della matrice incompleta ivi calcolata nella risoluzione degli altri punti. Qui si è preferito svogere tutti i conti indipendentemente per maggiore chiarezza. $\square$

18.2 Esercizi proposti

Esercizio 18.27. [IIA80] *Dimostrare che una funzione*

$$\begin{aligned} T: \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ \underline{x} &\mapsto (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})) \end{aligned}$$

dove

$$\forall i: 1 \dots m \quad f_i(\underline{x}) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

è lineare se e solo se tutti i polinomi $f_i(\underline{x})$ sono di grado uno ed omogenei.

Esercizio 18.28. [IIA00] Dire se le seguenti applicazioni sono lineari

1. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. [No]
2. $T: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = p(x^2)$ [Si]
3. $T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b)x^2 + c + d$ [Si]
4. $F: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$, $F(p(x)) = p(x^2)$ [Si]
5. $F: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$, $F(p(x)) = p(0)$ [Si]
6. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x$ [No]

Esercizio 18.29. [IIA03] Dire se la funzione traccia di una matrice

$$\begin{aligned} \text{tr}: \quad \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

è lineare

Esercizio 18.30. [IIA04] Caratterizzare tutte le funzioni lineari $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Esercizio 18.31. [IIQ06] Dato lo $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ e $g \in \mathcal{F}$, dire se

$$\begin{aligned} F: \quad \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

è lineare. [No]

Esercizio 18.32. [IIQ55] Dato lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ e $g \in \mathcal{F}$, dire se

$$\begin{aligned} F: \quad \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ f(x) &\mapsto 2f(x) \end{aligned}$$

è lineare. [Si]

Esercizio 18.33. [III20] Il prodotto scalare per un vettore $\underline{v}$ è lineare

$$\begin{aligned} F_{\underline{v}}: \quad V &\rightarrow V \\ \underline{w} &\mapsto \underline{v} \cdot \underline{w} \end{aligned}$$

è lineare.

Dimostrazione. Discende immediatamente dalle proprietà del prodotto scalare. □

Esercizio 18.34. [III40] Dati il $\mathbb{K}$ -spazio V e $U, W \subseteq V$ tali che $V = U \oplus W$, la funzione

$$\begin{aligned} \text{Proj}_U: \quad U \oplus W &\rightarrow U \\ \underline{v} = \underline{u} + \underline{w} &\mapsto \underline{u} \end{aligned} \quad \text{con } \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$$

è ben definita e lineare.

Dimostrazione. La dimostrazione, lasciata per esercizio, segue dalle proprietà della somma diretta. □

Esercizio 18.35. [JJ2] Sia data, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (ax + 2ay + z, bx + 2by + z) \end{aligned}$$

1. Si determinino gli eventuali valori di a, b per cui T è surgettiva.
2. Si trovi una base di $\ker(T)$.

Esercizio 18.36. [IIQ00] Sia data, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto (ax + ay, bx + by + bz, bx, ax + bz) \end{aligned}$$

1. Si determinino gli eventuali valori di a, b per cui T è iniettiva.
2. Si trovi una base di $\ker(T)$.

Esercizio 18.37. [IIG00]

1. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned} T(\underline{e}_1) &= (1, 2, 1, 1) \\ T((1, 2, 0)) &= \underline{0} \\ \dim \ker T &= 2 \end{aligned}$$

2. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned} T((1, 2, 0, 0)) &= (1, 2, 1, 1) \\ T((1, 4, 1, 0)) &= \underline{0} \\ T((2, 3, 2, 0)) &= \underline{0} \\ T((1, 1, 1, 0)) &= \underline{0} \end{aligned}$$

3. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned} T((1, 2, 0, 0)) &= (1, 2, 1, 1) \\ T((1, 4, 1, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\ T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\ \dim \ker T &= 1 \end{aligned}$$

4. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned} T((1, 2, 0, 0)) &= (1, 2, 1, 1) \\ T((1, 4, 1, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\ T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\ \dim \ker T &= 2 \end{aligned}$$

5. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned}T((1, 2, 0, 0)) &= (1, 2, 1, 1) \\T((1, 4, 1, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\ \dim \ker T &= 3\end{aligned}$$

6. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned}(1, 2, 0, 0) &\in \operatorname{Im} T \\T((1, 4, 1, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 0, 0, 1) \\ \dim \ker T &= 3\end{aligned}$$

7. Determinare, se esiste, un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned}(1, 2, 0, 0) &\in \operatorname{Im} T \\T((1, 4, 1, 0)) &= T(1, 0, 0, 1) \\T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 1, 1, 1) \\T((2, 3, 2, 0)) &= T(1, 0, 0, 1) \\ \dim \ker T &= 2\end{aligned}$$

Esercizio 18.38. [IIG66] Come nell'esercizio 18.37, ma determinare tutti i morfismi che soddisfano le condizioni date.

Cercate nei compiti di esame gli esercizi svolti sui morfismi.

Capitolo 19

Diciannovesima Lezione - Cambi di base e basi ortogonali

L'isomorfismo T tra morfismi e matrici introdotto nella Proposizione 17.34 precedente trasforma la composizione in prodotto di matrici

Proposizione 19.1. [JJJ08] *Se $L_A: V \rightarrow W$, $L_B: W \rightarrow U$ sono morfismi di $\mathbb{K}$ -spazi (ed abbiamo visto che tutti i morfismi di $\mathbb{K}$ -spazi si possono esprimere attraverso le matrici associate quando le basi di V, W, U sono finite). Allora*

$$L_B \circ L_A: \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & U \\ \underline{v} & \mapsto & L_B(L_A(\underline{v})) \end{array} \equiv L_{B \cdot A}: \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & U \\ \underline{v} & \mapsto & (B \cdot A) \cdot \underline{v} \end{array}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \underline{v} \in V \quad L_A \circ L_B(\underline{v}) = L_{A \cdot B}(\underline{v})$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} L_A \circ L_B(\underline{v}) &= L_A(L_B(\underline{v})) \\ &= L_A(B \cdot \underline{v}) \\ &= A \cdot (B \cdot \underline{v}) \\ &\text{proprietà associativa} \\ &= (A \cdot B) \cdot \underline{v} \\ &= L_{A \cdot B} \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

□

19.1 Cambio di base per vettori

Definizione 19.2. [JJJ60] *Sia V $\mathbb{K}$ -spazio, con $\dim(V) = n$ e*

$$\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n, \quad \mathcal{B}' = v'_1, \dots, v'_n \text{ basi di } V$$

Se $\underline{w}_{\mathcal{B}}$ e $\underline{w}_{\mathcal{B}'}$ sono le rappresentazioni del vettore $\underline{w}$ in base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente (le coordinate del vettore rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$),

Il morfismo

$$\begin{aligned} T: \mathbb{K}^n, \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{K}^n, \mathcal{B}' \\ \underline{v}_{\mathcal{B}} &\mapsto \underline{v}_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

è il cambio di base da dalle coordinate $\mathcal{B}$ alle coordinate $\mathcal{B}'$, (da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in breve) La matrice associata a T secondo le regole viste precedentemente ha le colonne date dalla trasformazione dei vettori di una base di $\mathbb{K}^n$, scegliamo la base $\mathcal{B}$, e quindi la matrice è

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ (\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} & \cdots & (\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{ed abbiamo} \quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \underline{v}_{\mathcal{B}} = \underline{v}_{\mathcal{B}'}$$

Diciamo che $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ è la matrice di cambio di base dalle coordinate $\mathcal{B}$ alle coordinate $\mathcal{B}'$ (da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in breve). Il morfismo T si indica come $L_{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$. Dato che $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono basi, $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ è non singolare e $L_{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$ è un isomorfismo.

Osservazione 19.3. [JJJ62] È immediato che

$$L_{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}} \circ L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} = \text{id} = L_{I_n} \quad \text{e quindi} \quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_n$$

Nel linguaggio delle applicazioni lineari, l'applicazione $L_{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$ cambia le coordinate dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$, ed è associata alla matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}'$ espressi in base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}: (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) &\rightarrow (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}') \\ v &\mapsto L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}(v) \end{aligned}$$

Esempio 19.4. [JJJ63] Data la base $\mathcal{B} = \underline{v}_1 = (1, 1), \underline{v}_2 = (0, 1)$ di $\mathbb{R}^2$ ed i vettori

$$\underline{v} = (3, 5)_{E_2} = 3\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2 \quad \text{e} \quad \underline{w} = (2, 7)_{\mathcal{B}} = 3\underline{w}_1 + 5\underline{w}_2$$

voglio determinare $M_{E_2}^{\mathcal{B}}, M_{\mathcal{B}}^{E_2}, \underline{v}_{\mathcal{B}}, \underline{w}_{E_2}$.

Soluzione. La matrice $M_{E_2}^{\mathcal{B}}$ ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ espressi in coordinate E_2 , quindi

$$M_{E_2}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\underline{w}_{E_2} = M_{E_2}^{\mathcal{B}} \underline{w}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}_{E_2}$$

Abbiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{E_2} = (M_{E_2}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{E_2} \underline{v}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{E_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Notiamo che

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{v}_1 \\ \underline{e}_2 = \underline{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ \underline{e}_2 = \underline{v}_2 \end{cases}$$

da cui potremmo ricavare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{E_2}$ senza invertire esplicitamente $M_{E_2}^{\mathcal{B}}$. Ma in effetti, se consideriamo il sistema

$$\begin{cases} e_1 + e_2 = v_1 \\ e_2 = v_2 \end{cases}$$

nella sua forma matriciale, con incognite $\underline{e}$ e parametri $\underline{v}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Esempio 19.5. [JJJ41] *Date le due basi E_2 e $B = \underline{v}_1 = (1, 0), \underline{v}_2 = (1, 1)$ di $\mathbb{R}^2$ l'applicazione*

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{v}_E &\mapsto \underline{v}_B \end{aligned}$$

che trasforma un vettore $\underline{v}$ espresso in coordinate E_2 nel vettore $\underline{v}$ espresso in coordinate B (se preferite, le coordinate del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base E nelle coordinate del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base B) è come visto prima un isomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi. Dalla definizione di B abbiamo che

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = -v_1 + v_2 \end{cases}$$

Quindi $(1, 0)_E = (1, 0)_B$ e $(0, 1)_E = (-1, 1)_B$. Se vogliamo scrivere il vettore $(1, 2)_E$ in coordinate B abbiamo

$$(1, 2)_E = e_1 + 2e_2 = v_1 + 2(-v_1 + v_2) = -v_1 + 2v_2 = (-1, 2)_B$$

$$F((1, 2)) = (-1, 2)$$

In generale, abbiamo che T è definita come

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_1 &\mapsto (1, 0) \\ e_2 &\mapsto (-1, 1) \end{aligned}$$

e quindi la sua formula è

$$T((x, y)) = T(xe_1 + ye_2) = xT(e_1) + yT(e_2) = x(1, 0)_B + y(-1, 1)_B = (x - y, y)_B = (x - y, y)$$

19.2 Cambio di base per morfismi

Osservazione 19.6. [JJJ61] *Siano*

$$\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \text{ base di } \mathbb{K}^n, \quad \mathcal{B}' = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \text{ base di } \mathbb{K}^m$$

$$\begin{aligned} T: (\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) &\rightarrow (\mathbb{K}^m, \mathcal{B}') \\ \underline{v}_{\mathcal{B}} &\mapsto (T(\underline{v}_{\mathcal{B}}))_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi che trasforma un vettore di $\mathbb{K}^n$ espresso in coordinate $\mathcal{B}$ in un vettore di $\mathbb{K}^m$ espresso in coordinate $\mathcal{B}'$.

1. Come nella lezione scorsa, indichiamo la matrice associata a T dalle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ come

$$(M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ T(\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} & \cdots & T(\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $T(\underline{v}_i)$ in base $\mathcal{B}'$. Omettiamo il riferimento alla base in cui sono espressi i vettori $\underline{v}_i$ nella matrice perché irrilevante, le colonne dipendono dall'immagine dei vettori in base $\mathcal{B}'$, non dalla base in cui sono espressi i vettori. La dipendenza da $\mathcal{B}$ è data dalla scelta dei vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

2. Abbiamo

$$(M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

3. Avendo le basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ di $\mathbb{K}^m$ la matrice associata al morfismo varia secondo la formula

$$(M_T)_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Esempio 19.7. [JJJ73] Dato il morfismo di $\mathbb{R}$ -spazi

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (1, 2, 3) &\mapsto (1, 1, 0, 1) \\ (1, 1, 1) &\mapsto (3, 0, 0, 1) \\ (0, 0, 1) &\mapsto (1, 2, 0, 0) \end{aligned}$$

e sapendo che $\mathcal{B} = (1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 0, 1)$ è base di $\mathbb{R}^3$, come è facile verificare, voglio determinare le matrici $(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}}$ e $(M_F)_{E_4}^{E_3}$.

Soluzione: La prima matrice è immediata: le sue colonne sono i vettori immagine dei vettori di $\mathcal{B}$ in base E_4 , che abbiamo:

$$(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare $(M_F)_{E_4}^{E_3}$ da $(M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}}$ usiamo la formula

$$\begin{aligned} (M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{E_3} &= (M_F)_{E_4}^{E_3} \\ (M_F)_{E_4}^{\mathcal{B}} \cdot (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^{-1} &= (M_F)_{E_4}^{E_3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= (M_F)_{E_4}^{E_3} \\ \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= (M_F)_{E_4}^{E_3} \end{aligned}$$

□

Richiamo 19.8. [LLZ08] Ricordiamo che le coordinate in base B dei vettori di una base B di $\mathbb{K}^n$ sono i vettori canonici e quindi

$$M_B^B = I_n$$

19.3 Ortogonalità e Ortonormalità

Definizione 19.9. [NNN14] Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$. Allora diciamo che un vettore $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ è normale se e solo se la sua norma o modulo è uguale ad 1, ovvero

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1$$

Definizione 19.10. [NNQ13] Due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$ si dicono ortogonali se $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ e si scrive $\underline{v} \perp \underline{w}$.

Definizione 19.11. [NNN15] Sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$. La base $\mathcal{B}$ si dice

- ortogonale se $\underline{v}_i \perp \underline{v}_j \Leftrightarrow i \neq j$
- ortonormale se i suoi vettori sono anche tutti normali.

Osservazione 19.12. [NNY15] La norma gode di una proprietà simile all'omogeneità, ovvero $\forall \underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$|\lambda \underline{v}| = |(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)| = \sqrt{(\lambda^2 v_1^2 + \dots + \lambda^2 v_n^2)} = \sqrt{\lambda^2 (v_1^2 + \dots + v_n^2)} = |\lambda| \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = |\lambda| |\underline{v}|$$

Esempio 19.13. [NNN61]

1. Le basi E_n sono tutte ortonormali.
2. La base $B = (1, 1), (1, 0)$ non è né ortogonale né normale.
3. La base $B = (2, 0), (0, 2)$ è ortogonale ma non normale.
4. La base $B = (2, 1), (5, -10)$ è ortogonale ma non normale.
5. La base $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0, 1)$ è normale ma non ortogonale.
6. La base $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è ortonormale.

19.4 Algoritmo di Graham-Schmidt

Dato che le basi ortonormali godono di proprietà particolarmente piacevoli, vogliamo usarle il più possibile. Sorge il problema: se ho una base di uno sottospazio $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, come faccio a trovare una base ortonormale di V ? Per i $\mathbb{R}^n$ il problema è banale, per loro sottospazi meno.

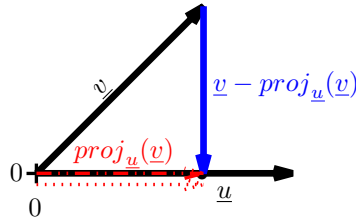
Definizione 19.14. [NNE01] Siano $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\underline{u} \neq \underline{0}$. Allora il vettore

$$\frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{\underline{u} \cdot \underline{u}} \cdot \underline{u} = \text{proj}_{\underline{u}}(\underline{v})$$

si dice proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{u}$.

Se $\underline{u} = \underline{0}$, definiamo $\text{proj}_{\underline{u}}(\underline{v}) = \underline{0}$.

GNU101:

**Osservazione 19.15.** [NNE03]

1. Il vettore $\text{proj}_{\underline{u}}(\underline{v})$ è banalmente un multiplo di $\underline{u}$, con fattore moltiplicativo $\lambda = \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{\underline{u} \cdot \underline{u}}$.
2. $\underline{v} - \text{proj}_{\underline{u}}(\underline{v})$ è ortogonale a $\underline{u}$, dato che

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} - \text{proj}_{\underline{u}}(\underline{v})) = \underline{u} \cdot \left(\underline{v} - \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{\underline{u} \cdot \underline{u}} \underline{u} \right) = \left(\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{\underline{u} \cdot \underline{u}} \underline{u} \cdot \underline{u} \right) = \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{0}$$

Osservazione 19.16. [NNE07] Banalmente, se $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ abbiamo che $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ è normale.**Osservazione 19.17.** [NNE08] Ricordiamo che dato $\underline{v} \in V$, $\mathbb{R}$ -spazio, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$.**Lemma 19.18.** [NNE04] Sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ a due a due ortogonali. Allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.*Dimostrazione.* Dobbiamo provare che $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$. Proviamo innanzitutto che $\alpha_1 = 0$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} &\Rightarrow \underline{v}_1(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k) = \underline{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_k = \underline{0} \\ &\quad \text{dato che i vettori sono a due a due ortogonali} \\ &\Rightarrow \alpha_1 (\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1) = \underline{0} \\ &\quad \text{e dato che } \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 \neq 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

Possiamo ripetere il ragionamento per $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$, ed abbiamo la tesi. □*N.B. Rifare la dimostrazione usando l'induzione.*

Abbiamo il seguente procedimento di ortonormalizzazione di Graham-Schmidt:

Teorema 19.19. *Graham-Schmidt* [NNE02] Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ vettori linearmente indipendenti. Definiamo i vettori

$$\begin{aligned}\underline{w}_1 &= \underline{v}_1 \\ \underline{w}_2 &= \underline{v}_2 - \text{proj}_{\underline{w}_1}(\underline{v}_2) \\ \underline{w}_3 &= \underline{v}_3 - \text{proj}_{\underline{w}_1}(\underline{v}_3) - \text{proj}_{\underline{w}_2}(\underline{v}_3) \\ \underline{w}_4 &= \underline{v}_4 - \text{proj}_{\underline{w}_1}(\underline{v}_4) - \text{proj}_{\underline{w}_2}(\underline{v}_4) - \text{proj}_{\underline{w}_3}(\underline{v}_4) \\ &\vdots \\ \underline{w}_i &= \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{\underline{w}_j}(\underline{v}_i) \\ &\vdots \\ \underline{w}_n &= \underline{v}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \text{proj}_{\underline{w}_j}(\underline{v}_n)\end{aligned}$$

Allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in V$ sono a due a due ortogonali e $\text{Span}(\underline{w}) = \text{Span}(\underline{v})$.

Dimostrazione. Si dimostra facilmente per induzione su n , il numero di vettori. Traccia della dimostrazione, completare per esercizio.

- Base $\underline{w}_1 \perp \underline{w}_2$ - conti.
- Passo induttivo: se $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-1}$ sono a due a due perpendicolari (Ipotesi induttiva), allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ sono a due a due perpendicolari, che è equivalente, con l'ipotesi induttiva a $\underline{w}_1 \perp \underline{w}_n, \dots, \underline{w}_{n-1} \perp \underline{w}_n$.

□

N.B. Questo algoritmo si chiama anche procedimento di Graham-Schmidt.

Corollario 19.20. [NNE10] Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono una base di V ,

- $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ sono una base ortogonale di V .
- I vettori $\frac{\underline{w}_i}{|\underline{w}_i|}, \dots, \frac{\underline{w}_n}{|\underline{w}_n|}$ sono una base ortonormale di V .

Esempio 19.21. [NNE11] Dati i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 1, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$$

determiniamo una base ortonormale del sottospazio V da essi generato.

$$\underline{w}_1 = (1, 2, 1, 0)$$

$$\underline{w}_2 = (0, 1, 0, 1) - \frac{(0, 1, 0, 1) \cdot (1, 2, 1, 0)}{(1, 2, 1, 0) \cdot (1, 2, 1, 0)} \cdot (1, 2, 1, 0) = (0, 1, 0, 1) - \frac{1}{3} \cdot (1, 2, 1, 0) = \frac{1}{3} \cdot (-1, 1, -1, 3)$$

$$\begin{aligned}
\underline{w}_3 &= (0, 0, 1, 1) - \frac{(0, 0, 1, 1) \cdot (1, 2, 1, 1)}{(1, 2, 1, 0) \cdot (1, 2, 1, 0)} \cdot (1, 2, 1, 0) - \frac{(0, 0, 1, 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1, 1, -1, 3)}{\frac{1}{3} \cdot (-1, 1, -1, 3) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1, 1, -1, 3)} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1, 1, -1, 3) \\
&= (0, 0, 1, 1) - \frac{1}{6} \cdot (1, 2, 1, 0) - \frac{1}{6} \cdot (-1, 1, -1, 3) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (0, -1, 2, 1)
\end{aligned}$$

Quindi una base ortogonale è

$$B = (1, 2, 1, 0), \quad \frac{1}{3} \cdot (-1, 1, -1, 3), \quad \frac{1}{2} \cdot (0, -1, 2, 1)$$

e per semplicità, dopo opportune moltiplicazioni, abbiamo la base ortogonale

$$B = (1, 2, 1, 0), \quad (-1, 1, -1, 3), \quad (0, -1, 2, 1)$$

Se dividiamo i tre vettori per le loro norme

$$|(1, 2, 1, 0)| = \sqrt{6} \quad |(-1, 1, -1, 3)| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad |(0, -1, 2, 1)| = \sqrt{6}$$

otteniamo la base ortonormale

$$B' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1, 2, 1, 0), \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (-1, 1, -1, 3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (0, -1, 2, 1)$$

Verificate per esercizio che i vettori di B' siano normali e a due a due ortogonali.

Esercizio 19.22 (PPP76). (Proposto) Posso, nella costruzione della base ortogonale mediante il procedimento di Gram-Schmidt, raccogliere via via degli scalari dai vettori che sto producendo (i w_i) per semplificare i calcoli?

Definizione-Proposizione 19.23. [NNZ13] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio e $W \underset{SSP}{\subseteq} V$. Allora

$$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \forall \underline{w} \in W \ \underline{v} \perp \underline{w}\} \underset{SSP}{\subseteq} V$$

Dimostrazione. $W^\perp \underset{SSP}{\subseteq} V$. Sia $\underline{w} \in W$. Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W^\perp$ e $a, b \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$(a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2) \cdot \underline{w} = a\underline{v}_1 \cdot \underline{w} + b\underline{v}_2 \cdot \underline{w} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 \in W^\perp$$

dato che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W^\perp \Leftrightarrow \underline{v}_1 \cdot \underline{w} = \underline{v}_2 \cdot \underline{w} = 0 \ \forall \underline{w} \in W$. □

Proposizione 19.24. [NNQ97] Sia $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con $B = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ base di W come $\mathbb{K}$ -spazio. Allora

$$\underline{v} \in W^\perp \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{w}_1, \dots, \underline{v} \perp \underline{w}_p$$

Dimostrazione. $\underline{v} \in W^\perp \Leftrightarrow \forall \underline{w} \in W \ \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \Leftrightarrow \forall \underline{\alpha} \in \mathbb{K}^p \ \underline{v} \cdot (\underline{\alpha} \cdot \underline{w}) = 0 \Leftrightarrow \forall i \ \underline{v} \cdot \underline{w}_i = 0$ □

Proposizione 19.25. [NNZ87] Sia $\mathbb{K}$ un sottocampo di $\mathbb{R}$ (per esempio $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$), V un $\mathbb{K}$ -spazio di dimensione n e $B = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ base di W come $\mathbb{K}$ -spazio. Allora abbiamo che

1. la somma di W , $W^\perp$ è diretta e

$$2. V = W \oplus W^\perp.$$

Dimostrazione.

1. Dimostriamo, equivalentemente, che $W \cap W^\perp = \{0\}$. Sia $\underline{v} \in W \cap W^\perp$ allora

$$\text{Se } \underline{v} \in W^\perp \text{ e } \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{v} \Rightarrow \underline{v} \cdot \underline{v} = 0$$

Quindi se $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i \ v_i = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \quad \text{se } \mathbb{K} \text{ è un sottocampo di } \mathbb{R}$$

2. Basta dimostrare che se $\dim W = p$ allora $\dim W^\perp = n - p$, dato che la somma è diretta avremmo che $\dim W + W^\perp = p + n - p = p = \dim V \Rightarrow V = W + W^\perp$. Per il teorema di Graham-Schmidt possiamo prendere $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ una base ortogonale di W . Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow V \\ \underline{v} &\mapsto (\underline{v} \cdot \underline{w}_1)\underline{w}_1 + \dots + (\underline{v} \cdot \underline{w}_p)\underline{w}_p \end{aligned}$$

È facile dimostrare che

- (a) T è un endomorfismo (lasciato per esercizio).
 (b) $\text{Im } T = W$. Infatti

$$T(\underline{w}_1), \dots, T(\underline{w}_p) = (\underline{w}_1 \cdot \underline{w}_1)\underline{w}_1, \dots, (\underline{w}_p \cdot \underline{w}_p)\underline{w}_p = |\underline{w}_1|^2 \underline{w}_1, \dots, |\underline{w}_p|^2 \underline{w}_p$$

genera $\text{Im } T$ dato che si tratta di multipli dei vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$, e l'indipendenza lineare discende dall'indipendenza lineare dei $\underline{w}$.

- (c) $\ker T = W^\perp$. Infatti

$$\begin{aligned} \underline{w} \in \ker T &\Leftrightarrow T(\underline{w}) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow (\underline{w} \cdot \underline{w}_1)\underline{w}_1 + \dots + (\underline{w} \cdot \underline{w}_p)\underline{w}_p = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow (\underline{w} \cdot \underline{w}_1) = (\underline{w} \cdot \underline{w}_p) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\underline{w} \perp \underline{w}_1), \dots, (\underline{w} \perp \underline{w}_p) \\ &\Leftrightarrow \underline{w} \in W^\perp \end{aligned}$$

Quindi per il teorema della dimensione $\dim W^\perp = n - p$.

□

Osservazione 19.26. [NNZ15] Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ non necessariamente abbiamo che la somma $W + W^\perp$ è diretta. Infatti se $W = \text{Span}((1, i)) \subseteq_{SSP} \mathbb{C}^2$, abbiamo che, ovviamente, $(1, i) \in W$ ma anche che

$$(1, i) \cdot (1, i) = 1 + i^2 = 0 \Rightarrow (1, i) \in W^\perp$$

quindi $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ la somma $W + W^\perp$ non è diretta.

Capitolo 20

Ventesima Lezione - Esercizi

20.1 Esercizi svolti

Esercizio 20.1. [JJ14] Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$\text{Im}(f) = \text{Span}((1, -1, 2)), \quad \ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$$

Si determini $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.

Soluzione: Per esercizio, scegliamo di determinare questa matrice direttamente, senza fare uso delle formule per il cambio di base. Determiniamo una base di $\ker(f)$: data la condizione

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_3$$

un vettore generico di $\ker(f)$ è

$$(-2x_2 + 3x_3, x_2, x_3) = x_2(-2, 1, 0) + x_3(3, 0, 1)$$

e una base quindi $\underline{v}_1 = (-2, 1, 0), \underline{v}_2 = (3, 0, 1)$. Dato che i vettori $\underline{e}_1, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, come si vede facilmente dal fatto che la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, e dato che sono tre, formano una base di $\mathbb{R}^3$. L'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \underline{e}_1 & \mapsto (1, -1, 2) \\ (-2, 1, 0) & \mapsto & \underline{0} \\ (3, 0, 1) & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

soddisfa quindi le condizioni poste. Determiniamo le immagini di $\underline{e}_2, \underline{e}_3$ da

$$\begin{cases} f(-2\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \underline{0} \\ f(3\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = \underline{0} \end{cases} \implies \begin{cases} f(\underline{e}_2) = 2f(\underline{e}_1) = (2, -2, 4) \\ f(\underline{e}_3) = -3f(\underline{e}_1) = (-3, 3, -6) \end{cases}$$

e quindi

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

□

Esempio 20.2. [JJJ64] Data la base $\mathcal{B} = (1, 1, 1), (0, 1, -2), (1, 2, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ ed i vettori

$$\underline{v} = (0, 1, 3)_{E_3} \quad e \quad \underline{w} = (1, 0, 2)_B$$

voglio determinare $M_{E_3}^{\mathcal{B}}, M_{\mathcal{B}}^{E_3}, \underline{v}_B, \underline{w}_{E_3}$.

Soluzione. La matrice $M_{E_3}^{\mathcal{B}}$ ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ espressi in coordinate E_3 , quindi

$$M_{E_3}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\underline{w}_{E_3} = M_{E_3}^{\mathcal{B}} \underline{w}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{E_3}$$

Abbiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{E_3} = (M_{E_3}^{\mathcal{B}})^{-1}$$

E quindi

```
MBE:=Mat([[1,0,1],
           [1,1,2],
           [1,-2,0]]);
```

```
MEB:=Inverse(MBE);
```

```
MEB;
```

```
Mat[[4, -2, -1],
     [2, -1, -1],
     [-3, 2, 1]];
```

$$\underline{v}_B = M_{\mathcal{B}}^{E_3} \cdot \underline{v}_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{E_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}_B$$

□

Esercizio 20.3. [LL91] Al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sia data una funzione con le seguenti caratteristiche

$$\begin{array}{lll} T : & \mathbb{Q}^3 & \longrightarrow \mathbb{Q}^3 \\ & \underline{v}_1 = (1, 2, 3) & \mapsto (1, 2, 0) \\ & \underline{v}_2 = (0, 1, 2) & \mapsto (1, 1, 0) \\ & \underline{v}_3 = (2, 1, 0) & \mapsto (a, b, c) \end{array}$$

1. Esistono a, b, c tali che T sia lineare?
2. Al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$ determinare tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni di cui sopra.
3. Al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$ determinare il rango di tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni di cui sopra.

Soluzione.

1. Esistono a, b, c tali che T sia lineare?

Dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ i tre vettori $(1, 2, 3), (0, 1, 2), (2, 1, 0)$ non sono linearmente indipendenti.

Cerchiamo una combinazione lineare dei primi due che mi dia il terzo, che deve esistere perché i primi due sono chiaramente linearmente indipendenti.

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(0, 1, 2) = (2, 1, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Quindi

$$(2, 1, 0) = 2(1, 2, 3) - 3(0, 1, 2)$$

Per avere la linearità dobbiamo imporre

$$\begin{aligned} T((2, 1, 0)) &= T(2(1, 2, 3) - 3(0, 1, 2)) \\ (a, b, c) &= 2T((1, 2, 3)) - 3T((0, 1, 2)) \\ (a, b, c) &= 2(1, 2, 0) - 3(1, 1, 0) \\ (a, b, c) &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

Quindi un'applicazione T che soddisfi le tre condizioni di cui sopra può essere lineare se e solo se $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$.

2. Determinare tutte le applicazioni lineari T che soddisfano le condizioni di cui sopra.

Dato che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti ma non formano una base di $\mathbb{Q}^3$, possiamo completarli a base con un vettore $\underline{v} = (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$. Imponiamo le condizioni su $\underline{v}$ perché $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}$ siano linearmente indipendenti, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \neq 0$$

$$x - 2y + z \neq 0$$

Quindi ogni vettore (x, y, z) che soddisfi la condizione $x - 2y + z \neq 0$ completa $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ a base di $\mathbb{Q}^3$. L'applicazione T , definita univocamente sulla base $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, (x, y, z)$ è associata mediante B, E_3 alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

dove $T(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ arbitrari.

3. Determinare il rango di tali applicazioni.

Basta calcolare il rango di una matrice associata all'applicazione mediante due basi. Dato che per costruzione conosciamo già $(M_T)_{E_3}^B$, calcoliamo il rango di quest'ultima, al variare di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \gamma(1-2) = -\gamma$$

Quindi

- Se $\gamma \neq 0$ il rango è 3 per ogni α, β .
- Se $\gamma = 0$ il determinante della matrice è nullo e la matrice diviene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che dato che la sottomatrice $A_{(1,2);(1,2)}$ è non singolare ha rango 2 per ogni α, β .

□

Esercizio 20.4. [LL87]

Determinare un'applicazione lineare di $\mathbb{C}$ spazi

$$\phi : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5$$

tale che

- $\phi((1, 2, 2, 0, 1)) = \phi((1, 3, -1, 2, 0)) = \phi((1, 0, 8, -4, 3)) = \underline{0}$.
- $\dim \operatorname{Im}(\phi) = 2$.
- $\dim(\operatorname{Im}(\phi) \cap \operatorname{Span}((1, 2, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0, 1))) = 1$.

Soluzione.

1. Vogliamo determinare innanzitutto una base di $\mathbb{C}^5$ che contenga, se possibile, i tre vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 2, 0, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, 3, -1, 2, 0), \quad \underline{v}_3 = (1, 0, 8, -4, 3)$$

Vediamo se questi sono linearmente indipendenti determinando il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con alcuni passi di Gauss

$$\begin{array}{l} 2^a \rightarrow 2^a - 1^a \\ 3^a \rightarrow 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Da questa riduzione è evidente che la terza riga è multipla della seconda, e quindi v_3 è combinazione lineare di v_1, v_2 . Questi ultimi due sono linearmente indipendenti, dato che ciascuno ha un pivot non nullo.

Una candidata base di $\mathbb{C}^5$ è pertanto $B = \underline{v}_1, v_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5$. Che B sia base è facile da vedere, dato che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è massimo, 5. Una applicazione candidata è

$$\begin{array}{rcl} \phi: \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & \mathbb{C}^5 \\ \underline{v}_1 & \mapsto & 0 \\ \underline{v}_2 & \mapsto & 0 \\ \underline{e}_3 & \mapsto & 0 \\ \underline{e}_4 & \mapsto & \underline{w} = (1, 2, 0, 1, 0) \\ \underline{e}_5 & \mapsto & \underline{e}_1 \end{array}$$

Abbiamo che $\phi(\underline{v}_1) = \phi(\underline{v}_2) = 0$ e dato che $\underline{v}_3$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, v_2$, si ha $\phi(\underline{v}_3) = \underline{0}$.

Dato che $\underline{w}, \underline{e}_1$ sono linearmente indipendenti,

$$\text{Im}(\phi) = \text{Span}(\underline{w}, \underline{e}_1) \Rightarrow \dim \text{Im}(\phi) = 2$$

Sia $W = \text{Span}((1, 2, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0, 1))$.

Dato che $\underline{w} \in \text{Im}(\phi)$ e $\underline{w} \in W$, abbiamo che $\dim(\text{Im}(\phi) \cap W) \geq 1$.

Se $\underline{e}_1 \notin W$ e quindi $\text{Im}(\phi) \neq W$ abbiamo che $\dim(\text{Im}(\phi) \cap W) < 2$. Da questi due fatti si ha che

$$\dim(\text{Im}(\phi) \cap W) = 1$$

verifichiamo che $\underline{e}_1 \notin W$ verificando che il sistema

$$x(1, 2, 0, 1, 0) + y(2, 1, 1, 0, 1) = (x + 2y, 2x + y, y, x, y) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

è impossibile, immediato dato che abbiamo $x = y = 0$ e $x + 2y = 1$.

L'applicazione candidata soddisfa quindi le condizioni.

□

Esercizio 20.5. [UI20] Sia $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ un morfismo di $\mathbb{R}$ -spazi tale che

$$\begin{aligned} T(\underline{e}_1) - T(\underline{e}_2) &= -x^3 + ix + i \\ 2T(\underline{e}_1) + T(\underline{e}_2) &= x^3 + 3x^2 + 2ix - i \\ \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T &= 2 \end{aligned}$$

1. Determinare $(M_T)_{B'}^B$, dove B, B' sono basi a piacere

2. È vero che $\text{Im } T \oplus_{\mathbb{R}} \text{Span}(1, x, x^2, x^3, i, ix) = \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$?

Soluzione. Risolviamo il sistema lineare a variabili $T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2)$

$$\begin{cases} T(\underline{e}_1) - T(\underline{e}_2) &= -x^3 + ix + i \\ 2T(\underline{e}_1) + T(\underline{e}_2) &= x^3 + 3x^2 + 2ix - i \end{cases}$$

e troviamo

$$T(\underline{e}_1) = x^2 + ix \quad \text{e} \quad T(\underline{e}_2) = x^3 + x^2 - i$$

È immediato che questi due vettori sono indipendenti nell' $\mathbb{R}$ -spazio $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$. Dato che $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 2$, possiamo assegnare $T(\underline{e}_3) = T(\underline{e}_4) = \underline{0}$ e il nostro morfismo candidato è

$$\begin{array}{rcl} T: \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \\ \underline{e}_1 & \mapsto & x^2 + ix \\ \underline{e}_2 & \mapsto & x^3 + x^2 - i \\ \underline{e}_3 & \mapsto & \underline{0} \\ \underline{e}_4 & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

- Prendiamo come base $B = E_4$ e come base $B' = (1, x, x^2, x^3, i, ix, ix^2, ix^3)$ (ricordiamo che $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ viene visto come $\mathbb{R}$ -spazio). Allora

$$(M_T)_{B'}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dato che $T(\underline{e}_2) = x^3 + x^2 - i \in \text{Span}(1, x, x^2, x^3, i, ix)$, abbiamo che

$$\text{Im } T \cap \text{Span}(1, x, x^2, x^3, i, ix) \neq \{0\}$$

e quindi la somma $\text{Im } T +_{\mathbb{R}} \text{Span}(1, x, x^2, x^3, i, ix)$ non è diretta.

□

Esercizio 20.6. [UI10] *Al variare di $\underline{v} \in \mathbb{Q}^4$ sia $T: \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{Q}^4$ un'applicazione lineare tale che*

$$T(2x - 1) = T(x^2), \quad T(x + 1) = 2T(x^2), \quad T(x^2 - 2x) = \underline{v}$$

- *T è iniettiva, surgettiva?*
- *Determinare il rango di T .*
- *Scegliere due basi B, B' di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ e $\mathbb{Q}^4$ rispettivamente e determinare $(M_T)_{B'}^B$.*

Soluzione. I vettori $1, x, x^2$ formano una base di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$. Determiniamo le loro immagini mediante T risolvendo il sistema di equazioni lineari rispetto alle variabili $T(1), T(x), T(x^2)$

$$\begin{cases} T(2x - 1) = T(x^2) \\ T(x + 1) = 2T(x^2) \\ T(x^2 - 2x) = \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} 2T(x) - T(1) = T(x^2) \\ T(x) + T(1) = 2T(x^2) \\ T(x^2) - 2T(x) = \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} 2T(x) - T(1) = 2T(x) + \underline{v} \\ T(x) + T(1) = 4T(x) + 2\underline{v} \\ T(x^2) = 2T(x) + \underline{v} \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} T(1) = -\underline{v} \\ -3T(x) = 3\underline{v} \\ T(x^2) = 2T(x) + \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} T(1) = -\underline{v} \\ T(x) = -\underline{v} \\ T(x^2) = 2T(x) + \underline{v} \end{cases} \implies \begin{cases} T(1) = -\underline{v} \\ T(x) = -\underline{v} \\ T(x^2) = -\underline{v} \end{cases}$$

Dividiamo i due casi $\underline{v} = \underline{0}$ e $\underline{v} \neq \underline{0}$

- $\underline{v} = \underline{0}$. Allora T è l'applicazione nulla, non è iniettiva o surgettiva, ha rango 0 e per ogni due basi B, B' di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}, \mathbb{Q}^4$ rispettivamente $(M_T)_{B'}^B = 0$
- $\underline{v} \neq \underline{0}$. Allora, dato che $\text{Im}(T) = \text{Span}(\underline{v})$, abbiamo che $\text{rk } T = 1$, e T non è iniettiva o surgettiva. Se scegliamo

$$B = 1, x, x^2 \quad B' = \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$$

dove $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono un completamento di $\underline{v}$ a base di $\mathbb{Q}^4$ (esistono per il teorema del completamento), abbiamo che

$$(M_T)_{B'}^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 20.7. [ES2122B] Data la funzione

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (xyz) &\mapsto (x + y - 2zx - 2y + z, -2x + y + z) \end{aligned}$$

1. Dimostrare che f è lineare e determinare $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.
2. Dire se f è iniettiva o surgettiva.
3. Determinare basi di $\ker f$ e $\text{Im } f$
4. Data la base $\mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$, determinare $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$.
5. Stabilire per quali di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (1, k + 1, k^2 - 2)$ appartiene ad $\text{Im } f$.

Soluzione.

1. Dato che le componenti del vettore immagine $(x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z)$ sono polinomi omogenei di grado 1, f è lineare. Abbiamo

$$f(\underline{e}_1) = (1, 1, -2), \quad f(\underline{e}_2) = (1, -2, 1), \quad f(\underline{e}_3) = (-2, 1, 1),$$

e quindi

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo il determinante di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi f non è iniettiva, quindi $\dim \ker f \geq 1$. Per il teorema della dimensione, $\dim \text{Im } f = 3 - \dim \ker f$ e dato che $\dim \ker f \geq 1$ abbiamo $\dim \text{Im } f \leq 2$, quindi f non è surgettiva.

3. Per determinare $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z)) = \underline{0}\}$ risolviamo il sistema

$$f(xyz) = \underline{0} \Leftrightarrow (x + y - 2z = 0, x - 2y + z = 0, -2x + y + z = 0)$$

```

M:=Mat[[1, 1, -2],
        [1, -2, 1],
        [-2, 1, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2]
          2^a-1*1^a [0, -3, 3]
          3^a+2*1^a [0, 3, -3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2]
----- [0, -3, 3]
          3^a+1*2^a [0, 0, 0]
Mettiamo la matrice in forma standard
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, -2]
          2^a*-1/3 [0, 1, -1]
----- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
          1^a-1*2^a [1, 0, -1]
----- [0, 1, -1]
----- [0, 0, 0]

```

Abbiamo quindi le relazioni

$$x = z, \quad y = z$$

Imponendo queste relazioni sul vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ otteniamo un vettore generico delle soluzioni $(\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1, 1, 1)$. Quindi $(1, 1, 1)$ è una base di $\ker f$.

Sappiamo che $\operatorname{Im} f$ è generato dalle colonne di

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Guardando le colonne della riduzione in forma triangolare superiore di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che solo le prime due colonne hanno un pivot, e quindi solo le due prime colonne della matrice $(M_f)_{E_3}^{E_3}$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\operatorname{Im} f$ è quindi $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$.

4. Abbiamo $\mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned}(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}} &= (M_f)_{E_3}^{E_3} \cdot M_{E_3}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notiamo che per le proprietà del prodotto di matrici per avere $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$ basta scambiare opportunamente le colonne di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.

5. Dato che una base di $\text{Im } f$ è data da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$, per trovare i k per cui $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2) \in \text{Im } f$ basta trovare i k per cui $\underline{v}$ è linearmente dipendente da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$. Mettiamo questi tre vettori per riga in una matrice, $\underline{v}$ come ultima riga, riduciamo con Gauss e vediamo per quali k l'ultima riga della riduzione è nulla

```
Use R:=Q[k];
M:=Mat([[1,-2,1],
        [1,1,-2],
        [1,k+1,k^2-2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -2, 1]
      2^a-1*1^a [0, 3, -3]
      3^a-1*1^a [0, k + 3, k^2 - 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -2, 1]
----- [0, 3, -3]
3^a-1/3k - 1*2^a [0, 0, k^2 + k]
```

Perché la terza riga sia nulla è necessario e sufficiente avere $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k \in \{0, -1\}$, quindi $\underline{v} \in \text{Im } f$ se e solo se $k \in \{0, -1\}$.

□

Esercizio 20.8. [ES2122A]

1. Dimostrare che esiste un $\mathbb{K}$ -endomorfismo T che soddisfa le condizioni

$$\begin{array}{lll} T: & \mathbb{K}^4 & \rightarrow \mathbb{K}^4 \\ \underline{v}_1 = (1, 2, 3, 1) & \mapsto & (2, 4, 4, 4) \\ \underline{v}_2 = (1, 1, 1, 1) & \mapsto & (3, 6, 6, 6) \\ \underline{v}_3 = (1, 2, 2, 2) & \mapsto & (1, 2, 3, 3) \\ \underline{v}_4 = (1, 2, 3, 3) & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

2. Determinare $(T \circ T)((1, 2, 3, 1)), (T \circ T \circ T)((1, 2, 3, 1))$.

3. Determinare una base di $\text{Im } T$.

4. Scegliere una **opportuna** base B di $\mathbb{K}^4$ e determinare $(M_T)_B^B$.

5. Determinare $\left((M_T)_B^B\right)^3$.

Soluzione.

1. Dimostrare che esiste un $\mathbb{K}$ endomorfismo T che soddisfa le condizioni. Si vede facilmente che la matrice che ha i quattro vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ come righe è non singolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
M:=Mat([[1,1,1,1],
        [1,2,3,1],
        [1,2,2,2],
        [1,2,3,3]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 1, 2, 0]
      3^a-1*1^a [0, 1, 1, 1]
      4^a-1*1^a [0, 1, 2, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1]
----- [0, 1, 2, 0]
      3^a-1*2^a [0, 0, -1, 1]
      4^a-1*2^a [0, 0, 0, 2]
```

E quindi il determinante è -2 , i quattro vettori formano una base di $\mathbb{K}^4$ e quindi, per la Proposizione 17.30, esiste unico un endomorfismo T che soddisfa le condizioni.

2. Determinare $(T \circ T)((1, 2, 3, 1)), (T \circ T \circ T)((1, 2, 3, 1))$.

Ricordiamo la definizione di T

$$\begin{array}{lll} T: & \mathbb{K}^4 & \rightarrow \mathbb{K}^4 \\ & \underline{v}_1 = (1, 2, 3, 1) & \mapsto (2, 4, 4, 4) \\ & \underline{v}_2 = (1, 1, 1, 1) & \mapsto (3, 6, 6, 6) \\ & \underline{v}_3 = (1, 2, 2, 2) & \mapsto (1, 2, 3, 3) \\ & \underline{v}_4 = (1, 2, 3, 3) & \mapsto \underline{0} \end{array}$$

e quindi

$$T(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_3, \quad T(\underline{v}_2) = 3\underline{v}_3, \quad T(\underline{v}_3) = \underline{v}_4, \quad T(\underline{v}_4) = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} (T \circ T)((\underline{v}_1)) &= T^2(\underline{v}_1) = T(T(\underline{v}_1)) = T(2\underline{v}_3) = 2T(\underline{v}_3) = 2\underline{v}_4 \\ (T \circ T \circ T)(\underline{v}_1) &= T(T^2(\underline{v}_1)) = T(2\underline{v}_4) = \underline{0} \end{aligned}$$

3. Per il punto precedente, abbiamo che $\text{Im } T = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_4)$. Dato che $\underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono parte di una base di $\mathbb{R}^4$, sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\text{Im } T$.
4. Scegliamo come base di $\mathbb{R}^4$ $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$. Abbiamo quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \left((M_T)_B^B\right)^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Esercizio 20.9. [FF08] Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{K}^3$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$$\begin{array}{lll} T: & \mathbb{K}^3 & \rightarrow \mathbb{K}^3 \\ & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ & a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2 & \mapsto a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2 \\ & a\underline{v}_3 & \mapsto \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \end{array}$$

Tra gli a per cui l'endomorfismo sia completamente determinato, determinare gli a per cui T sia isomorfismo.

Soluzione. perché l'endomorfismo sia completamente determinato bisogna che i tre vettori $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2, a\underline{v}_3$ formino una base di $\mathbb{K}^3$, ovvero che (esprimendoli nelle coordinate della base $B_1 = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$) si abbia, mettendo tali vettori per riga

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \neq 0$$

Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a(a^2 + a) = a^2(a + 1)$$

l'endomorfismo è completamente determinato se e solo se $a \neq 0, -1$. Supporremo d'ora in poi che $a \neq 0, -1$.

L'endomorfismo T è un isomorfismo se la dimensione dell'immagine è massima, ovvero 3, ovvero se i tre vettori (in coordinate B_1) $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, a\underline{v}_1 + a^2\underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti ovvero quando, mettendo tali vettori per riga,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 + a = a(a+1)$$

nelle nostre ipotesi l'endomorfismo è un isomorfismo per ogni valore di $a \neq 0, -1$

Riassumendo, T è ben definito e isomorfismo se $a \neq 0, -1$.

□

Esempio 20.10. [HHA10] Sia $V = \{(a+b, b+c, a-c, a) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$ un sottospazio di $\mathbb{K}^4$. Questa è una descrizione parametrica di V . Il vettore generico di V è

$$(a+b, b+c, a-c, a)$$

Ogni vettore di V si può scrivere in questa forma per opportuni a, b, c , quindi un sistema di generatori di V è immediato:

$$(a+b, b+c, a-c, a) = a(1, 0, 1, 1) + b(1, 1, 0, 0) + c(0, 1, -1, 0)$$

Dato che ogni vettore di V si può scrivere in questa forma per opportuni a, b, c , i tre vettori

$$(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0)$$

generano V e $V = \text{Span}((1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0))$.

Per determinare una base di V dobbiamo estrarre dai suoi generatori un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti. Procediamo mediante il metodo del rango. Calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si vede facilmente che la sottomatrice

$$A_{(1,2,3),(1,2,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, quindi $\text{rk}(A) = 3$, quindi le tre righe di A sono linearmente indipendenti e quindi

$$(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0)$$

formano una base di V

Può capitare che dal vettore generico non si trovi immediatamente la base:

Esempio 20.11. [HHA12] Sia $V = \{(a+b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{K}\}$ un sottospazio di $\mathbb{K}^2$ in forma parametrica. Il vettore generico di V è

$$(a+b, a+b)$$

Vogliamo una base di V . Abbiamo che

$$(a+b, a+b) = a(1, 1) + b(1, 1)$$

I due vettori

$$(1, 1), (1, 1)$$

generano V ma non sono linearmente indipendenti e quindi non formano una base di

$$V = \text{Span}((1, 1), (1, 1))$$

Una base di V è data da $(1, 1)$

Esempio 20.12. [HHA17] Sia

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y - z = 0\} = \text{Sol} \left((1, -1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0} \right) \\ = \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$$

una descrizione cartesiana di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^4$. Vogliamo determinare una base di V . Notiamo che il sistema di equazioni che definisce V ci dà le relazioni tra le componenti del vettore generico.

Innanzitutto, che $V \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$ è immediato dato che $V = \text{Sol}(Ax = \underline{0})$. Per trovare il vettore generico di V , da cui ricaveremo una base, troviamo la soluzione generica di $\text{Sol}(Ax = \underline{0})$.

Un vettore generico di $\mathbb{K}^4$ è (x, y, z, t) . Per determinare un vettore generico di V imponiamo a (x, y, z, t) la condizione di appartenenza a V ,

$$x - y - z = 0 \Leftrightarrow x = y + z$$

ottenendo

$$(y + z, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

un vettore generico di V . Possiamo quindi scrivere V in forma parametrica

$$V = \{(y + z, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{K}\} = \{(a + b, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

Volendo una base, 3 vettori

$$(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$$

generano quindi V e dato che la matrice che li ha per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, come si vede immediatamente, questi tre vettori formano una base di V .

Esempio 20.13. [HHA33] La forma cartesiana può essere utile :

1. Dato $W = \text{Span}((2, 0, 2), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$

notiamo che tutti i generatori di W hanno la seconda componente nulla. Quindi tutti i vettori di W devono avere la stessa proprietà e

$$W \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} = V$$

e dato che $\dim V = 2$ (base $\underline{e}_1, \underline{e}_3$) abbiamo che $\dim W \leq 2$. Dato che i primi due generatori di V sono indipendenti, $\dim V \geq 2$. Quindi $\dim W = 2$ ed una base è data dai primi due generatori.

2. Dato $W = \text{Span}((1, 2, 0, 2), (2, 0, 0, 4), (3, 1, 0, 6))$

notiamo che tutti i generatori di W hanno la quarta componente uguale al doppio della prima e la terza componente nulla. Quindi tutti i vettori di W devono avere le stesse proprietà e

$$W \subseteq \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} z = 0 \\ t = 2x \end{cases} \right\} = V$$

e dato che $\dim V = 2$ ($\dim = \# \text{variabili} - \# \text{condizioni indipendenti} = 4 - 2 = 2$) abbiamo che $\dim W \leq 2$.

Esempio 20.14. [HHA14] Vogliamo passare il sottospazio

$$V = \{(a+b, b+c, a-c, a) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$$

dell'esercizio precedente in forma cartesiana. Vogliamo cioè trovare le relazioni tra le componenti del vettore generico di V . Assegniamo una variabile a ciascuna componente

$$x = a + b, \quad y = b + c, \quad z = a - c, \quad t = a$$

e troviamo le relazioni tra le variabili. Questo si ottiene risolvendo rispetto alle variabili a, b, c, d (e considerando x, y, z come parametri) il sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a - c = z \\ a = t \end{cases}$$

ovvero, scrivendo la matrice completa B , riducendo

```
Use R:=Q[x,y,z,t];
B:=Mat[[1, 1,0,x],
        [0, 1, 1,y],
        [1,0,-1,z],
        [1,0,0,t]];
L:=RiduciScalaVerbose(B);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, x]
    0 sotto pivot[0, 1, 1, y]
      3^a-1*1^a [0, -1, -1, -x + z]
      4^a-1*1^a [0, -1, 0, -x + t]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 0, x]
----- [0, 1, 1, y]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0, -x + y + z]
      4^a+1*2^a [0, 0, 1, -x + y + t]
```

È evidente da questa riduzione, senza bisogno di fare l'ultimo scambio di righe, che la relazione cercata tra i parametri x, y, z, t è data dalla terza riga

$$[0, 0, 0, -x + y + z]$$

che ci dice che $-x + y + z$ dà 0, ovvero che la somma dell'opposto della prima componente e della seconda e terza deve fare zero perché il vettore appartenga a V . Dato che questa è l'unica riga con zero le prime tre componenti, in una matrice ridotta, questa, $-x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = y + z$, è l'unica relazione tra le componenti. Quindi

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y - z = 0\}$$

Esempio 20.15. [LLZ01] Sia $B = \underline{v}_1 = (1, 3), \underline{v}_2 = (2, 4)$ base di $\mathbb{R}^2$, calcolare le coordinate in base B dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$.

Dimostrazione. In base B abbiamo $\underline{v}_1 = 1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 = (1, 0)_B$ e analogamente $\underline{v}_2 = (0, 1)_B$.

Per trovare le coordinate in base B dei vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ costruiamoci la matrice M_B^E . Abbiamo la matrice M_E^B , le cui colonne sono le coordinate in base E di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ rispettivamente. Sappiamo che

$$M_B^E = (M_E^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} (\underline{e}_1)_B &= M_B^E \cdot (\underline{e}_1)_E \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ &= -2\underline{v}_1 + 3/2\underline{v}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\underline{e}_2)_B &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{v}_1 - 1/2\underline{v}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2)_B &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 7/2 \end{pmatrix} \\ &= -4\underline{v}_1 + 7/2\underline{v}_2 \end{aligned}$$

□

Esempio 20.16. [LLZ02] Sia $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ una base di $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{lll} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 & \mapsto (0, 2, 3) \\ & \underline{v}_2 + \underline{v}_3 & \mapsto (0, 0, 1) \\ & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto (0, 2, 1) \end{array}$$

un morfismo dato per linearità.

1. Determinare dimensioni e basi di $\text{Im } T$ e $\ker T$.

2. Se $\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$, $\underline{v}_2 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$, $\underline{v}_3 = \underline{e}_1 - 3\underline{e}_3$

(a) Determinare $(M_T)_{E_3}^{E_3}$.

(b) Determinare $(M_T)_B^B$.

Dimostrazione. I tre vettori $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3$, $\underline{w}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$, $\underline{w}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti perché, se mettiamo le loro coordinate per riga in base B nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Un passo Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ non singolare}$$

Quindi $B' = \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato che si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 3. Scriviamo la matrice associata a T rispetto alle basi B', E_3 .

$$(M_T)_{E_3}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che non è specificato in quali coordinate vogliamo le basi, prenderemo quelle che ci verranno più comode.

1. Il rango della matrice $(M_T)_{E_3}^{B'}$ è 2, quindi $rk T = 2$. Per il teorema della dimensione,

$$\dim \ker T = 3 - rk T = 3 - 2 = 1$$

Una base di $\text{Im } T$ è data da due vettori linearmente indipendenti tra $(0, 2, 3)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 2, 1)$, quindi per esempio $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$, in coordinate E_3 . Per trovare una base di $\ker T$ in coordinate B' dobbiamo risolvere il sistema

$$(M_T)_{E_3}^{B'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \text{ ovvero } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Riduciamo con Gauss dopo aver riordinato le righe

```
M:=Mat([[2,0,2],
        [3,1,1],
        [0,0,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 0, 2]
      2^a-3/2*1^a [0, 1, -2]
      0 sotto pivot[0, 0, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 0, 2]
----- [0, 1, -2]
      0 sotto pivot[0, 0, 0]
```

Quindi le soluzioni sono $y = 2z$ e $x = -z$. Sostituiamole nel vettore generico di (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per avere il vettore generico $(-z, 2z, z)$ delle soluzioni. Una base delle soluzioni, vale a dire di $\ker T$, è quindi $(-1, 2, 1)_{B'}$.

2. Abbiamo $\underline{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\underline{v}_3 = (1, 0, -3)$ e quindi

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = (1, 1, 1) + (1, 0, 2) - (1, 0, -3) = (1, 1, 6)$$

$$\underline{w}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = (1, 0, 2) + (1, 0, -3) = (2, 0, -1)$$

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = (1, 1, 1) - (1, 0, 2) = (0, 1, -1)$$

(a) Vogliamo $(M_T)_{E_3}^{E_3}$. Dato che abbiamo $(M_T)_{E_3}^{B'}$ usiamo la formula

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = (M_T)_{E_3}^{B'} \cdot M_{B'}^{E_3}$$

ci serve $M_{B'}^{E_3} = \left(M_{E_3}^{B'}\right)^{-1}$. Abbiamo $M_{E_3}^{B'}$, le sue colonne sono i vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$. procediamo con il calcolo dell'inversa col metodo della aggiunta della matrice identica

```

B:=Mat([[1, 2, 0],
        [1, 0, 1],
        [6,-1,-1]]);
A:=Mat([[1, 2, 0, 1,0,0],
        [1, 0, 1, 0,1,0],
        [6,-1,-1, 0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
          2^a-1*1^a [0, -2, 1, -1, 1, 0]
          3^a-6*1^a [0, -13, -1, -6, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
----- [0, -2, 1, -1, 1, 0]
          3^a-13/2*2^a [0, 0, -15/2, 1/2, -13/2, 1]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
          2^a*-1/2 [0, 1, -1/2, 1/2, -1/2, 0]
          3^a*-2/15 [0, 0, 1, -1/15, 13/15, -2/15]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0, 0]
          2^a+1/2*3^a [0, 1, 0, 7/15, -1/15, -1/15]
----- [0, 0, 1, -1/15, 13/15, -2/15]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
          1^a-2*2^a [1, 0, 0, 1/15, 2/15, 2/15]
----- [0, 1, 0, 7/15, -1/15, -1/15]
----- [0, 0, 1, -1/15, 13/15, -2/15]

```

Quindi

$$\left(M_{E_3}^{B'}\right)^{-1} = M_{B'}^{E_3} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \\ -1 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

E

$$\begin{aligned}
(M_T)_{E_3}^{E_3} &= (M_T)_{E_3}^{B'} \cdot M_{B'}^{E_3} \\
&= (M_T)_{E_3}^{B'} \cdot (M_{E_3}^{B'})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \\ -1 & 13 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 28 & -2 \\ 9 & 18 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Il calcolo di $(M_T)_B^B$ è lasciato per esercizio.

□

20.2 Descrizioni cartesiane e parametriche

Possiamo utilizzare i morfismi di spazi vettoriali per dare una definizione più precisa delle descrizioni cartesiane e parametriche

Definizione 20.17. [JJJ51] *Dati U, W $\mathbb{K}$ -spazi diciamo che $F: U \rightarrow W$, morfismo di $\mathbb{K}$ spazi è una descrizione cartesiana di $V \underset{SSP}{\subseteq} U$ se*

$$V = \ker F = \{\underline{v} \in U \mid F(\underline{v}) = 0\}$$

Diciamo che U è lo spazio di partenza della descrizione e W è lo spazio di arrivo.

Detto più semplicemente, una descrizione cartesiana di uno spazio vettoriale V sono le condizioni che un vettore $\underline{v}$ deve soddisfare per appartenere a V .

Definizione 20.18. [JJJ52] *Dati U, W $\mathbb{K}$ -spazi diciamo che $T: W \rightarrow U$, morfismo di $\mathbb{K}$ spazi è una descrizione parametrica di $V \underset{SSP}{\subseteq} U$ se*

$$V = \text{Im } T = \{T(\underline{w}) \mid \underline{w} \in W\}$$

Diciamo che W è lo spazio di partenza della descrizione e U è lo spazio di arrivo.

Equivalentemente, dare una base, un sistema di generatori od un vettore generico mi dà una descrizione parametrica.

Chiaramente le descrizioni cartesiane e parametriche si guardano bene dall'essere uniche, dato che possono variare sia la funzione che gli spazi (di arrivo per la cartesiana e di partenza per la parametrica).

Esempio 20.19. [JJJ23] *Dato*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + 2z = 0\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

due sue descrizioni cartesiane sono

$$\begin{array}{ccc}
F: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
& (x, y, z) & \mapsto (x - y, x + 2z)
\end{array}
\quad e \quad
\begin{array}{ccc}
G: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
& (x, y, z) & \mapsto (2x - y + 2z, x - y, y + 2z)
\end{array}$$

dato che

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = x \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2}x \\ y = x \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \ker F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + 2z = 0\} = V \\ \ker G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = x - y = y + 2z = 0\} = V \end{aligned}$$

Esempio 20.20. [JJE65] Il sottospazio $V = \text{Span}((2, 2 - 1))$ può essere visto come l'immagine delle due funzioni

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (x, x, -1/2x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (-1, -1, 1/2) \\ \underline{e}_2 &\mapsto \underline{0} \end{aligned}$$

Esempio 20.21 (Passaggio da descrizione cartesiana a parametrica). [JJQ00] Basta trovare una base del $\ker$ della funzione che descrive lo spazio, ovvero le soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee, come abbiamo fatto infinite volte..

Esempio 20.22 (Passaggio da descrizione parametrica a cartesiana). [JJQ01] Bisogna trovare le condizioni che deve soddisfare il vettore $\underline{v}$ per appartenere a V .

Esempio 20.23. Da parametrica a cartesiana/[JJQ56] Trovare la descrizione cartesiana di

$$V = \text{Span}((3, 2, 0, 5, 0), (1, 1, 0, 2, 1), (6, -1, 0, 5, 0)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^5$$

Dimostrazione. Talvolta si può vedere la soluzione ad occhio: Dato che $rk \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 3$ la dimensione

di V è 3 e quindi la sua descrizione cartesiana ha $5 - 3 = 2$ condizioni indipendenti. Esaminando i generatori di V vediamo che le due condizioni per cui il vettore generico di V , ovvero (x, y, z, t, u) appartiene a V sono $z = 0$ e $x + y = t$; dato che tutti e tre i generatori di V le soddisfano, le soddisfano tutti i vettori di V (dimostrare per esercizio). Quindi

$$V = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{K}^5 \mid \begin{cases} z = 0 \\ x + y = t \end{cases} \right\}$$

□

Esempio 20.24 (Da descrizione parametrica a cartesiana). [JJQ98] Trovare la descrizione cartesiana di

$$V = \text{Span}((3, 2, 1, 5), (1, 1, 0, 2), (2, -1, 0, 5)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$$

Dimostrazione. E talvolta bisogna fare i conti: Stiamo cercando le relazioni tra le componenti x, y, z, t del vettore generico (x, y, z, t) di $\mathbb{K}^4$ tali che il vettore generico appartenga a V . Il vettore generico di V è

$$= a(3, 2, 1, 5) + b(1, 1, 0, 2) + c(2, -1, 0, 5) = (3a + b + 2c, 2a + b - c, a, 5a + 2b + 5c)$$

Il sistema che otteniamo imponendo che la prima componente del vettore generico (x, y, z, t) di V si possa esprimere come $3a + b + 2c$, la seconda come $2a + b - c$, la terza come a e la quarta come $5a + 2b + 5c$ è

$$\begin{cases} x = 3a + b + 2c \\ y = 2a + b - c \\ z = a \\ t = 5a + 2b + 5c \end{cases}$$

Dobbiamo trovare le relazioni tra le x, y, z, t che permettano al sistema di avere soluzione. Questo equivale a risolvere il sistema nelle incognite a, b, c e a trovare le relazioni tra i parametri x, y, z, t che permettano l'esistenza di soluzioni del sistema. Risolviamo con Gauss considerando, appunto a, b, c come incognite e x, y, z, t come parametri.

```
M:=Mat([[3,1,2,x],
        [2,1,-1,y],
        [1,0,0,z],
        [5,2,5,t]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 2, x]
2^a-(2/3)*1^a [0, 1/3, -7/3, -2/3x + y]
3^a-(1/3)*1^a [0, -1/3, -2/3, -1/3x + z]
4^a-(5/3)*1^a [0, 1/3, 5/3, -5/3x + t]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 2, x]
----- [0, 1/3, -7/3, -2/3x + y]
3^a-(-1)*2^a [0, 0, -3, -x + y + z]
4^a-(1)*2^a [0, 0, 4, -x - y + t]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 2, x]
----- [0, 1/3, -7/3, -2/3x + y]
----- [0, 0, -3, -x + y + z]
4^a-(-4/3)*3^a [0, 0, 0, -7/3x + 1/3y + 4/3z + t]
```

ed il sistema ha soluzioni solo se $-7/3x + 1/3y + 4/3z + t = 0$, che è quindi la condizione della relazione cartesiana di V . Più formalmente, con opportuna moltiplicazione,

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^5 \mid -7x + 1y + 4z + 3t = 0\}$$

Dato che la descrizione cartesiana di V ha una sola condizione, $\dim V = 4 - 1 = 3$. □

Osservazione 20.25. [JJQ39] *Notiamo che il calcolo che abbiamo fatto è esattamente quello che facciamo quando vogliamo calcolare le relazioni tra le righe di una matrice con l'algoritmo tag-variable. Il che è ovvio, dato che stiamo cercando le relazioni tra le componenti, descritte mediante vettori.*

La somma è facile quando ho le descrizioni parametriche degli spazi, intersezione è facile in cartesiana.

Osservazione 20.26. [HHA15] *Se abbiamo due sottospazi di $\mathbb{K}^n$ espressi in forma cartesiana*

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

e

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_s(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

la loro intersezione è

$$V \cap W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Il calcolo di una base dell'intersezione di sottospazi è quindi immediato quando i sottospazi sono espressi in forma cartesiana.

Esempio 20.27. [HHA16] *Siano*

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x + y - z = 0\}$$

e

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

la loro intersezione è

$$V \cap W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

Esercizio 20.28. [QQQ52] *Dire se gli spazi affini*

$$L = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ x + y - z - 3t = 2 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\} \text{ e } J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ 1/3x + 4/3y - 1/3z - 2/3 = 0 \\ 4y + z = 1 \end{cases} \right\}$$

sono uguali.

Soluzione. Determiniamo un vettore generico $\underline{v}$ per L e verifichiamo che $\underline{v} \in J$. Questo ci dirà che $L \subseteq J$. Ripetiamo scambiando L, J . Questo ci dirà che $J \subseteq L$. Ne concluderemo che $L = J$.

1. Determiniamo un vettore generico per L , ovvero risolviamo il sistema con matrice associata (completa)

```

M:=Mat([[1,1,-2,1,1],
        [1,1,-1,-3,2],
        [0,1,0,1,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 0, 1, -4, 1]
      0 sotto pivot[0, 1, 0, 1, 0]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([ [1, 1, -2, 1, 1],
      [0, 1, 0, 1, 0],
      [0, 0, 1, -4, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2, 1, 1]
----- [0, 1, 0, 1, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, -4, 1]

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, -2, 1, 1]
----- [0, 1, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, -4, 1]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a+2*3^a [1, 1, 0, -7, 3]
----- [0, 1, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, -4, 1]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-1*2^a [1, 0, 0, -8, 3]
----- [0, 1, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, -4, 1]

```

Le soluzioni sono quindi $x = 8t + 3$, $y = -t$, $z = 4t + 1$. Sostituiamo nel vettore generico di $\mathbb{R}^4$ (x, y, z, t) per trovare il vettore generico delle soluzioni $\underline{v} = (8t + 3, -t, 4t + 1, t)$.

Verifichiamo che $\underline{v} \in J$ verificando che le sue componenti soddisfano le equazioni che definiscono J

$$\begin{cases} t+x+y-2z=1 \\ 1/3x+4/3y-1/3z-2/3=0 \\ 4y+z=1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} x=8t+3 \\ y=-t \\ z=4t+1 \\ t=t \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} (8t+3)+(-t)-2(4t+1)+t=1 \\ 1/3(8t+3)+4/3(-t)-1/3(4t+1)=2/3 \\ 4(-t)+(4t+1)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 2/3=2/3 \\ 1=1 \end{cases}$$

Potevamo notare che la prima equazione della descrizione cartesiana di J è uguale alla prima equazione della descrizione cartesiana di L , e quindi possiamo dire immediatamente che $\underline{v}$ la soddisfa senza fare i conti.

2. Che $J \subseteq L$ è lasciato per esercizio.

□

20.3 Esercizi proposti

Esercizio 20.29. [LLZ56] Dato il morfismo

$$\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (1,2) & \mapsto (1,1) \\ & (1,3) & \mapsto (1,1) \end{array}$$

e le basi E_2 , $B = (1,2), (1,3)$ e $C = (1,1), (3,5)$,

Determinare $(3,6)_B, (3,6)_C, (\underline{e}_1)_C, ((1,2)_C)_B = ((1,1)+2(3,5))_B, ((1,2)_B)_C, (M_T)_C^B, M_B^C, M_C^{E_2}, (M_T)_C^{E_2}, (M_T)_{E_2}^B$.

Esercizio 20.30. [LLZ71] Dato il morfismo

$$\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (1,2,0) & \mapsto (1,1) \\ & (1,3,0) & \mapsto (1,2) \\ & (0,0,2) & \mapsto (2,1) \end{array}$$

e le basi E_2 , $(1,2,0), (1,3,0), (0,0,2)$ e $C = (1,0,1), (1,0,5), (1,1,1)$,

Determinare $(3,6,1)_B, (1,3,6)_C, (\underline{e}_3)_C, ((1,2,0)_C)_B, ((1,0,2)_B)_C, (M_T)_C^B, M_B^C, M_C^{E_2}, (M_T)_C^{E_2}, (M_T)_{E_2}^B$.

Esercizio 20.31. [LLZ55] Esibire basi ortonormali per i seguenti sottospazi reali

1. $V = \text{Span}((1,2,1), (0,1,1)).$
2. $V = \text{Span}((1,2,1,2), (0,1,1,5), (0,0,2,1)).$
3. $V = \text{Span}((1,1,0,0,1,1), (0,1,1,0,0,0), (10,1,1,0,1,0)).$

Soluzioni. Queste sono possibili basi ortogonali

1. $(1, 2, 1), (-1/2, 0, 1/2)$
2. $(1, 2, 1, 2), (-13, -16, -3, 24), (17, 52, -167, 23)$
3. $(1, 1, 0, 0, 1, 1), (-1, 3, 4, 0, -1, -1), (48, -11, 11, 0, -15, -22)$

□

Esercizio 20.32. [LLZ54] *Determinare una base di $V^\perp$ per i seguenti sottospazi reali*

1. $V = \text{Span}((1, 2, 1), (0, 1, 1))$.
2. $V = \text{Span}((1, 2, 1, 2), (0, 1, 1, 5), (0, 0, 2, 1))$.
3. $V = \text{Span}((1, 1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (10, 1, 1, 0, 1, 0))$.

Esercizio 20.33. [LLZ29] *È vero che se $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ $\mathbb{K}$ -spazio allora $(W^\perp)^\perp = W$?*

Esercizio 20.34. [LLZ47] *È vero che per $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ $\mathbb{K}$ -spazio, con base di W data da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p$ abbiamo che $W^\perp = \text{Span}(\underline{w}_1)^\perp \cap \dots \cap \text{Span}(\underline{w}_p)^\perp$?*

20.4 Quinta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

[Auto5A] [Tempo stimato 1:30h] Tutti gli esercizi valgono 3 punti, tranne il primo, che ne vale 6.

1. Dire quali dei seguenti $\mathbb{R}$ -sottospazi di $\mathbb{C}^3$ sono isomorfi

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \\ V_2 &= \text{Span}((1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1 + i), (0, 0, i)) \\ V_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}(x) = \text{Im}(x) = \text{Im}(y) = 0\} \end{aligned}$$

Soluzione. $V_2 \simeq V_3$

□

2. Determinare una applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $T \circ T \neq 0$ ma $T \circ T \circ T \equiv 0$.

Soluzione. Per esempio quella associata alla matrice $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□

3. Descrivere, se esiste, un morfismo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = \text{Im } f$.

Soluzione. per esempio quello associato alla matrice $(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

4. Data la base $B = (1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 3)$ ed il morfismo

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (1, 1, 2) &\mapsto (0, 1, 1) \\ (0, 1, 1) &\mapsto (0, 2, 3) \\ (0, 2, 3) &\mapsto (2, 2, 4) \end{aligned}$$

determinare $(M_T)_B^B$

Soluzione. $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□

5. Per quali $a \in \mathbb{C}$ il morfismo

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (a, 1, 2) &\mapsto (0, 1, 1) \\ (0, a, -1) &\mapsto (0, 2, 3) \\ (0, 2, a) &\mapsto (2, 2, 4) \end{aligned}$$

è ben definito?

Soluzione. Per $a \neq 0, \pm\sqrt{2}i$

□

6. Data $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ base di $\mathbb{R}^3$ calcolare $\dim \ker T$ per

$$\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto (1, 1, 0, 2) \\ & \underline{v}_2 & \mapsto (3, 4, 0, 7) \\ & \underline{v}_3 & \mapsto (0, 5, 0, 9) \end{array}$$

Soluzione. $\dim \ker T = 0$

□

7. (3pt) Per quali $a \in \mathbb{R}$ il morfismo

$$\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{C}^3 & \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ & (1, 0, 1) & \mapsto (1, 1, 1) \\ & (1, 1, 1) & \mapsto (1, 2, 3) \\ & (2, 1, 2) & \mapsto (2, a, 4) \end{array}$$

è ben definito?

Soluzione. $a = 3$

□

8. Determinare una base di $V = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^3 \mid \underline{v} \perp (2, i, i)\} \subseteq_{SSP} \mathbb{C}^3$

Soluzione. Per esempio $B = (\frac{i}{2}, -1, 0), (\frac{i}{2}, 0, -1)$

□

9. Dato $V = \text{Span}((1, 2, 2), (1, 1, 3))$ determinare una base ortonormale di V

Soluzione. $\frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$

□

20.5 Quinta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi

[Auto5B] [Tempo stimato 1h]

Esercizio 20.35. [XXX00] Data la funzione

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ x - 2y + z \\ -2x + y + z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Dimostrare che f è lineare e determinare $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.

2. Dire se f è iniettiva o surgettiva.

3. Determinare basi di $\ker f$ e $\text{Im } f$

4. Data la base $\mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$, determinare $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$.

5. Stabilire per quali di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (1, k + 1, k^2 - 2)$ appartiene a $\text{Im } f$.

Soluzione.

1. Dato che le componenti del vettore immagine $(x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z)$ sono polinomi omogenei di grado 1, f è lineare. Abbiamo

$$f(\underline{e}_1) = (1, 1, -2), \quad f(\underline{e}_2) = (1, -2, 1), \quad f(\underline{e}_3) = (-2, 1, 1),$$

e quindi

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo il determinante di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi f non è iniettiva, quindi $\dim \ker f \geq 1$. Per il teorema della dimensione, $\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \ker f$ e dato che $\dim \ker f \geq 1$ abbiamo $\dim \operatorname{Im} f \leq 2$, quindi f non è surgettiva.

3. Per determinare $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z)) = \underline{0}\}$ risolviamo il sistema

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

```
Mat[[1, 1, -2],
     [1, -2, 1],
     [-2, 1, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2]
      2^a-1*1^a [0, -3, 3]
      3^a+2*1^a [0, 3, -3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, -2]
----- [0, -3, 3]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0]

Mettiamo la matrice in forma standard

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, -2]
      2^a*-1/3 [0, 1, -1]
----- [0, 0, 0]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot
```

```

1^a+1*2^a  [1, 0, -1]
----- [0, 1, -1]
----- [0, 0, 0]

```

Abbiamo quindi le relazioni

$$x = z, \quad y = z$$

Imponendo queste relazioni sul vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ otteniamo un vettore generico delle soluzioni $(\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1, 1, 1)$. Quindi $(1, 1, 1)$ è una base di $\ker f$.

Sappiamo che $\operatorname{Im} f$ è generato dalle colonne di

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Guardando le colonne della riduzione in forma triangolare superiore di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che solo le prime due colonne hanno un pivot, e quindi solo le due prime colonne della matrice $(M_f)_{E_3}^{E_3}$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\operatorname{Im} f$ è quindi $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$.

4. Abbiamo $\mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} (M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}} &= (M_f)_{E_3}^{E_3} \cdot M_{E_3}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che per le proprietà del prodotto di matrici per avere $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$ basta scambiare opportunamente le colonne di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.

5. Dato che una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$, per trovare i k per cui $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2) \in \operatorname{Im} f$ basta trovare i k per cui $\underline{v}$ è linearmente dipendente da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$. Mettiamo questi tre vettori per riga in una matrice, $\underline{v}$ come ultima riga, riduciamo con Gauss e vediamo per quali k l'ultima riga della riduzione è nulla

```

Use R:=Q[k];
M:=Mat([[1,-2,1],
        [1,1,-2],
        [1,k+1,k^2-2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -2, 1]
2^a-1*1^a [0, 3, -3]

```

```

3^a-1*1^a [0, k + 3, k^2 - 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -2, 1]
----- [0, 3, -3]
3^a-1/3k - 1*2^a [0, 0, k^2 + k]

```

Perché la terza riga sia nulla è necessario e sufficiente avere $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k \in \{0, -1\}$, quindi $\underline{v} \in \text{Im } f$ se e solo se $k \in \{0, -1\}$.

□

Esercizio 20.36. [XXX01] Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

$$\begin{aligned}
 T: \quad \mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\
 \underline{v}_1 - \underline{v}_2 &\mapsto \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\
 a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 &\mapsto \underline{v}_2
 \end{aligned}$$

Determinare gli a tali che T sia iniettivo, surgettivo, isomorfismo e trovare $(M_T)_B^B$ per una opportuna base B .

Soluzione. Dato che $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, prendiamo come base $B = \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1$. Questi due vettori sono linearmente indipendenti dato che lo sono $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e quindi formano una base di $\mathbb{K}^2$. Vediamo di determinare l'immagine di $\underline{v}_1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ T(a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases} \\
 &\begin{cases} T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ aT(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases} \\
 &\begin{cases} 2T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \\ aT(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases} \\
 &\begin{cases} 2T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \\ (a+2)T(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \underline{v}_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se avessimo $a = -2$, avremmo $\underline{0} = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Quindi possiamo supporre per ipotesi che $\boxed{a \neq -2}$ e

$$T(\underline{v}_1) = \frac{1}{a+2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \frac{1}{a+2}\underline{v}_1$$

Date le immagini di $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1$ in base B abbiamo la matrice

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

che, dato $a \neq -2$, è non singolare e quindi l'endomorfismo T è invertibile e quindi un isomorfismo e quindi iniettivo e surgettivo. □

Esercizio 20.37. [ASD02] Sia dato un morfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ che soddisfa le condizioni

$$T(3x^2 - 1) = x^2 \quad T(x + 2) = 3$$

1. Descrivere tutti i morfismi T che soddisfano le condizioni.
2. Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi T per cui (svolgere separatamente i tre casi):
 - (a) $rk(T) = 4$ e $1 \in \text{Im}(T)$.
 - (b) $rk(T) = 3$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$
 - (c) $rk(T) = 2$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$

Soluzione.

1. Descrivere tutti i morfismi T che soddisfano le condizioni.

È immediato vedere che i tre vettori $3x^2 - 1, x + 2, 1$, tutti di grado diverso, siano linearmente indipendenti e quindi formino una base B di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$, che ha dimensione 3. I morfismi che soddisfano le condizioni sono quindi scrivibili, usando la base B , come

$$\begin{array}{rcll}
 T: & \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \\
 & 3x^2 - 1 & \mapsto & x^2 \\
 & x + 2 & \mapsto & 3 \\
 & 1 & \mapsto & ax^3 + bx^2 + cx + d
 \end{array} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{K}$$

2. Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi T per cui (le condizioni sono indipendenti)

- (a) $rk(T) = 4$ e $1 \in \text{Im}(T)$. Non esiste alcun morfismo che soddisfi le condizioni. Per il teorema della dimensione abbiamo

$$\dim \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = rk(T) + \dim \ker T \Leftrightarrow 3 = 4 + \dim \ker T$$

e la dimensione è sempre positiva o nulla.

- (b) $rk(T) = 3$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$. Ragioniamo come sopra. Un esempio di morfismo è

$$\begin{array}{rcll}
 T: & \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \\
 & 3x^2 - 1 & \mapsto & x^2 \\
 & x + 2 & \mapsto & 3 \\
 & 1 & \mapsto & x^3
 \end{array}$$

I vettori $3x^2 - 1, x + 2, 1$ sono una base B di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$. Dato che

$$x^3 + x^2 + 1 = T(1) + T(3x^2 - 1) + \frac{1}{3}T(x + 2) = T\left(1 + 3x^2 - 1 + \frac{1}{3}(x + 2)\right)$$

abbiamo che $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$.

- (c) $rk(T) = 2$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$. Non esiste alcun morfismo che soddisfi le condizioni. Infatti se $x^3 + x^2 + 1 \in \text{Im}(T)$, abbiamo in $\text{Im } T$ tre polinomi di grado diverso. Il rango di T è quindi almeno 3, contraddicendo la condizione $rk(T) = 2$.

□

Parte VI

Forme speciali per un morfismo: diagonale, Jordan

Capitolo 21

Ventunesima lezione - Endomorfismi diagonalizzabili, Forma di Jordan

21.1 Matrici simili

La nozione di classe di similitudine non è stata introdotta in classe, e non è richiesta. Viene lasciata in queste dispense per completezza. Molto brevemente, due matrici sono simili se rappresentano lo stesso morfismo rispetto a basi diverse. La classe di similitudine di una matrice A (o morfismo L_A) è data dall'insieme delle matrici simili ad A , quindi dalle matrici che rappresentano il morfismo L_A al variare di tutte le basi possibili.

N.B. Ogni matrice quadrata non singolare è interpretabile come un cambio di base

Definizione-Proposizione 21.1. [MMM03] L insieme

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = (\{M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det M \neq 0\}, \cdot)$$

dove $\cdot$ è il prodotto di matrici è un gruppo con l'operazione di prodotto di matrici e si dice Gruppo lineare di ordine n su $\mathbb{K}$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio

□

Problema 21.2. [MMM30] Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita n ed un endomorfismo $T: V \rightarrow V$ di $\mathbb{K}$ -spazi, vorremmo identificare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia il più semplice possibile, al limite, se possibile, diagonale.

Vediamo di caratterizzare tutte le matrici associate a $T: V \rightarrow V$ mediante una qualche base.

Definizione 21.3. [MMM04] Due matrici quadrate $A, B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ sono simili se esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M \Leftrightarrow M \cdot A = B \cdot M$$

Indichiamo questa relazione come $A \sim B$.

Osservazione 21.4. [MMU04] Si può vedere facilmente che questa è una relazione di equivalenza, ovvero che $\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ abbiamo

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$.

3. Se $A \sim B$ e $A \sim C$ allora $A \sim C$.

Dimostrazione.

1. $A = I_n \cdot A \cdot I_n^{-1} = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$ e $I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, quindi $A \sim A$.

2. $A \sim B \Rightarrow \exists M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$\begin{aligned} A &= M^{-1} \cdot B \cdot M \\ &\text{molt. a sx e dx per } M, M^{-1} \\ M \cdot A \cdot M^{-1} &= M \cdot (M^{-1} \cdot B \cdot M) \cdot M^{-1} \\ (M^{-1})^{-1} \cdot A \cdot M^{-1} &= B \end{aligned}$$

Dato che anche $M^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $B \sim A$.

3. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, abbiamo che $\exists M_1, M_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che

$$A = M_1^{-1} \cdot B \cdot M_1 \quad \text{e} \quad B = M_2^{-1} \cdot C \cdot M_2$$

Da cui

$$A = M_1^{-1} \cdot B \cdot M_1 = M_1^{-1} \cdot (M_2^{-1} \cdot C \cdot M_2) \cdot M_1 = (M_2 \cdot M_1)^{-1} \cdot C \cdot (M_2 \cdot M_1)$$

e dato che $M_1, M_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $M_2 \cdot M_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ e quindi $A \sim C$.

□

Dai teoremi di Binet e della dimensione risulta immediato che

Corollario 21.5. [MMM09] *Date due matrici quadrate $A \sim B$ ho che*

1. $\det A = \det B$.
2. $\text{rk } A = \text{rk } B$.
3. $\dim \ker A = \dim \ker B$.

Esempio 21.6. [MMM06]

1. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

non sono simili, perché una è singolare mentre l'altra non lo è.

2. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = B$$

non sono simili, perché hanno rango diverso, $\text{rk } A = 3$, $\text{rk } B = 2$

Osservazione 21.7. [MMM11] *Date due matrici $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ abbiamo che $A \sim B$ se e solo se il sistema matriciale omogeneo (con n^2 incognite scalari)*

$$A \cdot X = X \cdot B \Leftrightarrow A = X \cdot B \cdot X^{-1}$$

ammette una soluzione invertibile.

Vediamo un esempio di questo metodo

Esempio 21.8. [MMM12] *Dire se*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Soluzione: Cerchiamo una soluzione non singolare del sistema

$$\begin{aligned} A \cdot X &= X \cdot B \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2x - y + 3z & -7x + y + 3t \\ 3x - z - t & 3y - 7z + 2t \end{pmatrix} &= 0_2 \\ \begin{cases} -2x - y + 3z = 0 \\ -7x + y + 3t = 0 \\ 3x - z - t = 0 \\ 3y - 7z + 2t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

```
M:=Mat([[-2,-1,3,0],
        [-7,1,0,3],
        [3,0,-1,-1],
        [0,3,-7,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [-2, -1, 3, 0]
      2^a-7/2*1^a [0, 9/2, -21/2, 3]
      3^a+3/2*1^a [0, -3/2, 7/2, -1]
      0 sotto pivot[0, 3, -7, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=9/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [-2, -1, 3, 0]
----- [0, 9/2, -21/2, 3]
      3^a+1/3*2^a [0, 0, 0, 0]
      4^a-2/3*2^a [0, 0, 0, 0]
```

E questo ci dice che non abbiamo solo la soluzione nulla, che è inaccettabile.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
      1^a*-1/2 [1, 1/2, -3/2, 0]
      2^a**2/9 [0, 1, -7/3, 2/3]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-1/2*2^a [1, 0, -1/3, -1/3]
----- [0, 1, -7/3, 2/3]
----- [0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 0]
```

Quindi una soluzione generica è

$$X = \begin{pmatrix} -1/3z - 1/3t & -7/3z + 2/3t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{con } z, t \in \mathbb{K}$$

Se poniamo $z = 3$, $t = 0$ otteniamo la soluzione

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

che è non singolare, quindi $A \sim B$ □

Notiamo che qui stiamo determinando se due matrici date sono simili, e questo si può determinare risolvendo un sistema lineare. Il problema di trovare tutte le matrici simili ad una matrice data è molto più difficile da risolvere

Esempio 21.9. [MMM15] *Determinare tutte la matrici simili alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

Soluzione: Dobbiamo cercare tutte la matrici

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tali che esista

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

Ovvero, dobbiamo risolvere il sistema

$$A \cdot X = X \cdot B$$

rispetto alle variabili x, y, z, t, a, b, c, d , e la soluzione X deve essere non singolare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -xa + x - yc + 3z & -xb - yd + y + 3t \\ 3x - za + 2z - tc & 3y - zb - td + 2t \end{pmatrix} = 0_2$$

$$\begin{cases} -xa + x - yc + 3z = 0 \\ -xb - yd + y + 3t = 0 \\ 3x - za + 2z - tc = 0 \\ 3y - zb - td + 2t = 0 \end{cases}$$

Proviamo a risolvere questo sistema di equazioni *polinomiali non lineari* usando tecniche non viste a lezione:

```
Use R:=Q[a,b,c,d,x,y,z,t],Lex;
I:=Ideal(
-xa + x - yc + 3z,
-xb - yd + y + 3t,
3x - za + 2z - tc,
3y - zb - td + 2t,
xy-zt-1, // Pongo det X=1
);
```

Provo a semplificare il sistema

```
ReducedGBasis(I);
[cy + 1/3czt^2 + 1/3ct - dx - 1/3dz^2t - 1/3dz - xzt + x + 1/3z^2t - 8/3z,
cz^2t^2 + czt - 9c + 9dx^2 - dz^3t - 10dz^2 - 18x^2+
- 3xz^2t - 3xz + z^3t + 10z^2, cx + 1/3cz^2t + 1/3cz - dx^3+
- 1/3dx^2z + dxz^2 + 2x^3 + 2/3x^2z - 2xz^2,
xy - zt - 1,
dxt - dyz - 2xt + yz - 3,
b + dy^2 - dt^2 - y^2 + 2t^2,
dy^2z - dz^2t - dt - y^2z + 3y + 2zt^2 + 2t,
a + 1/9czt^3 + 1/9ct^2 - 1/9dz^2t^2 - 1/9dzt + d+
- 1/3xzt^2 - 1/3xt + 1/9z^2t^2 + 1/9zt - 3]
```

Con scarso successo. Provo a porre $a=z=0$ per semplificare i conti, sapendo che non otterrò tutte le matrici che cerco ma solo qualcuna:

```
I1:=Ideal(
-xa + x - yc + 3z,
-xb - yd + y + 3t,
3x - za + 2z - tc,
3y - zb - td + 2t,
xy-zt-1, // Pongo det X=1
a,z); // Pongo per semplificare i conti, arbitrariamente, a=z=0
Provo a semplificare il sistema
ReducedGBasis(I1);
[d - 3,
bc - 7,
a,
z,
t^2 - 9/7b,
y - 1/3t,
x - 1/3tc]
```

Quindi alcune delle matrici richieste sono, con $b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 7 & 3 \\ \frac{1}{b} & \end{pmatrix}$$

Ma non ho idea delle altre.....

□

Vediamo che due matrici simili danno lo stesso morfismo *rispetto a basi diverse*. Ricordiamo che matrici diverse danno, rispetto *alla stessa base*, morfismi diversi.

Proposizione 21.10. [MMY08] *Sia $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ una matrice non singolare. Allora esistono basi B, C di $\mathbb{K}^n$ tali che $M = M_C^B$.*

Proposizione 21.11. [MMM08] *Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\mathcal{B}$ una base di V con $\dim V = n$. Allora*

1. Se $\mathcal{B}'$ è una base di V , allora $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \sim (M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$
2. Se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $A \sim (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, allora esiste $\mathcal{C}$ base di V tale che $A = (M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

Dimostrazione.

1. Basta notare che $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} (M_T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, con $(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
2. Esiste per ipotesi $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A = M^{-1} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$

Sia $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. I vettori $L_M(\underline{v}_1), \dots, L_M(\underline{v}_n)$, in coordinate $\mathcal{B}$ formano una base $\mathcal{C}$ di V , dato che L_M è un isomorfismo (M è non singolare) e manda quindi una base in una base. Le colonne di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sono date dai vettori di $\mathcal{C}$ in coordinate $\mathcal{B}$, ovvero dai vettori $L_M(\underline{v}_1), \dots, L_M(\underline{v}_n)$. Quindi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = M$ da cui $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = M^{-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} A &= M^{-1} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M \\ &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= (M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

□

Definizione 21.12. [MMM10] Data una matrice quadrata $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, la sua classe di similitudine è

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A &= \{B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \exists M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ tale che } A = M^{-1}BM\} \\ &= \{B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A \sim B\} \end{aligned}$$

Osservazione 21.13. [MMA10] Sia dato un endomorfismo $T: V \rightarrow V$, con $\dim V$ finita. Usando la sola definizione, vedere se esiste e se possibile determinare una base $\mathcal{B}$ tale che $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia diagonale non è banale. Rifrasando l'affermazione precedente, data $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ non è banale vedere se esiste e se possibile determinare $D \in \mathcal{O}_A$ diagonale

21.2 Autovalori ed autovettori

Definizione 21.14. [MMM16] Sia dato V , un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita n ed un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow V$. Allora

1. L'insieme $\text{sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists \underline{v} \in V \text{ tale che } T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} \subseteq \mathbb{K}$ l'insieme degli autovalori di T , è detto spettro di T .
2. Un vettore non nullo $\underline{v} \in V$ è detto autovettore di T relativo all'autovalore $\lambda \in \text{sp } T$ se $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$.
3. Uno scalare $\lambda \in \text{sp}(T)$ si dice autovalore associato all'autovettore $\underline{v}$ se $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$.
4. Se $\lambda \in \text{sp } T$, l'insieme $V_{\lambda} = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} \subseteq V$ è detto autospazio di T .

Osservazione 21.15. [MMZ31] Con abuso di notazione, tutte la terminologia associata ad una matrice A verrà usata associata al morfismo L_A associato ad A . Per esempio, diremo che $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ è singolare se e solo se la matrice $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è singolare, dove $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^n$. Analogamente, un morfismo $T: V \rightarrow V$ verrà detto singolare se e solo se $\ker T \neq \{0\}$. Etc. etc..

Osservazione 21.16. [MMM31] Con le notazioni della definizione precedente, se $V = \mathbb{K}^n$

1. $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Leftrightarrow T(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \underline{v} - \lambda I_n \cdot \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow ((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n) \cdot \underline{v} = \underline{0}$
2. $V_{\lambda} \underset{SSP}{\subseteq} V$. Per il punto 1 abbiamo che

$$V_{\lambda} = \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} = \{\underline{v} \in V \mid ((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n) \cdot \underline{v} = \underline{0}\} = \ker \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$$

e questo abbiamo visto è un sottospazio di V .

3. Da quanto detto sopra, $\lambda \in \text{sp } T$ se e solo se l'endomorfismo $T - \lambda \text{id}_n$ è singolare. Abbiamo quindi $V_0 = \ker T$. Quindi 0 è autovalore se e solo se T è singolare (altrimenti l'unico elemento di $\ker T$ sarebbe il vettore nullo, che non è associato ad un autovalore).

Proposizione 21.17. [MMM17] $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con $n > 1$ una base di $\mathbb{K}^n$ e $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi. Allora

1. La funzione
$$\begin{array}{ccc} p_T: & \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right) \end{array} \quad \text{non dipende dalla base } \mathcal{B}.$$
2. Se λ è un incognita, $p_T(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$
3. λ_0 è un autovalore di T se e solo se $p_T(\lambda_0) = 0$.
4. $p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \lambda^{n-1} + \dots + \det((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \lambda^0$

Ricordiamo che tr , la traccia di una matrice quadrata, è la somma degli elementi sulla diagonale della matrice stessa.

Dimostrazione.

1. Supponiamo di avere una base $\mathcal{C}$ rispetto a cui T è associato alla matrice $(M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$. Vogliamo dimostrare

$$\det \left((M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} - \lambda I_n \right) = \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} (M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &\text{da cui} \\ \det \left((M_T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} - \lambda I_n \right) &= \det \left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} - \lambda I_n \right) \\ &\text{dato che } I_n = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \det \left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} (M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} - \lambda M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right) \\ &= \det \left((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right) \\ &\text{per Binet} \\ &= \det \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right)^{-1} \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right) \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &\text{dato che } \det \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right)^{-1} = \frac{1}{\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}} \\ &= \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right) \end{aligned}$$

2. Che $p_T \in \mathbb{K}[\lambda]$ è immediato perché le operazioni che faccio per ottenerlo sono solo somme e prodotti di elementi della matrice $\left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n\right)$ che stanno in $\mathbb{K}[\lambda]$.
3. Voglio dimostrare che λ_0 è un autovettore di T se e solo se $p_T(\lambda_0) = 0$.

Lo scalare λ_0 è un autovalore di T se e solo se il sistema

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \underline{x} = \lambda_0 \underline{x}$$

ammette una soluzione non nulla, e questo accade se e solo se la matrice $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda_0 I_n$ è singolare (per il Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se e solo se

$$\det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda_0 I_n \right) = p_T(\lambda_0) = 0$$

4. Basta valutare $p_T(\lambda) = \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$ in zero per avere che il suo termine noto è $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Se sviluppo il determinante con Laplace, è evidente che ogni elemento della matrice compare una volta sola nel calcolo, e dato che la variabile λ compare esattamente in n elementi della matrice $\left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n\right)$ ho che $\deg p_T(\lambda) \leq n$.

Dimostrazione per induzione su n .

- Passo base $n = 2$. Sia

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= (-1)^2 \lambda^2 + (-1)^1 (\text{tr}(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \lambda + \det(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

□

- Passo induttivo $n - 1 \Rightarrow n$

Vogliamo dimostrare che per ogni endomorfismo $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ abbiamo

$$p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \lambda^{n-1} + \dots$$

sapendo che per ogni endomorfismo $T': \mathbb{K}^{n-1} \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$ abbiamo che

$$p_{T'}(\lambda) = (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \text{tr}(M_{T'})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \lambda^{n-2} + \dots$$

Abbiamo che

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

sviluppiamo con Laplace per la prima colonna

$$= (a_{11} - \lambda) \det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} + \text{termini di grado al più } n-2$$

dato che il resto è una combinazione lineare su $\mathbb{K}$ di determinanti di matrici in cui λ compare esattamente $n-2$ volte (non compare il termine di indice $(1, 1)$ e per la colonna i -esima), l'elemento (i, i) della diagonale. Quindi questa combinazione lineare mi dà un polinomio in λ di grado al più $n-2$.

$$= (a_{11} - \lambda) \det(A - \lambda \cdot I_{n-1}) + \text{termini di grado al più } n-2$$

dove $A = (M_{T'})_{\mathcal{B}}$ per un opportuno endomorfismo $T': \mathbb{K}^{n-1} \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$

Per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (a_{11} - \lambda)[(-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots] + \cdots \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \cdots \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(M_T)_{\mathcal{B}} \lambda^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

ed il termine noto, per quanto detto precedentemente, è $p_T(0) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

□

Definizione 21.18. [MMM22] Dato un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ il polinomio

$$p_T(\lambda) = \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right)$$

è detto polinomio caratteristico di T .

Corollario 21.19. [MMM21] Con le notazioni della proposizione precedente, notiamo immediatamente che

1. Dato che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, il numero degli autovalori di T è minore o uguale al grado del polinomio caratteristico p_T , ovvero alla dimensione di V .
2. Il termine noto di $p_T(\lambda)$ è il determinante di $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Esempio 21.20. [MMM23] Sia dato l'endomorfismo $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ con matrice associata rispetto alla base canonica

$n = 2$

$$(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $p_T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, senza neppure calcolare il determinante, dato che i termini di grado 2, 1, 0 sono dati rispettivamente da $(-1)^2$, $\text{tr}(M_T)_{E_2}^{E_2} = 1 + 1 = 2$ e $\det(M_T)_{E_2}^{E_2} = 0$

$n = 3$

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

allora

$$p_T(x) = \det\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - \lambda I_3\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 14$$

Come previsto, il coefficiente di testa è -1 , il secondo è $(-1)^2 \cdot 5$, la traccia della matrice ed il termine noto è -14 , il determinante della matrice.

$n = 4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2 = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 \end{aligned}$$

Come previsto, il coefficiente di testa è 1 , il secondo è $(-1)^3 \cdot 6$, l'opposto della traccia della matrice ed il termine noto è 4 , il determinante della matrice.

Notiamo che gli elementi sopra la diagonale sono irrilevanti per il calcolo del polinomio caratteristico.

$n = 4$

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{allora } p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 23\lambda^2 - 28\lambda + 12$$

Osservazione 21.21. Per calcolare il determinante della matrice $A - \lambda I$ posso ridurre con Gauss la matrice $A - \lambda I$. RIDURRE A CON GAUSS E POI CALCOLARE IL DETERMINANTE DI $A - \lambda I$ È UN ERRORE GRAVE

Esempio 21.22. [MMM70] *Infatti*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ma

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1 \quad \text{ma} \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Proposizione 21.23. [MMM18] *Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\mathcal{B}$ base di V . Allora $\mathcal{B}$ è composta di autovettori se e solo se $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Corollario 21.24 (Non richiesto). [MMM19] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora esiste una base di autovettori per L_A se e solo se A è simile ad una matrice diagonale se e solo se $\mathcal{O}_A$ contiene almeno una matrice diagonale.*

Definizione 21.25. [MMM20] *Sia $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi. Diciamo che T ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ se p_T ha esattamente n radici in $\mathbb{K}$ contate con la loro molteplicità.*

Esempio 21.26. [MMA00] *Il polinomio caratteristico dell'endomorfismo associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

e non ha radici in $\mathbb{R}$.

Nel prosieguo di questa sezione, considereremo endomorfismo su un $\mathbb{K}$ -spazio V di dimensione finita n , non necessariamente su $\mathbb{K}^n$. Il polinomio caratteristico si ottiene dopo trasportato la situazione in $\mathbb{K}^n$ mediante un opportuno isomorfismo.

Proposizione 21.27. [MMM52] *Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ non nulli corrispondenti ad autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Induzione su k .

- Base $k = 1$ Ovvio.
- Passo induttivo: OK per $k - 1$, proviamo per k . Supponiamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}$ siano linearmente indipendenti. Vogliamo provare che

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$$

Abbiamo quindi la relazione $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$

Applichiamo T

$$T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k) = T(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$\alpha_1 T(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_k T(\underline{v}_k) = \underline{0}$$

dato che $\underline{v}_i$ sono autovettori otteniamo la relazione

$$\alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

Sfruttando la prima relazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_k \underline{v}_k = -\alpha_1 \underline{v}_1 - \dots - \alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1} + \lambda_k (-\alpha_1 \underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1}) &= \underline{0} \\ \alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1} - \alpha_1 \lambda_k \underline{v}_1 - \cdots - \alpha_{k-1} \lambda_k \underline{v}_{k-1} &= \underline{0} \\ \text{raccolliamo i vettori } \underline{v}_i & \\ \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \underline{v}_{k-1} &= \underline{0}\end{aligned}$$

e dato che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}$ sono linearmente indipendenti per l'ipotesi induttiva, abbiamo che

$$\begin{aligned}\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) &= 0\end{aligned}$$

ma dato che gli autovalori λ_j sono tutti distinti per ipotesi, abbiamo per ogni $i : 1 \dots k-1$ $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ e quindi

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$$

Quindi ricordando $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$ abbiamo che $\alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$ e dato che $\underline{v}_k$ è un autovettore e quindi $\underline{v}_k \neq \underline{0}$ abbiamo $\alpha_k = 0$. Abbiamo dimostrato che $\underline{\alpha} = \underline{0}$ e quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

□

Corollario 21.28. [MMM53] *Con la notazione della proposizione precedente, se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ appartengono ad autospazi distinti di T , allora*

$$\underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 = \cdots = \underline{v}_k = \underline{0}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'unico elemento di un autospazio che non sia un autovettore è il vettore nullo. Supponiamo per assurdo che qualcuno dei vettori $\underline{v}_i$ sia non nullo, e quindi autovettori associati ad autospazi distinti. Tra questi autovettori vi sarebbe una relazione di dipendenza lineare, il che è assurdo per la Proposizione 21.27 precedente. Quindi, tutti i vettori $\underline{v}_i$ sono nulli. □

Corollario 21.29. [MMM54] *Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi. Se T ha n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Se ho n autovalori distinti, ho n autospazi distinti. Quindi prendendo un autovettore da ciascuno, ho n vettori indipendenti per la Proposizione 21.27. Questi autovettori formano una base di autovettori e quindi T è diagonalizzabile. □

Definizione 21.30. [MMM55] *Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\lambda_0 \in \text{sp } T$. Allora*

1. *la molteplicità algebrica di λ_0 è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico p_T . La indicheremo con ma_{λ_0} .*
2. *La molteplicità geometrica di λ_0 è $\dim V_{\lambda_0}$. La indicheremo con mg_{λ_0} .*

Esempio 21.31. [MMM56] L' endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$$

notiamo che $p_T(2) = 0$. Quindi $(\lambda - 2) \mid p_T(\lambda)$ ed operando una divisione di polinomi otteniamo

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 10\lambda - 16) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = (2 - \lambda)^2(8 - \lambda)$$

fattorizzando il fattore di secondo grado con la formula.

Quindi la molteplicità algebrica di 2 è 2 e di 8 è 1. Abbiamo

- $\text{mg}_2 = 3 - \text{rk} \left((M_T)_{E_3}^{E_3} - 2I_3 \right) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$
- $\text{mg}_8 = 3 - \text{rk} \left((M_T)_{E_3}^{E_3} - 8I_3 \right) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$

Per esercizio, vedere che l'unione delle basi degli autospazi mi dà una base $\mathcal{B}$ di V e quindi T è diagonalizzabile e $(M_T)_{E_3}^{E_3}$ è simile, per esempio, alla matrice

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

21.3 Criteri di diagonalizzabilità

Proposizione 21.32. [MMM57] La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità geometrica.

Dimostrazione. Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, $\dim V = n$ e $\lambda_0 \in \text{sp } T$ con molteplicità geometrica mg_{λ_0} , che indicheremo con k . Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ una base di V_{λ_0} ; completiamola a $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$ base di V . Quindi

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 I_k & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

con $0, B, C$ matrici opportune. Quindi

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n = \left(\begin{array}{c|c} (\lambda_0 - \lambda) I_k & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_d \end{array} \right)$$

con $d = n - k$. Questa è una matrice a blocchi e quindi

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I_n \right) = \det ((\lambda_0 - \lambda) I_k) \det (C - \lambda I_d) \\ &= (\lambda_0 - \lambda)^k p_C(\lambda) \end{aligned}$$

e dato che per definizione la molteplicità algebrica di λ_0 è il massimo s per cui $(\lambda_0 - \lambda)^s \mid p_T(\lambda)$, e $(\lambda_0 - \lambda)^k \mid p_T(\lambda)$ abbiamo che la molteplicità algebrica è maggiore od uguale a $k = \text{mg}_{\lambda_0}$. $\square$

Teorema 21.33 (Criterio di Diagonalizzabilità). [MMM58] Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi e $\dim V = n$. Se $\text{sp } T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$, indichiamo con ma_{λ_i} e mg_{λ_i} le molteplicità geometriche ed algebriche di λ_i con $i: 1 \dots h$. Allora TFAE (i seguenti fatti sono equivalenti):

1. T è diagonalizzabile.
2. Ogni elemento di V si scrive come somma di autovettori di T relativi ad autovalori distinti.
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}$.
4. T ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e $\text{ma}_{\lambda_i} = \text{mg}_{\lambda_i}$ per $i: 1 \dots h$ (per ogni autovalore la molteplicità geometrica ed algebrica coincidono).
5. $\text{mg}_{\lambda_1} + \dots + \text{mg}_{\lambda_h} = n$.

Dimostrazione.

- 1 $\Rightarrow$ 2 Per ipotesi esiste $\mathcal{B} = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V composta di autovettori, quindi per ogni vettore $v \in V$ esiste $\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$$

se raggruppiamo i termini $\lambda_i \underline{v}_i$ corrispondenti agli autovettori associati ad uno stesso autospazio abbiamo la tesi.

- 2 $\Rightarrow$ 3 Siano $\lambda_i, \dots, \lambda_h$ gli autovalori distinti di T . Per ipotesi abbiamo che per ogni $\underline{v} \in V$ esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h$ con $\underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$ per $i: 1, \dots, h$ tali che

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_h$$

Dobbiamo dimostrare che questa scrittura è unica (gli $\underline{v}$ sono unici). Supponiamo che esistano $\underline{v}'$ tali che

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_h &= \underline{v}'_1 + \dots + \underline{v}'_h \\ (\underline{v}_1 - \underline{v}'_1) + \dots + (\underline{v}_h - \underline{v}'_h) &= \underline{0} \end{aligned}$$

Ma dato che i $\underline{v}_i, \underline{v}'_i$ appartengono allo stesso autospazio, V_{λ_i} abbiamo che $\underline{v}_i - \underline{v}'_i \in V_{\lambda_i}$. Dato che gli autospazi V_{λ_i} sono distinti, per il Corollario 21.28 abbiamo che $\underline{v}_i - \underline{v}'_i = \underline{0}$ e quindi $\underline{v} = \underline{v}'$ da cui la tesi.

- 3 $\Rightarrow$ 4 So che $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}$ e voglio dimostrare che tutte le radici di T sono in $\mathbb{K}$ e

$$\forall i: 1, \dots, h \quad \text{ma}_{\lambda_i} = \text{mg}_{\lambda_i}$$

Abbiamo dall'ipotesi e dalla definizione di molteplicità geometrica

$$\dim V = n = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_h} = \text{mg}_{\lambda_1} + \dots + \text{mg}_{\lambda_h}$$

Dato che le ma sono le molteplicità algebriche delle radici di $p_T(\lambda)$, che ha grado $n = \dim V$, ho

$$\dim V = n \geq \text{ma}_{\lambda_1} + \dots + \text{ma}_{\lambda_h}$$

Dalla Proposizione 21.32 ho

$$\forall i: 1, \dots, h \quad \text{ma}_{\lambda_i} \geq \text{mg}_{\lambda_i}$$

Quindi

$$\text{ma}_{\lambda_1} + \dots + \text{ma}_{\lambda_h} \geq \text{mg}_{\lambda_1} + \dots + \text{mg}_{\lambda_h} = n \geq \text{ma}_{\lambda_1} + \dots + \text{ma}_{\lambda_h}$$

Quindi

$$\text{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \text{ma}_{\lambda_h} = \text{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \text{mg}_{\lambda_h} = n$$

Quindi tutte le radici di $p_T(\lambda)$ stanno in $\mathbb{K}$. Ora,

$$\begin{aligned} \text{ma}_{\lambda_1} + \cdots + \text{ma}_{\lambda_h} - (\text{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \text{mg}_{\lambda_h}) &= 0 \\ (\text{ma}_{\lambda_1} - \text{mg}_{\lambda_1}) + \cdots + (\text{ma}_{\lambda_h} - \text{mg}_{\lambda_h}) &= 0 \\ \text{dato che } \forall i : 1, \dots, h \text{ } \text{ma}_{\lambda_i} - \text{mg}_{\lambda_i} &\geq 0 \\ \text{abbiamo } \forall i : 1, \dots, h \text{ } \text{ma}_{\lambda_i} - \text{mg}_{\lambda_i} &= 0 \end{aligned}$$

4 $\Rightarrow$ 5 Ho che T ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e $\forall i : 1, \dots, h \text{ } \text{ma}_{\lambda_i} = \text{mg}_{\lambda_i}$. Voglio dimostrare

$$\text{mg}_{\lambda_1} + \cdots + \text{mg}_{\lambda_h} = \dim V = n$$

Per ipotesi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h \text{mg}_{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^h \text{ma}_{\lambda_i} \\ T \text{ ha tutti gli autovalori in } \mathbb{K} \\ &= n \end{aligned}$$

5 $\Rightarrow$ 1 Ho $\sum_{i=1}^h \text{mg}_{\lambda_i} = n$. Voglio dimostrare che T è diagonalizzabile. Ricordiamo che T è diagonalizzabile se e solo esiste una base di V composta di autovettori di T .

Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h$ basi di $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_h}$ rispettivamente. Per ipotesi, l'insieme

$$\underline{v} = \underline{v}_1 \cup \dots \cup \underline{v}_h$$

la nostra candidata base, contiene $\dim V$ vettori. Ci basta dimostrare che questi vettori sono linearmente indipendenti. Usiamo la definizione di indipendenza lineare: abbiamo

$$\underline{\alpha}_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \underline{\alpha}_h \cdot \underline{v}_h = \underline{0}$$

e vogliamo $\underline{\alpha}_1 = \cdots = \underline{\alpha}_h = \underline{0}$.

Per ogni $i : 1, \dots, h$ abbiamo che $\underline{\alpha}_i \underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$, e questi sono autospazi associati ad autovalori distinti quindi, per il Corollario 21.28, $\underline{\alpha}_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$. Ma dato che $\underline{v}_i$ è base di V_{λ_i} , questo implica $\underline{\alpha}_i = \underline{0}$ e quindi la tesi.

□

21.4 Polinomio minimo

Definizione 21.34. [NNN01] Dato $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, $\dim V = n$ e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda^1 + a_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$$

Allora

1. La valutazione di f in T è l'endomorfismo

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T^1 + a_0 \text{id}_{V \rightarrow V}$$

2. La valutazione di f in A è la matrice

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A^1 + a_0 I_n$$

Esempio 21.35. [NNN02] Dato l'endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

e $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 2 \in \mathbb{R}[\lambda]$ abbiamo che

$$\begin{aligned} T^2: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(T(x, y)) = T((x + y, x - y)) = (x + y + x - y, x + y - x + y) = (2x, 2y) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(T): \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x, 2y) - 3(x + y, x - y) - 2(x, y) = (-3x - 3y, -3x + 3y) \end{aligned}$$

Notiamo che

$$T(\underline{e}_1) = (1, 1) \quad e \quad T(\underline{e}_2) = (1, -1)$$

e quindi $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Abbiamo

$$\begin{aligned} f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= (M_T)_{E_3}^{E_3^2} - 3 \cdot (M_T)_{E_3}^{E_3} - 2 \cdot I_2 \\ f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f((M_T)_{E_3}^{E_3}) &= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osservazione 21.36. [NNN05] Dato $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi con base $\mathcal{B}$ e $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$.

$$(M_{f(T)})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = f\left((M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Definizione 21.37. [NNN77] Dato $f(x) = \prod i = 0^d f_i(x)^{\alpha_i}$ con $f_i(x) \in \mathbb{K}[x]$ irriducibili, il polinomio

$$\prod_{i=0}^d f_i(x) = \text{sqfr}(f(x))$$

si dice parte square free di $f(x)$.

Definizione-Proposizione 21.38. [NNN06] Data $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e l'endomorfismo $T = L_A$. Prendiamo in considerazione l'insieme

$$I_A = \{f \in \mathbb{K}[\lambda] \mid f(A) = 0\}$$

Abbiamo che

1. Teorema di Cayley-Hamilton: il polinomio caratteristico di p_{L_A} appartiene all'insieme I_A . Questo significa che

$$p_{L_A}(A) = 0$$

2. Esiste $\text{PM}_A(\lambda) \in I_A$ monico, di grado minimo positivo tra gli elementi di I_A detto polinomio minimo di A (o di L_A), PM_A , (o PM_{L_A}) che divide tutti gli elementi di I_A .

3. Data una fattorizzazione in irriducibili del polinomio caratteristico di L_A

$$p_{L_A}(\lambda) = \prod_{i=1}^k f_i(\lambda)^{\alpha_i}$$

allora una fattorizzazione in irriducibili del polinomio minimo di L_A rispetta la condizione

$$\text{PM}_{L_A}(\lambda) = \prod_{i=1}^k f_i(\lambda)^{\beta_i} \quad 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

Rifrasando il punto precedente, il polinomio minimo divide $p_T(\lambda)$ ed è diviso da $\text{sqfr}(p_T(\lambda))$.

4. Quindi il polinomio minimo di L_A divide il polinomio caratteristico di L_A , ha le stesse radici ma con molteplicità minore od uguale e quindi il suo grado è compreso tra 1 e n .
5. Se $T: V \rightarrow V$ è un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazio con $\dim V = n$, con base $\mathcal{B}$ il polinomio minimo di T è $\text{PM}_T(\lambda)$ e non dipende dalla base.

Teorema 21.39 (Criterio di Diagonalizzabilità mediante il polinomio minimo). [NNN08] Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi. Allora T è diagonalizzabile se e solo se PM_T ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e non ha radici multiple.

Esercizio 21.40. [NNN10] Calcolare polinomio caratteristico e minimo delle tre matrici in $\text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dato che le matrici sono tutte triangolari superiori, ed hanno la stessa diagonale, i polinomi caratteristici si calcolano dal prodotto delle tre differenze pivot- λ , ottenendo

$$p_{L_{A_1}} = p_{L_{A_2}} = p_{L_{A_3}} = -(1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Per i polinomi minimi:

- Per A_1 , abbiamo che $\text{PM}_{A_1}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ o $\text{PM}_{A_1}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. Dato che

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

abbiamo che $\text{PM}_{A_1}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$.

- Per A_2 , procediamo col metodo dei polinomi generici di grado crescente. Dato che A_2 non è diagonale, non esistono soluzioni del sistema

$$A_2 - aI_3 = 0$$

e il polinomio minimo non ha grado 1 (avremmo potuto vederlo immediatamente dal polinomio caratteristico)

Vediamo se il polinomio minimo ha grado 2 risolvendo il sistema

$$A_2^2 + aA_2 + bI_3 = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1+a+b & 3+a & 0 \\ 0 & 4+2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 4+2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ a+3=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases}$$

da cui è soluzione $a = -3$, $b = 2$. Il polinomio minimo è quindi

$$\text{PM}_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

di grado 2. Ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ ed è libero da quadrati, quindi L_{A_2} è diagonalizzabile.

- Per $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ procediamo col metodo dei polinomi generici di grado crescente. Dato che A_3 non è diagonale, come prima il polinomio minimo non ha grado 1. Vediamo se il polinomio minimo ha grado 2 risolvendo il sistema

$$A_3^2 + aA_3 + bI_3 = 0$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a+b+1 & a+2 & 1 \\ 0 & a+b+1 & a+2 \\ 0 & 0 & a+b+1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2=0 \\ 1=0 \end{cases}$$

Questo non ha soluzioni. Il grado del polinomio minimo è quindi 3 e

$$\text{PM}_{A_2}(\lambda) = p_{A_3}(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2 \text{ a meno del segno}$$

tutte le radici sono in $\mathbb{R}$ ma ci sono radici multiple: L_{A_3} non è diagonalizzabile.

Quindi

Osservazione 21.41. [NNN40] Due matrici quadrate possono avere stesso polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.

Osservazione 21.42. [M108] La matrice identica I_n o suoi multipli per $b \in K$ sono le uniche matrici che hanno un polinomio minimo di primo grado.

Vediamo facilmente che PM_{bI_n} ha grado 1, dato che

$$I_n - bI_n = 0$$

e quindi $\text{PM}_{I_n}(\lambda) = \lambda - b$, di grado 1.

Viceversa, se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ e $\text{PM}_A = \lambda + a$ abbiamo che

$$A + bI_n = \underline{0} \Rightarrow A = -bI_n$$

21.5 Matrici simmetriche e basi ortonormali

In questo capitolo ogni spazio vettoriale V od affine W sarà sempre preso come sottospazio di $\mathbb{K}^n$. A meno che non sia affermato esplicitamente il contrario, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definizione 21.43. [NNN13] *Un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow V$ tale che*

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad T(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot T(v_2)$$

si dice endomorfismo simmetrico. per cui esista una base $\mathcal{B}$ tale che $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia simmetrica si dice simmetrico.

Proposizione 21.44. [NNF13] *Un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi $T: V \rightarrow V$ è simmetrico se e solo se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia simmetrica.*

Teorema 21.45 (Teorema spettrale). [NNN16] *Sia $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi. Allora esiste una base ortonormale di V composta da autovettori di T se e solo se T è simmetrico.*

Osservazione 21.46. [NNN70] *Questo non vuol dire che tutte la basi di autovettori di T siano ortonormali, solo che ne esiste una ortonormale.*

21.6 Forma di Jordan

Molte matrici non sono diagonalizzabili, ha quindi senso cercare una generalizzazione delle matrici diagonalizzabili. Una possibilità è la Forma di Jordan di una matrice.

Definizione 21.47. [KKK00] *Dato $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ ed un intero positivo p , definiamo $J_p(\lambda_0)$ o Blocco di Jordan di ordine p la matrice quadrata di ordine p che ha λ_0 sulla diagonale, 1 sulla sovradiagonale superiore e zero altrove. L'intero p si dice dimensione del blocco, e λ_0 autovalore del blocco.*

Esempio 21.48. [KKK01] *Alcuni esempi di blocchi di Jordan*

$$\begin{aligned} J_1(2) &= (2) \in \text{Mat}_{1 \times 1}(\mathbb{R}) \\ J_2(3) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ J_5(i) &= \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{5 \times 5}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Definizione 21.49. [KKK02] *Una matrice quadrata $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è detta in forma di Jordan se è una matrice a blocchi del tipo*

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{p_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{p_3}(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{p_k}(\lambda_{p_k}) \end{pmatrix}$$

con i $J_{p_i}(\lambda_i)$ blocchi di Jordan e $p_1 + \cdots + p_k = n$. Gli λ_i non sono necessariamente distinti.

Osservazione 21.50. [KKK02] *Data una matrice quadrata associata ad un endomorfismo $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ con $A = (M_T)_{E_3}^{E_3}$ e $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$, allora*

1. *Ogni blocco di Jordan, di qualunque dimensione, è associato ad un autospazio di dimensione 1.*
2. *La molteplicità geometrica di λ_0 è data dal numero di blocchi di Jordan con autovalore λ_0 .*
3. *La molteplicità algebrica di λ_0 è data dalla somma delle dimensioni dei blocchi di Jordan con autovalore λ_0 .*
4. *Una matrice è diagonalizzabile se e solo se tutti i blocchi di Jordan hanno dimensione 1.*

Dimostrazione. Immediata. □

Esempio 21.51. [KKK03] *Alcuni esempi di matrici in forma di Jordan*

1. *la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è formata dall'unico blocco di Jordan $J_2(2)$*
2. *la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è formata da due blocchi di Jordan $J_1(3)$*
3. *la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ è formata dai quattro blocchi di Jordan $J_1(1)$, $J_1(2)$, $J_2(3)$, $J_3(i)$*
4. *la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è formata dai quattro blocchi di Jordan $J_1(2)$, $J_1(2)$, $J_2(2)$, $J_3(3)$*

Definizione 21.52. [KKK21] *Diciamo che una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ si ha forma di Jordan $J_{p_1}(\lambda_1), \dots, J_{p_k}(\lambda_k)$ se esiste una matrice A' in forma di Jordan $J_{p_1}(\lambda_1), \dots, J_{p_k}(\lambda_k)$ e $P \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, invertibile, tale che $A = PA'P^{-1}$.*

Osservazione 21.53. [KKK13] *Una matrice diagonale di ordine n ha forma di Jordan data da n blocchi di Jordan del tipo $J_1(\lambda)$.*

Daremo senza dimostrazione il Teorema di esistenza ed unicità delle forme di Jordan

Teorema 21.54 (Jordan). [KKK22] *Una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ha forma di Jordan se e solo se il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$. Tale forma è unica a meno dell'ordine dei blocchi.*

Dimostrazione. Vedere Geometria[Abate], Complementi al capitolo 15. □

Esempio 21.55. [KKK05] *Le due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno la stessa forma di Jordan, e quindi esiste una matrice $P \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ tale che $A = PBP^{-1}$.

È quindi evidente che la forma di Jordan è una generalizzazione della forma diagonale. Come possiamo costruire la forma di Jordan di una matrice?

Proposizione 21.56. [KKK04] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ con $\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Costruiamo i blocchi di Jordan associati a λ_1 secondo queste regole:*

1. Il numero di blocchi è uguale a $\text{mg}(\lambda_1)$.
2. La somma degli ordini dei blocchi è $\text{ma}(\lambda_1)$.
3. Se $r_k = \text{rk}(A - \lambda_1 \cdot I)^k$, il numero dei blocchi $J_p(\lambda_1)$
 - di ordine 1 è $n - 2r_1 + r_2$.
 - di ordine 2 è $r_1 - 2r_2 + r_3$.
 - di ordine 3 è $r_2 - 2r_3 + r_4$.
 - $\vdots$
 - di ordine j è $r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}$.

Dopo un numero finito di passi gli r_k sono tutti uguali.

Ripetiamo il procedimento per gli altri autovalori e abbiamo tutti i blocchi di Jordan che costruiscono la

Osservazione 21.57. [KKK24] *Sia A una matrice con forma di Jordan su $\mathbb{K}$ con $\text{sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Allora*

$$\text{PM}_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$$

con k_i il massimo ordine dei blocchi di Jordan associati a λ_i .

Esempio 21.58. [KKK16] *Abbiamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$$

Calcoliamo

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 9 & 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)^2$$

Abbiamo quindi due autovalori

- $\lambda_1 = 1$, $\text{ma}(\lambda_1) = 1 \Rightarrow \text{mg}(\lambda_1) = 1$. Un solo blocco relativo a λ_1 .

- $\lambda_2 = 4$, $\text{ma}(\lambda_2) = 2$. *Calcoliamo*

$$\text{mg}(\lambda_2) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 9 & 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=4} = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Abbiamo quindi un blocco relativo a λ_2 , che quindi ha ordine 2.

La forma di Jordan di A è

$$\begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione 21.59. [KKK08] Come per la diagonalizzazione, anche per la messa in forma di Jordan è possibile costruire la matrice di cambio base P . Per i dettagli, vedere Geometria [Abate],

Esempio 21.60. [KKK07] Abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$$

con $\text{sp}(A) = \{1\}$ di molteplicità algebrica 4 e geometrica 2. Abbiamo 2 blocchi di Jordan relativi a $\lambda = 1$, e la somma dei loro ordini deve essere 4. Abbiamo due possibilità, 2, 2 o 3, 1.

Capitolo 22

Ventiduesima lezione - Esercizi

22.1 Esercizi svolti

Esercizio 22.1. [NNN98a] Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo

$$T_a: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t-a) \end{array}$$

al variare di a discutere la diagonalizzabilità di T_a .

Soluzione. Vediamo le immagini di una base di $\mathbb{R}^3$, $1, t, t^2, t^3$ ricordando che

$$p(t) = 1 \Rightarrow p'(t) = 0 \quad p(t) = t \Rightarrow p'(t) = 1 \quad p(t) = t^2 \Rightarrow p'(t) = 2t \quad p(t) = t^3 \Rightarrow p'(t) = 3t^2$$

e che quindi

$$p(t-a) = 1 \Rightarrow p'(t-a) = 0 \quad p(t-a) = t \Rightarrow p'(t-a) = 1 \quad p(t-a) = t^2 \Rightarrow p'(t-a) = 2(t-a) \quad p(t-a) = t^3 \Rightarrow p'(t-a) = 3(t-a)^2$$

$$\begin{aligned} T(1) &= t \cdot ((1)') = (t \cdot 0) = 0 \\ T(t) &= t \cdot ((t)') = (t \cdot 1) = t \\ T(t^2) &= (t \cdot ((t-a)^2)') = (t \cdot 2(t-a)) = 2t^2 - 2at \\ T(t^3) &= t \cdot ((t-a)^3)' = (t \cdot 3(t-a)^2) = 3t^3 - 6at^2 + 3a^2t \end{aligned}$$

Usando l'isomorfismo

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ 1 & \leftrightarrow & \underline{e}_4 \\ t & \leftrightarrow & \underline{e}_3 \\ t^2 & \leftrightarrow & \underline{e}_2 \\ t^3 & \leftrightarrow & \underline{e}_1 \end{array}$$

Il nostro endomorfismo si trasforma nell'endomorfismo $\bar{T}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 &\mapsto (3, -6a, 3a^2, 0) \\ \underline{e}_2 &\mapsto (0, 2, -2a, 0) \\ \underline{e}_3 &\mapsto (0, 0, 1, -a) \\ \underline{e}_4 &\mapsto (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

ed abbiamo

$$(M_{\overline{T}})_{E_4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 2 & 0 & 0 \\ 3a^2 & -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3a^2 & -2a & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -a & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)$$

Dato che abbiamo quattro autovalori distinti non dipendenti da a e siamo in dimensione 4 l'endomorfismo $\overline{T}$, e quindi l'endomorfismo T , è diagonalizzabile per ogni a .

□

Esercizio 22.2. [QQQ98] *Dato l'endomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} T: \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ 1 & \mapsto & 0 \\ t & \mapsto & 1 \\ t^2 & \mapsto & 2t \\ t^3 & \mapsto & 3t^2 \end{array}$$

Determinare autovettori ed autovalori di T , e dire se T è diagonalizzabile.

Soluzione. Dato che $1, t, t^2, t^3$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, usando l'isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi: \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ 1 & \mapsto & \underline{e}_4 \\ t & \mapsto & \underline{e}_3 \\ t^2 & \mapsto & \underline{e}_2 \\ t^3 & \mapsto & \underline{e}_1 \end{array}$$

Il nostro endomorfismo si trasforma nell'endomorfismo $\overline{T} = \psi \circ T \circ \psi^{-1}$

$$\begin{array}{rcl} \overline{T}: \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \underline{e}_1 & \mapsto & (0, 3, 0, 0) \\ \underline{e}_2 & \mapsto & (0, 0, 2, 0) \\ \underline{e}_3 & \mapsto & (0, 0, 0, 1) \\ \underline{e}_4 & \mapsto & (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

ed abbiamo

$$(M_{\overline{T}})_{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$$

Abbiamo un solo autovalore, 0, di molteplicità algebrica 4. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica

$$\text{mg}(0) = 4 - rk \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} = 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq \text{ma}(0)$$

E $\bar{T}$ e quindi T non è diagonalizzabile.

Proposto: Esiste n tale che T^n è diagonalizzabile?

□

Esercizio 22.3. [NNS80] Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$

1. Calcolare gli autovalori di T .
2. Determinare se T è diagonalizzabile.
3. In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Lungo]

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-k)(\lambda^2+5\lambda+3)$$

le sue radici reali, e quindi gli autovalori di T sono $0, k, \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

2. Per vedere se T è diagonalizzabile, distinguiamo i vari casi

- (a) $k \neq 0, \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$. Abbiamo quattro autovalori distinti su $\mathbb{R}^4$, e T è quindi diagonalizzabile.
- (b) $k = 0$. Abbiamo $P_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2+5\lambda+3)$, un autovalore con molteplicità algebrica due e due autovalori con molteplicità algebrica uno. Le molteplicità geometriche degli autospazi associati a questi ultimi due autovalori sono forzate ad essere anch'esse uno. Vediamo

$$\begin{aligned} \text{mg}(0) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0, k=0} \\ &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 4 - 2 = 2 = \text{ma}(0) \end{aligned}$$

dato che abbiamo una riga di zeri e la prima e seconda riga sono opposte. Quindi T è diagonalizzabile.

(c) $k = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$. Abbiamo $p_T(\lambda) = \lambda \left(\lambda - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right)^2 \left(\lambda - \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \right)$. Come prima, basta calcolare

$$\begin{aligned} \text{mg} \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=k=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}} \\ &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dato che abbiamo una riga e colonna nulla e che, dopo qualche conto, vediamo che

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 & 1 \\ -1 & 1 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} & -1 \\ 3 & 0 & 3 - \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} = 25\sqrt{13} + 95$$

ed il rango che cerchiamo è 3, abbiamo

$$\text{mg} \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right) = 4 - 3 = 1 \neq \text{ma} \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right)$$

e quindi per $k = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ T non è diagonalizzabile.

(d) $k = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$ è lasciato per esercizio.

3. Determinare una base di autovettori è lasciato per esercizio. [Lungo]

□

Esercizio 22.4. [KL09] Sia $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo descritto da

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema

$$T^{10}((x, y, z)) + T^3((x, y, z)) = \underline{0}$$

Soluzione. Vediamo se T è diagonalizzabile, ed in caso affermativo opereremo con la sua forma diagonale. Calcoliamo gli autovalori di T da

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = F(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Dato che

$$F(\pm 1) = F(2) = 0$$

gli autovalori sono $\pm 1, 2$ e la matrice è diagonalizzabile. Sia B una base di autovettori di T , che esiste in quanto T è diagonalizzabile. Abbiamo per esempio

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esprimiamo il sistema usando $(M_T)_B^B$

$$\begin{aligned} T^{10}((x, y, z)) + T^3((x, y, z)) &= \underline{0} \\ ((M_T)_B^B)^{10} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + ((M_T)_B^B)^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \left[((M_T)_B^B)^{10} + ((M_T)_B^B)^3 \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{10} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underline{0} \end{aligned}$$

Il rango della matrice è 2, quindi la dimensione delle soluzioni del sistema è 1. □

Esercizio 22.5. [NNN50] Dato l'endomorfismo

$$\begin{aligned} T: \mathbb{K}^4 &\rightarrow \mathbb{K}^4 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (2y, x, -t, z) \end{aligned}$$

Dire se è diagonalizzabile al variare di $\mathbb{K}$ in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Soluzione. Abbiamo

$$T(\underline{e}_1) = (0, 1, 0, 0), \quad T(\underline{e}_2) = (2, 0, 0, 0), \quad T(\underline{e}_3) = (0, 0, 0, 1), \quad T(\underline{e}_4) = (0, 0, -1, 0)$$

e quindi

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si calcola facilmente dato che si tratta di una matrice a blocchi:

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1)$$

$\mathbb{Q}$ Non tutte le radici sono in $\mathbb{Q}$, e quindi T non è diagonalizzabile.

$\mathbb{R}$ Non tutte le radici sono in $\mathbb{R}$, e quindi T non è diagonalizzabile.

$\mathbb{C}$ Tutte le radici sono in $\mathbb{C}$, e sono tutte distinte. Quindi T è diagonalizzabile.

Notiamo che non basta che ogni riga e colonna di una matrice abbiano un solo elemento non nullo per garantire la diagonalizzabilità dell'endomorfismo associato. $\square$

Esercizio 22.6. [JJ93] Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di T .

2. Determinare il polinomio minimo di T .

3. Dire se T è diagonalizzabile.

Dimostrazione.

1. Determiniamo il polinomio caratteristico di T

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

2. Per calcolare il polinomio minimo di T fattorizziamo il polinomio caratteristico di T

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Procediamo con il metodo delle radici razionali. Le possibili radici sono

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Abbiamo

$$p_T(1) = 2 \quad p_T(-1) = 36 \quad p_T(2) = 0$$

Quindi $\lambda - 2$ è un fattore lineare di $d(\lambda)$. Dividendo $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$ per $\lambda - 2$ otteniamo $-\lambda^2 + 5\lambda - 6$. Fattorizziamo questo polinomio di secondo grado con la formula ed otteniamo

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

e quindi una fattorizzazione del polinomio caratteristico di T è

$$p_T(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

Dato che la il polinomio minimo deve essere monico, avere gli stessi fattori irriducibili del polinomio caratteristico e grado minore od uguale, abbiamo solo due possibilità per il polinomio minimo di T :

$$f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \quad \text{e} \quad g(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

Il polinomio minimo è tra questi due quello di grado minore che viene annullato da M . Dato che

$$\begin{aligned} f(M) &= (M - 2 \cdot I_3) \cdot (M - 3 \cdot I_3) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot I_3 \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot I_3 \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

il polinomio minimo di T è $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

3. Dato che il polinomio minimo ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ e nessun fattore multiplo, T è diagonalizzabile. □

Esercizio 22.7. [KL14] Sia $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo avente come autovettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{v}_3 = (0, 0, 1)$$

rispetto agli autovalori 1, 1, 2. Determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(T^3 - 4T^2 + 6T - 3I_3)(x, y, z) = \underline{0}$$

Soluzione. Determiniamo il polinomio caratteristico di T . Vogliamo vedere se i tre autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ siano linearmente indipendenti. Lo sono, basta controllare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Abbiamo quindi tre autovettori linearmente indipendenti, e quindi una base di autovettori. Allora T è diagonalizzabile, e dato che conosciamo gli autovalori, il polinomio caratteristico è dato da

$$P_T(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Sappiamo che T annulla il proprio polinomio caratteristico (Teorema di Cayley-Hamilton),

$$-T^3 + 4T^2 - 5T + 2I_3 = 0 \implies T^3 - 4T^2 + 5T - 2I_3 = 0$$

quindi l'equazione diviene

$$\begin{aligned} (T^3 - 4T^2 + 6T - 3I_3)(x, y, z) &= 0 \\ (T^3 - 4T^2 + 5T - 2I_3 + T - I_3)(x, y, z) &= 0 \\ (T - I_3)(x, y, z) &= 0 \\ ((M_T)_E^E - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

e dato che questo è un sistema omogeneo con matrice associata di rango 1, abbiamo ∞^2 soluzioni. $\square$

Si può provare a semplificare usando un'opportuna base B al posto di E_3 . Se T è diagonalizzabile (provare) si può usare una base di autovettori.

Esercizio 22.8. [KL12] Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di A .
2. Calcolare $A^{317} - A^{64}$.

Soluzione.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda$$

Quindi il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$.

2. Sappiamo che la matrice annulla il proprio polinomio caratteristico, quindi abbiamo che

$$P(A) = 0 \implies A^3 = A$$

Dato che $317 = 256 + 32 + 27 + 2 = 2^8 + 2^4 + 3^3 + 2$ abbiamo $A^{317} = A^{256} \cdot A^{32} \cdot A^{27} \cdot A^2$ da cui

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3 A = A \cdot A = A^2 \\ A^8 &= (A^4)^2 = A^2 \\ A^{64} &= (A^8)^8 = (A^2)^8 = (A^8)^2 = (A^2)^2 = A^4 = A^2 \\ A^{256} &= (A^{64})^4 = (A^2)^4 = A^8 = A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^9 &= (A^3)^3 = (A)^3 = A \\ A^{27} &= (A^9)^3 = A^3 = A \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{317} = A^{256} \cdot A^{32} \cdot A^{27} \cdot A^2 = A^2 \cdot A^2 \cdot A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3 = A$$

Quindi

$$A^{317} - A^{64} = A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rimarchiamo che si possono trovare altre strade per calcolare A^{317} , A^{64} .

Proposto: si può dimostrare facilmente per induzione che $A^{2^n} = A^2$ e $A^{3^n} = A$. Si veda se è possibile dare (e provare per induzione) una formula generale per A^{2^n} , A^{2n+1} e A^n . $\square$

Esercizio 22.9. [KL06] Si determini la matrice A associata ad un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sapendo che T ammette gli autovalori $1, -2$ e

$$V_1 = \text{Span}((1, 2)), \quad V_{-2} = \text{Span}((2, 1))$$

Soluzione. Scegliamo di determinare la matrice $(M_T)_{E_2}^{E_2}$.
questa matrice, generica, associata a T è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Imponiamo le due condizioni, per esempio imponendo che

$$T((1, 2)) = (1, 2) \text{ e } T((2, 1)) = -2 \cdot (2, 1)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dato che le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente, abbiamo che a, b, c, d devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ c + 2d = 2 \\ 2a + b = -4 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -4 \\ c + 2d = 2 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \cup \begin{cases} c + 2d = 2 \\ 2c + d = -2 \end{cases}$$

che hanno soluzioni

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$$

L'applicazione T è quindi associata alla matrice

$$(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedimento alternativo scegliendo una base che non sia E_2 :

Dato che i due vettori $\underline{v}_1 = (1, 2)$ e $\underline{v}_2 = (2, 1)$ sono linearmente indipendenti, formano una base B di $\mathbb{R}^2$.
Date le condizioni, abbiamo che

$$T(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 \text{ e } T(\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$$

quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata all'applicazione secondo la base B . □

Esercizio 22.10. [ES2122D] Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ \underline{v}_1 - \underline{v}_2 &\mapsto \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 &\mapsto \underline{v}_2 \end{aligned}$$

1. Determinare gli a tali che T sia iniettivo, surgettivo, isomorfismo.

Soluzione. Dato che $T(v_1 - v_2) = v_1 - v_2$, e quindi $v_1 - v_2$ è autovettore di T , prendiamo come base $B = v_1 - v_2, v_1$. Questi due vettori sono linearmente indipendenti dato che lo sono v_1, v_2 e quindi formano una base di $\mathbb{K}^2$. Vediamo di determinare l'immagine di v_1 . Abbiamo

$$\begin{aligned} &\begin{cases} T(v_1 - v_2) = v_1 - v_2 \\ T(av_1 + 2v_2) = v_2 \end{cases} \\ &\begin{cases} T(v_1) - T(v_2) = v_1 - v_2 \\ aT(v_1) + 2T(v_2) = v_2 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2T(v_1) - 2T(v_2) = 2v_1 - 2v_2 \\ aT(v_1) + 2T(v_2) = v_2 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2T(v_1) - 2T(v_2) = 2v_1 - 2v_2 \\ (a+2)T(v_1) = 2v_1 - v_2 = (v_1 - v_2) + v_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Se avessimo $a = -2$, avremmo $0 = 2v_1 - v_2$ e v_1, v_2 sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Quindi possiamo supporre per ipotesi che $a \neq -2$ e

$$T(v_1) = \frac{1}{a+2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{a+2}v_1$$

Date le immagini di $v_1 - v_2, v_1$ in base B abbiamo la matrice

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

che, dato $a \neq -2$, è non singolare e quindi l'endomorfismo T è invertibile e quindi un isomorfismo e quindi iniettivo e surgettivo.

Ricapitolando: dalle ipotesi discende necessariamente che $a \neq -2$. Per tutte le $a \neq -2$ l'endomorfismo T è isomorfismo, quindi iniettivo e surgettivo. $\square$

Esempio 22.11. [MMM50] Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi associato alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare p_T e una base di autovettori se possibile.

Soluzione: Determiniamo il polinomio caratteristico sviluppando il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

per la seconda colonna:

$$p_T(\lambda) = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Gli autovalori sono $-1, 1, 2$. Determiniamo le basi degli autospazi

1. V_{-1} . Una base è data dal ker della matrice

$$\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - (1)I_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Questo mi dice che $z = 0$ e $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$. Vettore generico $(-y, y, 0)$. Base $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0)$.

2. V_1 . Una base è data dal ker della matrice

$$\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - (-1)I_3\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo mi dice che $x = 0$ e $3y + z = 0 \Rightarrow z = -3y$. Vettore generico $(0, y, -3y)$. Base $\underline{v}_2 = (0, 1, -3)$.

3. V_2 . Una base è data dal ker della matrice

$$\left((M_T)_{E_3}^{E_3} - (2)I_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Questo mi dice che $x = z = 0$. Vettore generico $(0, y, 0)$. Base $\underline{v}_3 = (0, 1, 0)$.

I tre vettori $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0)$, $\underline{v}_2 = (0, 1, -3)$, $\underline{v}_3 = (0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Formano quindi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Rispetto a questa base,

$$(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Volendo verificare i conti, costruiamo le matrici $(M_T)_{E_3}^{E_3}$, $M_{E_3}^{\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}}^{E_3}$ e costruiamo $(M_T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ mediante il cambiamento di base:

```
MBE:=Mat[[-1, 0, 0],
          [1, 1, 1],
          [0, -3, 0]];
```

```
MEB:=Inverse(MBE);MEB;
Mat[[-1, 0, 0],
     [0, 0, -1/3],
     [1, 1, 1/3]];
```

```
MTEE:=Mat[[1, 0, 0],
           [1, 2, 1],
           [0, 0, -1]];
```

```
MEB*MTEE*MBE;
Mat[[1, 0, 0],
     [0, -1, 0],
     [0, 0, 2]]
```

Notiamo che le dimensioni dei ker sono sempre maggiori di 0, questo perché se c'è un autovalore, il ker deve contenere almeno un vettore non nullo. $\square$

Esempio 22.12. [NNN00] Abbiamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi, con $k \in \mathbb{R}$

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ ax^2 + bx + c & \mapsto & (a + kb)x^2 + (ka + b)x + kc \end{array}$$

Dire, al variare di k , se T è diagonalizzabile.

Soluzione: Poniamoci in $\mathbb{R}^3$ con l'isomorfismo

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x^2 & \mapsto & \underline{e}_1 \\ x & \mapsto & \underline{e}_2 \\ 1 & \mapsto & \underline{e}_3 \end{array}$$

Possiamo quindi interpretare T come l'endomorfismo

$$\overline{T}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) & \mapsto & (a + kb, ka + b, kc) \end{array}$$

ed abbiamo

$$\overline{T}(\underline{e}_1) = (1, k, 0) \quad \overline{T}(\underline{e}_2) = (k, 1, 0) \quad \overline{T}(\underline{e}_3) = (0, 0, k)$$

Quindi

$$(M_{\overline{T}})_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e si vede facilmente, sviluppando

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & k & 0 \\ k & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k - \lambda \end{pmatrix}$$

per la terza riga, che

$$p_{\overline{T}}(\lambda) = (k - \lambda)((1 - \lambda)^2 - k^2) = (k - \lambda)(1 - \lambda - k)(1 - \lambda + k) = -(\lambda - k)(\lambda - (1 - k))(\lambda - (1 + k))$$

e quindi i tre autovalori sono $k, 1 - k, 1 + k$.

Vediamo i vari casi

1. I tre autovalori possono essere tutti coincidenti? Vorrebbe dire che k soddisfa

$$\begin{cases} k = 1 - k \\ k = 1 + k \end{cases} \quad \text{che non ha soluzioni.}$$

Quindi i tre autovalori non possono essere tutti e tre coincidenti.

2. Due soli autovalori coincidenti. Abbiamo i tre casi

(a) $k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$. Abbiamo

$$p_{\overline{T}} = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$$

con $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ di molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di λ_2 è forzata ad essere 1. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ è

$$\left(3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}\right)_{k=\frac{1}{2}, \lambda=\frac{1}{2}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

e quindi per $k = 0$ $\overline{T}$ è diagonalizzabile.

(b) $k = 1 + k$. Impossibile.

(c) $1 - k = 1 + k \Rightarrow k = 0$. Abbiamo

$$p_{\overline{T}} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

con $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 0$ è forzata ad essere 1. La molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 1$ è

$$\left(3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix}\right)_{k=0, \lambda=1} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 2$$

e quindi per $k = 0$ l'endomorfismo $\overline{T}$ è diagonalizzabile.

3. Se $k \neq \frac{1}{2}, 0$, i tre autovalori sono tutti distinti e $\overline{T}$ (e quindi T) è diagonalizzabile.

Riassumendo, l'endomorfismo $\overline{T}$ (e quindi l'endomorfismo T) è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 22.13. [ES03] Sia dato $b \in \mathbb{R}$ e il morfismo T associato alla matrice

$$B = (M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ -b & b+1 & b \\ b & 0 & -b \end{pmatrix}$$

1. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ calcolare il polinomio caratteristico di T .
2. Esistono valori di b tali che il polinomio minimo di T abbia grado < 3 ?
3. Esistono valori di b tali che T sia diagonalizzabile?

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico di T è $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$, come si può vedere sviluppando con Laplace secondo la terza riga od operando una parziale riduzione di Gauss sulla matrice $B - \lambda \cdot I_3$. Ricordiamo che la riduzione con Gauss della matrice B non dà in genere una matrice simile a B e quindi in genere il polinomio caratteristico della matrice ridotta non è uguale a quello della matrice di partenza.
2. Il polinomio minimo di T va cercato tra i seguenti candidati: i divisori del polinomio caratteristico che sono divisi da $\text{sqr}(-\lambda(\lambda - 1)^2) = \lambda(\lambda - 1)$:

$$\lambda(\lambda - 1), \quad \lambda(\lambda - 1)^2$$

Esaminiamo i due casi

- $\text{PM}_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. Dovremmo avere

$$\text{PM}_T(B) = B \cdot (B - I_3) = \begin{pmatrix} -b^2 - b & b^2 + b & b^2 + b \\ -b & b & b \\ -b^2 & b^2 & b^2 \end{pmatrix} = 0$$

e questo è vero se e solo se $b = 0$.

Quindi se $b = 0$ $\text{PM}_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. e questo è un polinomio minimo libero da quadrati con tutte le radici in $\mathbb{R}$, e quindi in questo caso T è diagonalizzabile.

3. $\text{PM}_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, e quindi $b \neq 0$: dato che il polinomio minimo non è libero da quadrati, il morfismo T non è diagonalizzabile.

□

Proposizione 22.14. [NNU02] *Ogni matrice A in forma di Jordan è la somma di una matrice diagonale D e una nilpotente N .*

Dimostrazione. La matrice A è data ha non nulla la diagonale e la sovradiagonale. La prima ci dà una matrice diagonale D , mentre la seconda ci dà una matrice N in cui solo la sovradiagonale è non nulla. È facile dimostrare (fatelo per esercizio) che N è nilpotente. □

Corollario-Definizione 22.15. [NNU05] *Data una matrice quadrata $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\underline{k})$ Jordanizzabile, le matrici D , N la cui somma dà la forma di Jordan di A si dicono rispettivamente parte diagonale e parte nilpotente di M .*

22.2 Esercizi proposti

Esercizio 22.16. [M152] *Sia $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione $\mathbb{R}$ -lineare con matrice associata*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Discutere la diagonalizzabilità di T al variare di k in $\mathbb{R}$.

Esercizio 22.17. [LL65] *Sia $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione $\mathbb{R}$ -lineare con matrice associata*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dire se T è diagonalizzabile.

Esercizio 22.18. [LL64] *Sia*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y + 3z, x + y - z) \end{aligned}$$

un endomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi. Dire se è diagonalizzabile ed in questo caso determinare una base B tale che $(M_T)_B^B$ sia diagonale.

Esercizio 22.19. [LLL64] Sia

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y + 3z, x + y + z)$$

un endomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi. Dire se è diagonalizzabile ed in questo caso determinare una base B tale che $(M_T)_B^B$ sia diagonale.

Esercizio 22.20 (Difficile). [LL89] Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

Per quali valori di k l'endomorfismo associato ad A dalla base canonica è diagonalizzabile?

Esercizio 22.21. [LL92] Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che la matrice associata dalla base canonica sia

$$A_f: \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 3 & 2 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Per quali $h \in \mathbb{R}$ il morfismo f è un isomorfismo?
2. Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$ gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
3. Per quali $h \in \mathbb{R}$ il morfismo f è diagonalizzabile?

Esercizio 22.22. [UI21]

Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\underline{v}_1 = (0, 1, -1)$, $\underline{v}_2 := (2, 0, 1)$ e $\underline{v}_3 := (1, 2, 0)$.

1. Verificare che esiste un unico endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ come autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori $0, 3, 6$.
2. Determinare M_f , $\ker(f)$ ed $\text{Im}(f)$ rispetto a un opportuna base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 22.23. [NNN09] Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R}),$$

Determinare il polinomio minimo di T e dire se T è diagonalizzabile.

Esercizio 22.24. [NNN92] Determinare autovettori, autovalori, polinomio minimo e caratteristico degli endomorfismi associati alle seguenti matrici, e dire se sono diagonalizzabili su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -2 & 10 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 14 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -8 & 4 & -3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -10 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ -13 & -1 & -3 & 26 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & 0 & 7 \\ -14 & -1 & -3 & 28 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$4. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & -8 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -8 & -6 & -4 & -4 \\ 12 & 8 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 22.25. [NNN99] Dato l'endomorfismo

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t) \end{array}$$

determinare autovettori ed autovalori di T , e dire se T è diagonalizzabile

Esercizio 22.26. [NNN98] Dato $a \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo

$$T_a: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t - a) \end{array}$$

Al variare di a determinare autovettori ed autovalori di T_a , e dire se T è diagonalizzabile.

Esercizio 22.27. [NNN97] Dato l'endomorfismo

$$T: \begin{array}{ccc} \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+2b & b-c \\ c-d & a+b+c \end{pmatrix} \end{array}$$

determinare autovettori ed autovalori di T , e dire se T è diagonalizzabile.

Esercizio 22.28. [NNN96] Determina se possibile due matrici di $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ che abbiano uguale polinomio caratteristico ma non siano simili.

Esercizio 22.29. [NNN95] Determina se possibile due matrici di $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ che abbiano uguale polinomio caratteristico ma non siano simili.

Esercizio 22.30. [NNQ96] Determina se possibile due matrici di $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ che abbiano uguale polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.

Esercizio 22.31. [NNQ95] Determina se possibile due matrici di $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ che abbiano uguale polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.

Esercizio 22.32. [NNN94] Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, con $\dim V$ finita e $T^k \equiv 0$. Dimostrare che T è diagonalizzabile se e solo se $T \equiv 0$.

Esercizio 22.33. [NNN84] Trovare un $T: V \rightarrow V$ endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, con $\dim V = 4$ tale che $T \neq 0$ ma $T^2 \equiv 0$.

Esercizio 22.34. [NNN93] Trovare un $T: V \rightarrow V$ endomorfismo di $\mathbb{K}$ -spazi, con $\dim V = 4$ tale che $T^2 \neq 0$ ma $T^3 \equiv 0$.

Esercizio 22.35. [JJ08] Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Determinare autovalori ed autovettori di A . A è diagonalizzabile?

2. Determinare autovalori ed autovettori di A^2 . A^2 è diagonalizzabile?

3. La matrice A^3 è diagonalizzabile?

4. La matrice A^{1003} è diagonalizzabile?

Esercizio 22.36. [NNN88] Dato $k \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \rightarrow & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ a^2 + bx + c & \mapsto & x^2 + (a + b + c)x + k \end{array}$$

Al variare di k

1. Calcolare gli autovalori di T .
2. Determinare se T è diagonalizzabile.
3. In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Calcoli lunghi]

Esercizio 22.37. [NNN80] Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato dalla base canonica alla matrice

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$

1. Calcolare gli autovalori di T .
2. Determinare se T è diagonalizzabile.
3. In caso affermativo, determinare una base di autovettori. [Difficile]

Esercizio 22.38. [NNN90] Calcolare, se del caso al variare di $a, b, k \in \mathbb{R}$ il polinomio minimo delle seguenti matrici

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+1 & 1 & 0 \\ 0 & b+2 & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4,4}(\mathbb{R})$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4,4}(\mathbb{R})$

Esercizio 22.39. [NNU01] Data una matrice in forma di Jordan $J_{p_1}(\lambda_1), \dots, J_{p_k}(\lambda_k)$, dimostrare che la parte nilpotente ha ordine $\max_i(p_1, \dots, p_k)$.

Esercizio 22.40. [NNU98] *Determinare la forma di Jordan delle seguenti matrici. Le ultime due matrici richiedono calcoli lunghi.*

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

5.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

6.

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

7.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 12 & 4 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Capitolo 23

Ventitreesima lezione - Radici e fattorizzazione di Polinomi

23.1 Preliminari

Gli argomenti di questa sezione sono solo per ricordare degli argomenti studiati alla scuola secondaria. Non verranno chiesti all'esame, ma per svolgere i conti successivi, è necessario conoscerli.

23.1.1 Polinomi su un campo - fattorizzazioni

Osservazione 23.1. [AAA02] *Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ricordiamo le formule*

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
2. $a^2 + b^2 =_{\mathbb{C}} (a + ib)(a - ib)$. *Non si può fattorizzare su $\mathbb{R}$.*
3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
5. *Teorema del Binomio [Dimostrazione per induzione. Cfr. corso di Analisi.]*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

dove $\binom{n}{i}$ è l'elemento della n -esima riga, i -esima colonna del triangolo di Tartaglia. Ricordiamo che

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \text{dove } n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ e } 0! = 1$$

Divisione con resto

Come per gli interi, nei polinomi su un campo si può definire una divisione con resto.

Proposizione 23.2 (Divisione con resto). [AAC02] *Dati i due polinomi in $\mathbb{K}[x]$*

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

esistono unici $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \text{ con } r(x) = 0 \text{ o } \deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

Esempio 23.3. [AAA80] *Esempio di divisione. Dividiamo $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, per $x^3 + x$*

DivPoly($x^4+x^3-2x^2-3x+1, x^3+x$);

Passo 1 ho $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ multiplico per x

Passo 1 sottraggo $x^4 + x^2$

Passo 1 ottengo $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

Passo 2 ho $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ multiplico per 1

Passo 2 sottraggo $x^3 + x$

Passo 2 ottengo $-3x^2 - 4x + 1$

Resto= $-3x^2 - 4x + 1$

Quoto= $x + 1$

Quindi

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x^3 + x)(x + 1) + (-3x^2 - 4x + 1)$$

23.1.2 Irriducibili e fattorizzazioni, Fattorizzazione unica

Generalizziamo alcune proprietà di $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{K}[x]$.

Definizione 23.4. [AAA26] *Siano $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, con $\deg(f(x)) \geq \deg(g(x)) > 0$. Allora diciamo che $g(x)$ divide $f(x)$ se dividendo $f(x)$ per $g(x)$ abbiamo un resto nullo.*

Discende immediatamente dalla definizione precedente che

Osservazione 23.5. [AAB26] *Siano $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, con $\deg(f(x)) \geq \deg(g(x)) > 0$. Allora diciamo che $g(x)$ divide $f(x)$ se esiste $q(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\deg q(x) > 0$ tale che $f(x) = q(x)g(x)$.*

Definizione 23.6. [AAA27] *Un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado ≥ 1 che non abbia divisori propri (di grado maggiore di 0) si dice irriducibile. Un polinomio che non sia irriducibile si dice riducibile. Gli elementi di $\mathbb{K}$ si indicano spesso come scalari.*

Osservazione 23.7. [AAW27] *Se un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado ≥ 1 è riducibile, dalla definizione di divisione esistono due polinomi $g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado ≥ 0 tali che $f(x) = g(x) \cdot h(x)$*

Esempio 23.8. [AAA30]

- Tutti i polinomi di grado 1 sono irriducibili, su qualunque rpo.
- Un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ in $\mathbb{R}[x]$
 1. Se ha discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ negativo, è irriducibile.
 2. Se ha discriminante Δ positivo, è riducibile in due fattori di grado 1 (lineari) di molteplicità 1, e precisamente

$$p(x) = \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

3. Se ha discriminante Δ nullo, è riducibile con un fattore di grado 1 (lineare) (si dice che questo fattore ha molteplicità 2), e precisamente

$$p(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

- $x^4 - 4$ è riducibile sia in $\mathbb{Q}[x]$ che in $\mathbb{R}[x]$, dato che $x^4 - 1 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$. Questa è una fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{Q}[x]$ ma non su $\mathbb{R}[x]$, mentre lo è la seguente

$$x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$$

dove i primi due fattori sono irriducibili in quanto di grado 1, mentre per il terzo lo è perché ha Δ negativo.

Osservazione 23.9. Nella divisibilità e per l'irriducibilità possiamo trascurare fattori invertibili (scalari).

- Il polinomio $2x - 2$ divide il polinomio $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, dato che $x - 1 = \frac{1}{2} \cdot (2x - 2)$
- Il polinomio $2x - 2$ è irriducibile, dato che il polinomio $x - 1$ è irriducibile.

Teorema 23.10 (Teorema Fattorizzazione Unica). [AAA28] Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Allora esistono unici polinomi $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ irriducibili distinti e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^+$ (interi positivi) tali che

$$f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i} = f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_n(x)^{\alpha_n}$$

I polinomi $f_i(x)$ si dicono fattori irriducibili di $f(x)$ e i naturali α_i sono le loro molteplicità.

Esempio 23.11. [AAA29] Dato $f(x) = x^4 - 1$, una sua fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ è

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Esempio 23.12. [AAH29] Ricordando l'esercizio 24.19

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

per la fattorizzazione unica, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Osservazione 23.13. [AAA34] Per risolvere un'equazione polinomiale in una variabile, fattorizzare il polinomio è un aiuto, spesso sostanziale.

Problema 23.14. [AAA35] Fattorizzare un polinomio. Se non è possibile, posso dire se il polinomio è irriducibile? Posso dire se due polinomi sono coprimi se non riesco a fattorizzarli?

23.1.3 Radici e Ruffini

Definizione 23.15. [AAA41] Sia $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e $c \in \mathbb{K}$. Allora il numero reale

$$f(c) = \sum_{i=0}^n a_i c^i$$

è detto valutazione di $f(x)$ in c .

Definizione 23.16. [AAA42] Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$. Se $f(a) = 0$ allora a è detta radice del polinomio $f(x)$.

Dalle sue radici possiamo trovare tutti e soli i fattori lineari di un polinomio sui razionali.

Teorema 23.17 (Teorema di Ruffini). [AAA45] Sia $f(x)$ un polinomio in $\mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$. Allora

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \mid f(x)$$

Ovvero a è una radice di $f(x)$ se e solo se $x - a$ è un fattore di $f(x)$,

Osservazione 23.18. Dato che ci sono infinite possibilità per le radici, abbiamo bisogno di un criterio che ci dica quali dobbiamo provare. Questo criterio esiste su $\mathbb{Q}$ ma non su $\mathbb{R}$.

Teorema 23.19 (Teorema delle Radici). [AAA43] Sia

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$$

un polinomio di grado n (e quindi con $a_n \neq 0$) con coefficienti in $\mathbb{Z}$. Allora abbiamo che tutte le radici razionali sono date da un divisore del termine noto diviso un divisore del termine di testa. Ovvero, se $b_1, \dots, b_k$ sono i divisori del termine di testa $a_n \in \mathbb{Z}$ e $c_1, \dots, c_p$ i divisori del termine noto a_0 abbiamo che, per $a \in \mathbb{Q}$

$$f(a) = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{c_i}{b_j} \quad \text{per opportuni } i : 1 \dots k, \quad j : 1 \dots p$$

Esempio 23.20. [AAA44] Cerchiamo le radici razionali del polinomio $2x^3 - x^2 - 6x + 3$. I divisori del termine di testa sono 1, 2. I divisori del termine noto sono 1, 3. Le possibili radici razionali sono quindi

$$\pm \frac{1}{1} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{1} = \pm 3, \pm \frac{3}{2}$$

Vediamo quali delle possibili radici razionali è effettivamente radice, usando il Teorema di Ruffini

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 & f(-1) &= 6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{11}{2} \\ f(3) &= 30 & f(-3) &= -42 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= -\frac{3}{2} & f\left(-\frac{3}{2}\right) &= 3 \end{aligned}$$

Quindi l'unica radice razionale è $\frac{1}{2}$ ed il nostro polinomio è diviso da $x - \frac{1}{2}$. Infatti

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 6x + 3 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 6) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)2(x^2 - 3) \\ &= (2x - 1)(x^2 - 3) \end{aligned}$$

Vediamo quindi che ci sono anche le due radici reali non razionali $\pm\sqrt{3}$, che non abbiamo potuto trovare col Teorema delle Radici 23.19.

Osservazione 23.21. [AAA47] Notiamo che se $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $f(a/b) = 0$, allora $(bx - a) \mid f(x)$.

Osservazione 23.22. [AAA48] *Discende dal Teorema di Ruffini e dalla proposizione sulla divisione con resto per polinomi che un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ non nullo ha al più tante radici quanto è il suo grado.*

Osservazione 23.23. [AAA49] *Due polinomi $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado n con n radici uguali sono uguali a meno di un fattore invertibile.*

Esempio 23.24. [AAB55] *Il polinomio*

$$f(x) = \frac{5}{8}x^5 + \frac{1}{12} = \frac{1}{24}(15x^5 + 2)$$

è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$ dato che è il prodotto di un elemento invertibile e del polinomio $15x^5 + 2$ che è irriducibile per Eisenstein, $p = 2$ (cfr. 24.1).

Osservazione 23.25. [AAA56] *Un polinomio è irriducibile o meno a seconda del campo che consideriamo. Per esempio,*

$$(x^4 - 4) = (x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

la prima è una fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{Q}[x]$, la seconda in $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 23.26. [AAA95] [Proposto] *Dimostrare che se $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ e $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{K}_2$ allora è irriducibile su $\mathbb{K}_1$. Il viceversa è falso.*

Definizione 23.27. [AAA88] *Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ con $LC(f(x)) = 1$ (il coefficiente del termine di testa è 1). Allora il polinomio $f(x)$ si dice monico.*

Esempio 23.28. [AAA89] *Il polinomio $x^5 + 3x - 1$ è monico. Il polinomio $2x + 3$ non lo è.*

23.2 Massimo comun divisore, minimo comune multiplo

Definizione-Proposizione 23.29 (Massimo Comun Divisore, Minimo Comune Multiplo). [AAA57]

Dati $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$.

- *Il massimo comun divisore di $f(x), g(x)$ è il polinomio monico di grado massimo tra quelli che dividono sia $f(x)$ che $g(x)$. Tale polinomio esiste a meno che entrambi $f(x)$ e $g(x)$ siano nulli. Si scrive $\gcd(f(x), g(x))$.*
- *Il minimo comune multiplo di $f(x), g(x)$ è il polinomio monico di grado minimo tra quelli che sono divisi sia da $f(x)$ che da $g(x)$. Tale polinomio esiste sempre. Si scrive $\text{lcm}(f(x), g(x))$.*
- *Notiamo che $\forall f(x) \in \mathbb{K}[x], f(x) \neq 0 \quad \gcd(f(x), 0) = f(x)$. (Tutti gli elementi di un anello dividono 0)*

Esempio 23.30. [AAZ58]

- $\gcd(3x - 3, 2x - 2) = x - 1$.
- $\gcd(x^2 - 4, x - 2) = x - 2$.
- $\gcd(x^2 + 1, x - 1) = 1$.
- $\gcd((x - 1)^2(x - 2), (x - 1)^3(x - 3)) = (x - 1)^2$.

Problema 23.31. [AAA58] *Come calcolare il massimo comun divisore di due polinomi?*

Come per il gcd in $\mathbb{Z}$, notiamo alcuni fatti utili.

Proposizione 23.32. [AAA59] Siano $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i}$ e $g(x) = \prod_{i=1}^m g_i(x)^{\beta_i}$ due polinomi in $\mathbb{K}[x]$. Allora

1. Il massimo comun divisore di $f(x), g(x)$ è dato dal prodotto di tutti i fattori comuni ai due polinomi presi una sola volta con minimo esponente.
2. Il minimo comune multiplo di $f(x), g(x)$ è dato dal prodotto di tutti i fattori comuni e non comuni ai due polinomi presi una sola volta con massimo esponente.

Esempio 23.33. [AAA60] Dati i due polinomi

$$h(x) = (x+1)^4(x-1)(x^2+1)^3 \quad p(x) = (x+1)^2(x-1)^2(x^2+2)^3$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \gcd(h(x), p(x)) &= (x+1)^{\min(4,2)}(x-1)^{\min(1,2)} = (x+1)^2(x-1) \\ \text{lcm}(h(x), p(x)) &= (x^2+1)^3(x^2+2)^3(x+1)^{\max(4,2)}(x-1)^{\max(1,2)} \\ &= (x^2+1)^3(x^2+2)^3(x+1)^4(x-1)^2 \end{aligned}$$

Proposizione 23.34. [AAA82] Conservando la notazione della proposizione precedente, notiamo alcuni fatti utili:

1. Notiamo che per ogni $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ monici abbiamo che

$$\gcd(f(x), g(x)) \cdot \text{lcm}(f(x), g(x)) = f(x) \cdot g(x)$$

Se $f(x), g(x)$ non sono monici, l'uguaglianza vale a meno di un fattore invertibile.

2. $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(g(x), f(x))$
3. Dati $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$ possiamo definire

$$\gcd(f(x), g(x), h(x)) = \gcd(\gcd(f(x), g(x)), h(x))$$

Abbiamo altresì

$$\gcd(\gcd(f(x), g(x)), h(x)) = \gcd(f(x), \gcd(g(x), h(x)))$$

4. Se $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ per opportuni $q(x), r(x)$, allora

$$\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(q(x)g(x) + r(x), g(x)) = \gcd(g(x), r(x))$$

Dimostrazione. Tutte queste proprietà discendono immediatamente dall'equivalenza delle tre definizioni del gcd. $\square$

Problema 23.35. [AAA61] Calcolare il gcd a partire da polinomi già fattorizzati è semplice, ma fattorizzare polinomi è difficile. Il problema è rilevante.

23.3 Algoritmo Euclideo

Proposizione 23.36 (Algoritmo Euclideo). [AAA63] Dati $f_0(x), f_1(x) \in \mathbb{K}[x]$, con $\deg f_0(x) \geq \deg f_1(x) > 0$. Sia

$$f_i(x) = q_i(x)f_{i+1}(x) + f_{i+2}(x)$$

la divisione con resto di $f_i(x)$ rispetto a $f_{i+1}(x)$, per opportuni $q_i(x)$. La sequenza di coppie

$$(f_i(x), f_{i+1}(x)) \longrightarrow (f_{i+1}(x), f_{i+2}(x))$$

termina con una coppia $(g(x), 0)$, e il gcd di ogni coppia è lo stesso, per cui $\gcd(f_0(x), f_1(x)) = g(x)$.

Osservazione 23.37. [AAA83] La definizione 23.29 e le proposizioni 23.32, 23.36 ci danno tre definizioni equivalenti di gcd. Possiamo usare caso per caso quella che ci viene più comoda.

Un esempio di esecuzione dell'algoritmo euclideo sugli interi. È lo stesso meccanismo dei polinomi, ma la semplicità dei conti lo rende più comprensibile.

Esempio 23.38. [AAA93] Calcoliamo $\gcd(256, 211)$

(256, 211)	256 = 211 + 45
(211, 45)	211 = 4 · 45 + 31
(45, 31)	45 = 31 + 14
(31, 14)	31 = 2 · 14 + 3
(14, 3)	14 = 4 · 3 + 2
(3, 2)	3 = 2 + 1
(2, 1)	2 = 2 · 1 + 0
(1, 0) ⇒ gcd(256, 211) = 1	

Notiamo che appena è comparso (45, 31) avremmo potuto dire che $\gcd(45, 31) = 1$, dato che 31 è primo e 45 non è una potenza di 31. Avremmo anche potuto vedere immediatamente che $\gcd(256, 211) = 1$ dato che $256 = 2^8$ è una potenza di 2, e 211 è dispari.

Esempio 23.39. [AAA64] Sospettiamo già che il $\gcd(x^6 - 1, x^5 - 1)$ sia $x - 1$. Verifichiamolo con l'Algoritmo Euclideo

`GCDPolyVerbose(x^6-1,x^5-1);`

```
(x^6-1,x^5-1)
(x^6 - 1)=(x)*(x^5 - 1)+(x - 1)
```

```
(x^5-1,x - 1)
(x^5 - 1)=(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)*(x - 1)+(0)
```

```
(x - 1,0)
```

Quindi $\gcd(x^6 - 1, x^5 - 1) = x - 1$

Proposizione 23.40. [AAA70] Dati $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

1. $\gcd(f(x), ag(x)) = a \cdot \gcd(f(x), g(x)) = \gcd(f(x), g(x))$. Ovvero possiamo, durante il calcolo del gcd, raccogliere e portare fuori scalari.
2. $h(x) \mid \gcd(g(x) \cdot h(x), g(x) \cdot h(x))$. Ovvero possiamo, durante il calcolo del gcd, raccogliere e portare fuori fattori comuni.
3. Se $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ è coprimo con $f(x)$, $g(x)$ ho che

$$\gcd(f(x), h(x)g(x)) = \gcd(f(x), g(x))$$

Posso quindi eliminare un fattore che sia coprimo con entrambi i polinomi.

4. In $\mathbb{K}[x]$ un polinomio irriducibile non è coprimo solo con le sue potenze proprie. Quindi, un polinomio irriducibile è coprimo con ogni polinomio di grado minore del suo.

Ricordiamo che

Definizione 23.41. [AAA72] Un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ che abbia fattorizzazione su $\mathbb{K}[x]$ in irriducibili distinti di molteplicità 1, ovvero

$$\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i} \quad \text{con } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$$

si dice squarefree.

Definizione 23.42. [AAA73] Dato $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ definiamo come la derivata FORMALE di $f(x)$ il polinomio in $\mathbb{K}[x]$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

Esempio 23.43. [AAA74]

$$(3x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3)' = 15x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$$

Proposizione 23.44. [AAA75] Dati $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ abbiamo che

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
3. $\deg f'(x) = \deg f(x) - 1$.
4. La derivata di una costante è 0.

Dimostrazione. In ogni caso, basta applicare la definizione di derivata formale e fare i conti □

23.4 Criterio della derivata

Teorema 23.45. [AAA76] [Criterio della molteplicità o del gcd] Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ e una sua fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{K}[x]$

$$f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i}$$

Allora

1. $\gcd(f(x), f'(x)) = \prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}$.
2. $f(x)$ è squarefree se e solo se $\gcd(f(x), f'(x)) = 1$.
3. Il polinomio $\frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))}$ è squarefree, e ovviamente è un fattore di $f(x)$, come lo è $\gcd(f(x), f'(x))$.

Dimostrazione non vista in classe, e non richiesta.

1. Per le regole di derivazione del prodotto e della somma,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_n(x)^{\alpha_n})' \\
 &= \alpha_1 f_1(x)^{\alpha_1-1} f_2(x)^{\alpha_2} \cdots f_n(x)^{\alpha_n} + \cdots \\
 &\quad + f_1(x)^{\alpha_1} \alpha_2 f_2(x)^{\alpha_2-1} f_3(x)^{\alpha_3} \cdots f_n(x)^{\alpha_n} + \cdots \\
 &\quad + f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_{n-1}(x)^{\alpha_{n-1}} \alpha_n f_n(x)^{\alpha_n-1} \\
 &= \prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} f_j^{\alpha_j} \right)
 \end{aligned} \tag{23.1}$$

raccogliendo il fattore $\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}$ comune a tutti gli addendi. Vediamo che

- il polinomio $\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}$ divide sia $f(x)$, per costruzione, che $f'(x)$.
- Si può dimostrare [Lasciato per esercizio] che un polinomio che divida sia $f(x)$ che $f'(x)$ deve necessariamente essere diviso da $\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}$ e che quindi $\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}$ è il divisore comune di grado maggiore possibile ed abbiamo

$$\gcd(f(x), f'(x)) = \prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}$$

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))} &= \frac{\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i}}{\prod_{i=1}^n f_i(x)^{\alpha_i-1}} \\
 &= f_1(x) \cdots f_n(x)
 \end{aligned}$$

e quindi $f(x)$ è squarefree se e solo se $\gcd(f(x), f'(x)) = 1$.

3. Segue immediatamente da quanto sopra.

□

Definizione-Proposizione 23.46. [AAA31] *Se due polinomi in $\mathbb{K}[x]$ non hanno fattori irriducibili comuni, allora $f(x), g(x)$ sono detti coprimi. Notiamo che $f(x), g(x)$ sono coprimi se e solo se $\gcd(f(x), g(x)) = 1$.*

Definizione 23.47. [AAA50] *Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$ una sua radice. Allora a è detta radice di molteplicità k del polinomio $f(x)$ se e solo se il fattore irriducibile $x-a$ ha molteplicità k nella fattorizzazione in irriducibili di $f(x)$. Alternativamente, se e solo se*

$$(x-a)^k \mid f(x) \text{ e } (x-a)^{k+1} \nmid f(x)$$

Esempio 23.48. [AAA51] Dato $f(x) = x^2(x-1)(x+2)^3$, abbiamo che $f(x)$ ha tre radici, $0, 1, -2$, di molteplicità rispettiva $2, 1, 3$.

Esempio 23.49. [AAA33] I polinomi

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \quad x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$$

sono coprimi. I polinomi

$$x^4 - 1, \quad 7x^3 - 7$$

non lo sono, visto che hanno a fattore comune $x-1$.

23.5 Fattorizzazioni in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ricordiamo il

Teorema 23.50 (Teorema fondamentale dell'Algebra). [BBR70] Un polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha esattamente n radici complesse, non necessariamente distinte.

Corollario 23.51. [BBB71] Per ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ non necessariamente distinti tali che

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

Gli unici polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ sono lineari.

Osservazione 23.52. [BBB72] Determinare esplicitamente le radici (i fattori lineari) di un polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ è in genere impossibile. Si conoscono formule per i polinomi di grado $2, 3, 4$ ed è stato dimostrato che non esiste una formula esatta che usi solo i radicali per polinomi di grado ≥ 5 .

Notiamo che quando risolviamo un'equazione di secondo grado a discriminante negativo troviamo due soluzioni complesse coniugate

Esempio 23.53. [BBB86]

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Osservazione 23.54. [BBB58] Notiamo altresì che dato $z_0 \in \mathbb{C}$, il prodotto dei due fattori lineari $(x - z_0)$, $(x - \overline{z_0})$, che stanno in $\mathbb{C}[x]$, è un polinomio in $\mathbb{R}[x]$, e precisamente

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2(\operatorname{Re}(z_0))x + |z_0|^2$$

Infatti, se $z_0 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ e ricordando che la parte reale Re di z_0 è a e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\begin{aligned} (x - (a + ib))(x - \overline{a + ib}) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib)) \\ &= x^2 - x(a - ib) - (a + ib)x + (a + ib)(a - ib) \\ &= x^2 - xa + xib - xa - ibx + a^2 + b^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)x + |z_0|^2 \end{aligned}$$

Quindi fattorizziamo un polinomio di secondo grado a discriminante negativo in due fattori lineari complessi "coniugati", e il prodotto di due fattori lineari complessi "coniugati" mi dà un polinomio reale.

Possiamo generalizzare alla fattorizzazione di polinomi di grado superiore?

Proposizione 23.55. [BBB73] Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora se z_0 è radice, anche il coniugato di z_0 lo è, e con la stessa molteplicità. Più precisamente, se indichiamo con $\mu(\cdot)$ la molteplicità,

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow f(\overline{z_0}) = 0 \text{ e } \mu(z_0) = \mu(\overline{z_0})$$

Non svolta in classe. Sia

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ con } a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$$

un polinomio di grado n . Allora, per le proprietà del coniugio,

$$\begin{aligned} f(\overline{z}) &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{f(z)} \end{aligned}$$

dato che $\forall i : 0 \dots n, a_i = \overline{a_i}$. Quindi

$$z_0 \text{ è radice} \Leftrightarrow f(z_0) = 0 \Leftrightarrow \overline{f(z_0)} = 0 \Leftrightarrow f(\overline{z_0}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z_0} \text{ è radice}$$

Vediamo di dimostrare che z_0 e $\overline{z_0}$ hanno la stessa molteplicità.

$$z_0 \text{ radice} \Rightarrow \overline{z_0} \text{ radice} \Rightarrow \exists q(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ t.c. } f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})q(x)$$

per il Teorema di Ruffini. ma quindi, se $z_0 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dato che $\text{Re}(z_0) = \text{Re}(a + ib) = a$ e ricordando l'esercizio 23.54 precedente

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - 2\text{Re}(z_0)x + |z_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$$

è un fattore di $f(x)$, e dato che sta in $\mathbb{R}[x]$, anche $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le radici non reali di $f(x)$ sono quindi coniugate a coppie e

$$f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i) \cdot \prod_{j=0}^m P_j(x)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $P_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ del tipo $x^2 - 2\text{Re}(w_j)x + |w_j|^2$ per qualche opportuna radice di $f(x)$ $w_j \in \mathbb{C}$. Notiamo che $\deg(f(x)) = k + 2m$. Raccogliendo se del caso i fattori uguali otteniamo la fattorizzazione in irriducibili

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k'} (x - \alpha_i)^{\beta_i} \cdot \prod_{j=0}^{m'} P_j(x)^{\gamma_j}$$

Per il teorema di fattorizzazione unica su $\mathbb{R}[x]$, questa fattorizzazione è unica. Quindi ad ogni fattore $x - z_0$ corrisponde uno ed un solo fattore del tipo $x - \overline{z_0}$ e quindi segue che $\mu(z_0) = \mu(\overline{z_0})$. $\square$

Corollario 23.56. [BBB79] Un polinomio di grado dispari in $\mathbb{R}[x]$ ha almeno una radice reale.

Dimostrazione. Deve avere un numero dispari di radici in $\mathbb{C}[x]$, e quelle non reali sono a due a due coniugate. $\square$

Se consideriamo la Proposizione 23.55 insieme col Teorema Fondamentale dell'Algebra, otteniamo il seguente

Corollario 23.57. [BBB74] I soli polinomi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono lineari o di grado 2 a discriminante negativo. Tutti gli altri sono riducibili.

23.6 Sequenze di Sturm

Problema 23.58. *Per usare il criterio del polinomio minimo dobbiamo avere un metodo per vedere se un polinomio ha radici multiple (lo abbiamo: il metodo del gcd) e un metodo per vedere se un polinomio ha tutte le radici in $\mathbb{K}$. Per $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ questo non è un problema. Per $\mathbb{R}$, invece sì.*

Richiamo 23.59. [NNN81] *Ricordiamo la sequenza di polinomi creata dall'algoritmo di Euclide per il calcolo del gcd dei polinomi $p_0(t), p'_0(t) \in \mathbb{K}[t]$. Ad ogni riga j , da p_{j-1} e p_j determiniamo p_{j+1} come il resto della divisione di p_{j-1} per p_j , ovvero data da $p_{j-1}(t) = q_1(t)p_j(t) + p_{j+1}(t)$.*

$$\begin{aligned}
 p_0(t) &= p(t) \\
 p_1(t) &= p'(t) \\
 p_2(t) &= p_0(t) - q_1(t)p_1(t) \quad \text{con } \deg p_2(t) < \deg p_1(t) \\
 &\vdots \\
 p_{j+1}(t) &= p_{j-1}(t) - q_j(t)p_j(t) + \quad \text{con } \deg p_{j+1}(t) < \deg p_j(t) \\
 &\vdots \\
 p_s(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Si crea la sequenza

$$[p_0(t), p_1(t) = p'_0(t), p_2(t), \dots, p_{s-1}(t), p_s(t) = 0]$$

dove $\gcd(p_0(t), p'_0(t)) = p_{s-1}(t)$. Da un altro punto di vista, creiamo la sequenza di coppie

$$(p_0(t), p_1(t)), (p_1(t), p_2(t)), \dots, (p_j(t), p_{j+1}(t)), \dots, (p_{s-1}(t), 0)$$

con la proprietà che per ogni j ,

$$\gcd(p(t), p'(t)) = \gcd(p_j(t), p'_{j+1}(t)) = p_{s-1}(t)$$

Osserviamo che

1. moltiplicare un qualunque elemento di una qualunque coppia per un elemento invertibile non cambia il risultato.
2. Dato che le uniche operazioni effettuate durante lo svolgimento dell'algoritmo euclideo sono divisioni, moltiplicazioni, somme e differenze di polinomi, il campo specifico su cui stiamo operando è indifferente. In concreto, se abbiamo due polinomi in $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, il risultato dell'algoritmo euclideo non cambia se li consideriamo come polinomi in $\mathbb{R}[x]$ o in $\mathbb{C}[x]$.

Definizione 23.60. [NNN17] Sia $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ non costante. Definiamo sequenza standard associata a $p(t)$ la successione di polinomi $p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_s(t)$ data da

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p(t) \\ p_1(t) &= p'(t) \\ p_2(t) &= q_1(t)p_1(t) - p_0(t) \quad \text{con } \deg p_2(t) < \deg p_1(t) \\ &\vdots \\ p_{j+1}(t) &= q_j(t)p_j(t) - p_{j-1}(t) \quad \text{con } \deg p_{j+1}(t) < \deg p_j(t) \\ &\vdots \\ p_s(t) &= 0 \end{aligned}$$

Si tratta della sequenza di Euclide per il calcolo di $\gcd(p(t), p'(t))$ modificata come segue: ad ogni riga j , da p_{j-1} e p_j definiamo p_{j+1} come l'opposto del resto della divisione di p_{j-1} per p_j .

Osserviamo che

1. l'algoritmo di Sturm è una versione dell'algoritmo euclideo, e l'ultimo elemento della sequenza prima di zero è uguale a $\gcd(p(t), p'(t))$, dato che stiamo moltiplicando alcuni elementi delle coppie della sequenza per l'elemento invertibile -1 .
2. Mentre nell'esecuzione dell'algoritmo euclideo possiamo moltiplicare i resti per un qualunque fattore invertibile, nell'algoritmo di Sturm possiamo moltiplicare i resti per un qualunque fattore invertibile positivo ed avere ancora una sequenza standard.

Definizione 23.61. [NNN18] Sia $\underline{c} = a_0, \dots, c_s$ una sequenza di reali. Definiamo numero di variazioni $V(\underline{c})$ della successione il numero di cambi di segno, non considerando lo 0.

Definizione 23.62. [NNR10] Sia $\underline{c} = c_0, \dots, c_s$ una sequenza di reali. Definiamo numero di variazioni $V(\underline{c})$ della successione il numero di cambi di segno, non considerando lo 0.

Teorema 23.63. [NNR00] Sia $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, con sequenza standard $p_0(t), \dots, p_s(t)$, siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $p(a)p(b) \neq 0$. Allora il numero di radici di $f(t)$ in (a, b) è $|V_a - V_b|$.

Dimostrazione. Rimandiamo a Geometria [Abate], Capitolo 14. □

Lemma 23.64. [NNR01] Sia $p(t) = a_d t^d + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ non costante e

$$C = \frac{d \cdot \max\{|a_d|, \dots, |a_0|\}}{|a_d|}$$

Allora

1. Il polinomio $p(t)$ non ha radici fuori dall'intervallo $(-C, C)$.
2. Il numero di radici di $p(t)$ in $\mathbb{R}$ è dato da $|V_a - V_b|$, con $a < -C$ e $b > C$.
3. $\begin{aligned} \text{SGN}(p(t_0)) &= \text{SGN}(a_d) & t_0 > C \\ \text{SGN}(p(t_0)) &= \text{SGN}(-a_d) & t_0 < C \end{aligned}$

4. Siano $V_- = \# \text{ variazioni } \{LC(p_0), \dots, LC(p_s)\}$
 $V_+ = \# \text{ variazioni } \{(-1)^{d_0} LC(p_0), \dots, (-1)^{d_s} LC(p_s)\}$ Allora il numero di radici di $p(t)$ in $\mathbb{R}$ è
dato da $|V_- - V_+|$.

Esempio 23.65. [NNN20] Dato $q(t) = -t^3 - 4t^2 - t + 1 \in \mathbb{R}[t]$, determinare il suo numero di radici in $(0, 1)$, in $(-5, 0)$ ed in tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Per semplicità, cerchiamo il numero di radici del polinomio $p(t) = -q(t) = t^3 + 4t^2 + t - 1$. Abbiamo $p'(t) = 3t^2 + 8t + 1$

-- Questo algoritmo semplifica la sequenza quando possibile,

-- eliminando fattori invertibili positivi

`GCDPolySTURMVerbose(t^3+4t^2+t-1,3t^2+8t+1);`

$(t^3 + 4t^2 + t - 1) = (1/3t + 4/9) * (3t^2 + 8t + 1) + (-26/9t - 13/9)$

Qui ho moltiplicato il resto per il fattore invertibile $9/13$, e come da regole per la sequenza di S

$(3t^2 + 8t + 1) = (3/2t + 13/4) * (2t + 1) + (-9/4)$

Qui ho moltiplicato il resto per il fattore invertibile $4/9$, e come da regole per la sequenza di S

$(2t + 1) = (2t + 1) * (1) + (0)$

Lista delle coppie $[[3t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1],$

$[3t^2 + 8t + 1, 2t + 1],$

$[2t + 1, 1]]$

`Record[GCD = 1, Sequence = [t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1, 2t + 1, 1]]`

La sequenza standard associata a $t^3 + 4t^2 + t - 1$ è quindi

$$P_0(t) = t^3 + 4t^2 + t - 1$$

$$P_1(t) = 3t^2 + 8t + 1$$

$$P_2(t) = 2t + 1$$

$$P_3(t) = 1$$

- Il numero di radici in $(0, 1)$: costruiamo le sequenze

$$(t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1, 2t + 1, 1)|_{t=0} = (-1, 1, 1, 1) \quad V_0 = 1$$

$$(t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1, 2t + 1, 1)|_{t=1} = (5, 12, 3, 1) \quad V_1 = 0$$

Quindi abbiamo una radice in $(0, 1)$

- Il numero di radici in $(-5, 0)$:

$$(t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1, 2t + 1, 1)|_{t=0} = (-1, 1, 1, 1) \quad V_0 = 1$$

$$(t^3 + 4t^2 + t - 1, 3t^2 + 8t + 1, 2t + 1, 1)|_{t=-5} = (-31, 36, -9, 1) \quad V_{-5} = 3$$

Quindi abbiamo $|3 - 1| = 2$ radici in $(-5, 0)$

- Il numero di radici in $\mathbb{R}$: Vediamo che

$$\begin{aligned} V_+ &= (1, 3, 2, 1) = 0 \\ V_- &= ((-1)^3 \cdot 1, (-1)^2 \cdot 3, (-1)^1 \cdot 2, (-1)^0 \cdot 1) \\ &= (-1, 3, -2, 1) = 3 \end{aligned}$$

Quindi $|V_- - V_+| = 3 - 0 = 3$. Quindi $-t^3 - 4t^2 - t + 1$ ha tre radici reali.

□

Avremmo potuto calcolare, per $t^3 + 4t^2 + t - 1$

$$C = \frac{3 \cdot \max\{1, 4, 1, 1\}}{1} = 12$$

scoprendo che tutte le radici stanno in $(-12, 12)$. Questo intervallo è quasi sicuramente decisamente più grande del necessario - in effetti abbiamo già visto che le tre radici stanno in $(-5, 1)$.

Possiamo, con successive scelte di intervalli (a, b) , determinare le radici con approssimazione a piacere. Nel nostro caso, le tre radici sono

$$t_1 \simeq -3.6511 \quad t_2 \simeq -0.72611 \quad t_3 = 0.37720$$

Esercizio 23.66. [FY01a] Determinare se l'endomorfismo di $\mathbb{R}$ -spazi $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile. Abbiamo già visto che il polinomio caratteristico è $p_T(t) = -t^3 - 4t^2 - t + 1$ ed abbiamo già visto che $p_T(t)$ non ha radici multiple ed ha tutte le radici in $\mathbb{R}$, quindi T è diagonalizzabile.

Capitolo 24

Ventiquattresima lezione - Esercizi

24.1 Criterio di Eisenstein

Sui razionali, abbiamo un criterio parziale di irriducibilità:

Teorema 24.1 (Criterio di Eisenstein). [AAA52] Sia $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n . Allora se esiste $p \in \mathbb{N}$, primo tale che

$$p \nmid a_n \quad p \mid a_{n-1}, \dots, p \mid a_0 \quad \text{e} \quad p^2 \nmid a_0$$

il polinomio $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$. Si dice che $f(x)$ è irriducibile per Eisenstein, con primo p .

Esempio 24.2. [AAA53] Esaminiamo il polinomio $f(x) = 3x^5 - 6x^3 + 30 \in \mathbb{Q}[x]$. Vogliamo provare a verificarne l'irriducibilità col Criterio di Eisenstein. Esaminando i coefficienti 6, 30, gli unici primi che li dividono entrambi sono 2, 3. Dato che 3 divide il termine di testa, non fa al caso nostro. Dato che 2 non divide il termine di testa e 2^2 non divide il termine noto, $f(x)$ è irriducibile per Eisenstein, $p = 2$.

Esempio 24.3. [AAA54]

1. Il polinomio $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$, dato che 2 è primo e che

$$2 \nmid 3, \quad 2 \mid 4, \quad 2 \mid 2 \quad \text{e} \quad 2^2 \nmid 2$$

2. Il polinomio $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$, ma non per Eisenstein dato non esiste un primo p che soddisfi le condizioni del Criterio. È irriducibile perché per essere riducibile dovrebbe avere una radice razionale, ma le possibili radici sono

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{4}{3}$$

nessuna delle quali è effettivamente una radice (verificare per esercizio).

3. Il polinomio $x^2 - 5$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$, dato che 5 è primo e che

$$5 \nmid 1, \quad 5 \mid 5 \quad \text{e} \quad 5^2 \nmid 5$$

4. I polinomi della forma $x^n - p$, con p intero primo, sono irriducibili su $\mathbb{Q}$.

5. Quindi $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \quad \sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$.

6. La fattorizzazione $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ è in irriducibili su $\mathbb{Q}[x]$ per Eisenstein.

24.2 Esercizi svolti

Esercizio 24.4. [LL73] *Fattorizzare in irriducibili il polinomio $z^5 + 2 \in \mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{Q}[z]$, $\mathbb{R}[z]$, $\mathbb{C}[z]$.*

Soluzione. Il polinomio $z^5 + 2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[z]$ per Eisenstein, $p = 2$ (cfr.24.1).

Troviamo prima la fattorizzazione su $\mathbb{C}$ che in $\mathbb{R}[z]$, perché questa fattorizzazione è particolarmente semplice e vogliamo sfruttare la caratterizzazione dei fattori reali di un polinomio reale vista sopra nella Proposizione 23.55.

Le cinque radici complesse sono

$$\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{5}} \text{ con } k = 0, 1, \dots, 4$$

$$\begin{array}{ll} z_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}} & k = 0 \\ z_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}} & k = 1 \\ z_2 = -\sqrt[5]{2} & k = 2 \\ z_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{5}} & k = 3 \\ z_4 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}} & k = 4 \end{array}$$

e quindi, per Ruffini, abbiamo i cinque fattori lineari in $\mathbb{C}[x]$

$$z^5 + 2 = (z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{5\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}})$$

Cerchiamo ora la fattorizzazione in $\mathbb{R}[z]$. Il polinomio è riducibile, dato che ha grado > 2 . Sappiamo che una delle cinque radici è forzatamente reale, e le altre si dividono in due coppie di complessi coniugati non reali (sono i vertici di un pentagono regolare con un vertice reale). La radice reale è ovviamente $z_2 = -\sqrt[5]{2}$ ed il fattore lineare associato $x + \sqrt[5]{2}$.

Notiamo che le coppie di complessi coniugati sono

$$z_0 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}, \quad z_4 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{\pi}{5}}$$

che mi dà il fattore reale

$$\begin{aligned} (z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{\pi}{5}}) &= z^2 - 2\operatorname{Re}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}})z + \left|\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right|^2 \\ &= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + \sqrt[5]{4} \\ &= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)z + \sqrt[5]{4} \end{aligned}$$

e

$$z_1 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}, \quad z_3 = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{3\pi}{5}}$$

che mi dà il fattore reale

$$\begin{aligned} (z - \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}})(z - \sqrt[5]{2}e^{-i\frac{3\pi}{5}}) &= z^2 - 2\operatorname{Re}(\sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}})z + \left|\sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}\right|^2 \\ &= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)z + \sqrt[5]{4} \\ &= z^2 - 2\sqrt[5]{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)z + \sqrt[5]{4} \end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\left| \sqrt[5]{2} e^{i\frac{\pi}{5}} \right| = \left| \sqrt[5]{2} \right| \left| \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right| = \sqrt[5]{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}$$

o piu' semplicemente, dato che $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |e^{i\theta}| = 1$ abbiamo $|\sqrt[5]{2} e^{i\frac{\pi}{5}}| = |\sqrt[5]{2}| \cdot |e^{i\frac{\pi}{5}}| = \sqrt[5]{2}$. $\square$

Esercizio 24.5. [BBB97] *Fattorizzare in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ il polinomio*

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12$$

Soluzione. Ricordando l'esercizio 24.11 ed il Criterio di Eisenstein, (cfr.24.1), vediamo che una fattorizzazione in irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ è

$$(x-1)(x-2)^2(x^3+3)$$

Vediamo le fattorizzazioni in $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ Il polinomio x^3+3 si scompone calcolando le radici cubiche complesse di -3 usando la formula delle radici n -esime di $w = \rho e^{i\theta}$:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Si scrive

$$-3 = 3e^{i\pi} \Rightarrow w_k = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} \quad k = 0, 1, 2.$$

Quindi si ottengono le tre radici

$$z_0 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}}, k=0 \quad z_1 = \sqrt[3]{3} e^{i\pi} = -\sqrt[3]{3}, k=1 \quad z_2 = \sqrt[3]{3} e^{i\frac{5\pi}{3}}, k=2$$

Notiamo che $z_2 = \overline{z_0}$ e quindi

$$\begin{aligned} (x-z_0)(x-\overline{z_0}) &= (x-\sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}})(x-\sqrt[3]{3} e^{i\frac{5\pi}{3}}) = (x-\sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}})(x-\sqrt[3]{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}) \\ &= x^2 - 2 \operatorname{Re}(\sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}}) + \left| \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \right|^2 \\ &= x^2 - 2 \left(\sqrt[3]{3} \cos \frac{\pi}{3} \right) x + \sqrt[3]{9} \\ &= x^2 - 2 \left(\sqrt[3]{3} \frac{1}{2} \right) x + \sqrt[3]{9} \\ &= x^2 - \sqrt[3]{3} x + \sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo che la fattorizzazione in irriducibili del polinomio

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12$$

- su $\mathbb{Q}$ è, come visto, $(x-1)(x-2)^2(x^3+3)$
- su $\mathbb{R}$ è $(x-1)(x-2)^2(x+\sqrt[3]{3})(x^2-\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9})$
- su $\mathbb{C}$ è $(x-1)(x-2)^2(x+\sqrt[3]{3})(x-\sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{3}})(x-\sqrt[3]{3}e^{i\frac{5\pi}{3}})$.

Osserviamo che se non fosse stata richiesta la fattorizzazione in $\mathbb{C}$ ma solo in $\mathbb{R}$ avremmo potuto procedere fattorizzando il polinomio x^3+3 usando Ruffini: una radice di x^3+3 è $-\sqrt[3]{3}$, quindi dividendo x^3+3 per $x+\sqrt[3]{3}$ otteniamo il polinomio $x^2-2x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ irriducibile su $\mathbb{R}$ in quanto ha discriminante negativo. $\square$

Esercizio 24.6. [BBB17] *Fattorizzare in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ il polinomio*

$$x^{12} - 1$$

Soluzione. Si possono applicare (ripetutamente) le formule della somma e differenza dei cubi e dei quadrati:

$$\begin{aligned} x^{12} - 1 &= (x^6 + 1)(x^6 - 1) \\ &= (x^6 + 1)(x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Si osserva che:

- i polinomi $x + 1, x - 1$ sono lineari e quindi irriducibili sia su $\mathbb{Q}$ che su $\mathbb{R}$;
- i polinomi $x^2 + x + 1, x^2 - x + 1$ hanno discriminante negativo quindi sono irriducibili su $\mathbb{R}$ perciò sono irriducibili anche su $\mathbb{Q}$;
- per quanto riguarda il polinomio $x^4 - x^2 + 1$ si devono fare alcune considerazioni: il polinomio ha grado 4 pertanto su $\mathbb{R}$ si fattorizza. Opero la sostituzione $x^2 = t$ e trovo le radici complesse del polinomio

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 1 &= t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(t - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Per scomporre ulteriormente

$$x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

si devono calcolare

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}_{\mathbb{C}} \quad \text{e} \quad x_{3,4} = \sqrt{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}_{\mathbb{C}}$$

quindi si scrivono tali numeri complessi in forma esponenziale:

$$x_{1,2} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}}_{\mathbb{C}} \quad \text{e} \quad x_{3,4} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{\mathbb{C}} = \sqrt{e^{i\frac{5}{3}\pi}}_{\mathbb{C}}$$

Da cui si ottiene, usando la formula delle radici di un complesso, che:

$$x_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \quad x_2 = e^{i\frac{7}{6}\pi} \quad x_3 = e^{i\frac{11}{6}\pi} \quad x_4 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

A questo punto si osserva che le radici sono a due a due coniugate, in particolare

$$x_1 = \overline{x_3} \quad x_2 = \overline{x_4}.$$

Adesso

$$\begin{aligned}
 x^4 - x^2 + 1 &= (x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{i\frac{7}{6}\pi}) \cdot (x - e^{i\frac{11}{6}\pi})(x - e^{i\frac{5}{6}\pi}) \\
 &= (x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{i\frac{11}{6}\pi}) \cdot (x - e^{i\frac{5}{6}\pi})(x - e^{i\frac{7}{6}\pi}) \\
 &= (x^2 - (e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{11}{6}\pi})x + e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi})(x^2 - (e^{i\frac{5}{6}\pi} + e^{i\frac{7}{6}\pi})x + e^{i\frac{5}{6}\pi} \cdot e^{i\frac{7}{6}\pi}) \\
 &= (x^2 - 2 \operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{6}})x + e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{11}{6}\pi})(x^2 - 2 \operatorname{Re}(e^{i\frac{5}{6}\pi})x + e^{i\frac{5}{6}\pi} e^{i\frac{7}{6}\pi}) \\
 &= (x^2 - 2 \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1)(x^2 - 2 \frac{-\sqrt{3}}{2}x + 1) \\
 &= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).
 \end{aligned}$$

I fattori $x^2 - \sqrt{3}x + 1$ e $x^2 + \sqrt{3}x + 1$ sono irriducibili su $\mathbb{R}$ in quanto hanno il discriminante negativo; la fattorizzazione su $\mathbb{R}$ del polinomio assegnato è quindi:

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione su $\mathbb{Q}$ si devono fare ulteriori osservazioni. Innanzitutto i due polinomi $x^2 - \sqrt{3}x + 1$ e $x^2 + \sqrt{3}x + 1$ non appartengono a $\mathbb{Q}[x]$ perché hanno coefficienti irrazionali.

Quindi se il polinomio $x^4 - x^2 + 1$ si potesse fattorizzare su $\mathbb{Q}$ avrebbe due diverse fattorizzazioni su $\mathbb{R}$ che non è possibile per l'unicità della fattorizzazione. Pertanto il polinomio $x^4 - x^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Riassumendo abbiamo che una fattorizzazione in irriducibili del polinomio $x^{12} - 1$ è:

- $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ su $\mathbb{Q}$.
- $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$ su $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$, il polinomio $x^{12} - 1$ fattorizza in dodici fattori lineari distinti, ciascuno associato mediante il teorema di Ruffini ad una radice dodicesima distinta di 1.

Le radici sono ottenute dalla formula delle radici

$$e^{i\frac{0+2k\pi}{12}} = e^{ik\frac{\pi}{6}} \quad k \in 0 \dots 11.$$

Quindi una fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{C}$ è data da

$$x^{12} - 1 = (x - e^{i0})(x - e^{i\frac{\pi}{6}}) \cdots (x - e^{i\frac{11}{6}\pi}) = \prod_{k=0}^{11} (x - e^{ik\frac{\pi}{6}})$$

Volendo partire dalla fattorizzazione in $\mathbb{C}[x]$ per ricavare quelle in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ dovremmo procedere come segue: osserviamo che le due radici $e^{0i\pi} = 1$ e $e^{i\pi} = -1$ sono le due radici razionali che fattorizzano $x^2 - 1$.

Le due radici $e^{i\frac{3}{2}\pi} = i$ e $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$ sono le uniche due radici immaginarie pure, che fattorizzano $x^2 + 1$.

Le due radici $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono le radici complesse coniugate del polinomio $x^2 - x + 1$.

Le due radici $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono le radici complesse coniugate del polinomio $x^2 + x + 1$.

Le 4 radici complesse

$$\begin{aligned}
 e^{i\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} & e^{i\frac{5}{6}\pi} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
 e^{i\frac{7}{6}\pi} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} & e^{i\frac{11}{6}\pi} &= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

sono quattro radici complesse a due a due coniugate che fattorizzano il polinomio

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 1 &= (x - e^{\frac{\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{\pi}{6}})(x - e^{i\frac{5}{6}\pi})(x - e^{-i\frac{5}{6}\pi}) \\ &= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) \end{aligned}$$

□

Esempio 24.7. [AAA46] Dato il polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 10$, abbiamo che $f(2) = 0$ e $f(\sqrt{5}) = 0$. Per il teorema di Ruffini, abbiamo che $x - 2$ e $x - \sqrt{5}$ dividono $x^3 - 2x^2 - 5x + 10$. Abbiamo infatti

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = (x - 2)(x^2 - 5) = (x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Un metodo di fattorizzazione è quello della forza bruta - si traduce il problema della fattorizzazione in un problema di risoluzione di un sistema polinomiale.

Dato che risolvere sistemi di equazioni polinomiali non è facile, il metodo della forza bruta non sempre è usabile in pratica.

Esercizio 24.8. [MS02] Fattorizzare il polinomio $f(x) = x^4 + 1$ in $\mathbb{R}[x]$.

Soluzione. Vediamo come procedere con il metodo della forza bruta.

Dato che $x^4 + 1$ non ha radici reali, perché è somma di quadrati, $x^4 + 1$ non ha fattori lineari per il Teorema di Ruffini. Se fosse fattorizzabile, dovrebbe quindi avere due fattori di grado 2, siano $x^2 + bx + c$ e $x^2 + dx + e$. Possiamo limitarci a polinomi monici (coefficiente del termine di testa uguale ad 1). Quindi dovrebbe valere

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &\stackrel{\mathbb{K}[x]}{=} (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &\stackrel{\mathbb{K}[x]}{=} x^4 + x^3(a + c) + x^2(ac + b + d) + x(bc + ad) + bd \\ &\iff \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = a + c \\ 0 = ac + b + d \\ 0 = bc + ad \\ 1 = bd \end{cases} \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi. Svolgendo i calcoli si vede che le uniche soluzioni sono le due quadruple

$$a = \sqrt{2}, b = d = 1, c = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad a = -\sqrt{2}, b = d = 1, c = \sqrt{2}$$

che danno, a meno dell'ordine dei fattori, la stessa fattorizzazione,

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

□

Esercizio 24.9. [AAA78] Fattorizzare in $\mathbb{R}[x]$ il polinomio $p(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9$.

Soluzione. Proviamo il metodo del gcd. Dobbiamo calcolare

$$\gcd(p(x), p(x)') = \gcd(x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9, 6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 6x + 9)$$

Calcoliamo il gcd

$$[x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9, 6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 6x + 9]$$

$$(6x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 6x + 9, -65x^4 - 88x^3 + 90x^2 + 264x + 315)$$

$$(-65x^4 - 88x^3 + 90x^2 + 264x + 315, -73x^3 + 20x^2 + 219x - 60)$$

$$(-73x^3 + 20x^2 + 219x - 60, -x^2 + 3)$$

$$(-x^2 + 3, 0)$$

Quindi $\gcd(p(x), p(x)') = x^2 - 3$ e $x^2 - 3$ è un fattore multiplo di $p(x)$ (il prodotto dei due fattori irriducibili dello stesso grado $x - \sqrt{3}$ e $x + \sqrt{3}$). Quindi $(x^2 - 3)$ ha molteplicità almeno 2. Vediamo se ha molteplicità 3

$$\frac{p(x)}{(x^2 - 3)^2} = x^2 + x + 1$$

Che è irriducibile su $\mathbb{R}$ dato che ha il discriminante negativo, e la molteplicità di $x^2 - 3$ è quindi esattamente 2. Quindi

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 3)^2$$

Per vedere che la molteplicità di $x^2 - 3$ è esattamente 2 avremmo anche potuto controllare, facendo la divisione, che $(x^2 - 3)^3 \nmid p(x)$ $\square$

Esercizio 24.10. [AAA77] *Fattorizziamo il polinomio*

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)^2(x^2 - 5)^3 = x^{12} - 20x^{10} + 158x^8 - 624x^6 + 1285x^4 - 1300x^2 + 500$$

usando la regola della derivata formale. Teniamo il polinomio sempre come fattorizzato per chiarire i conti ed i concetti, ovviamente se partissimo da un polinomio già fattorizzato non dovremmo fare più nulla.

Calcolo

$$f'(x) = 12x^{11} - 200x^9 + 1264x^7 - 3744x^5 + 5140x^3 - 2600x$$

So, per la regola di derivazione del prodotto che vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 1)'(x^2 - 2)^2(x^2 - 5)^3 + (x^2 - 1)^1((x^2 - 2)^2)'(x^2 - 5)^3 + (x^2 - 1)^1(x^2 - 2)^2((x^2 - 5)^3)' \\ f'(x) &= 2x(x^2 - 2)^2(x^2 - 5)^3 + (x^2 - 1)(2x(x^2 - 2))(x^2 - 5)^3 + (x^2 - 1)(x^2 - 2)^2(2x(x^2 - 5)^2) \\ &= (x^2 - 2)(x^2 - 5)^2[2x(x^2 - 2)(x^2 - 5) + (x^2 - 1)(2x)(x^2 - 5) + (x^2 - 1)(x^2 - 2)(2x(x^2 - 5))] \end{aligned}$$

Chiaramente $(x^2 - 2)(x^2 - 5)^2$ è un fattore comune tra $f(x)$ ed $f'(x)$. Che sia il $\gcd(f(x), f'(x))$ segue dal Teorema 23.55. Avremmo quindi potuto trovare direttamente

$$\gcd(f(x), f'(x)) = (x^2 - 2)(x^2 - 5)^2 = x^6 - 12x^4 + 45x^2 - 50$$

usando l'algoritmo Euclideo. Avendo trovato un fattore di $f(x)$, dividiamo quest'ultimo polinomio per il fattore e troviamo un secondo fattore

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2)^2(x^2 - 5)}{(x^2 - 2)(x^2 - 5)^2} = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 5) = x^6 - 8x^4 + 17x^2 - 10$$

e potremmo poi continuare a ridurre questi fattori

$$(x^2 - 2)(x^2 - 5)^2 = x^6 - 12x^4 + 45x^2 - 50 \quad (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 5) = x^6 - 8x^4 + 17x^2 - 10$$

Notiamo che sarà inutile insistere con il metodo della derivata formale sul secondo fattore, dopo la divisione non ci sono più fattori multipli e il gcd con la derivata verrebbe banalmente 1.

Esercizio 24.11. [BBB94] Fattorizzare in $\mathbb{Q}[x]$ il polinomio

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12$$

Soluzione. Dato che i divisori del termine noto sono 1, 2, 3, 4, 6, 12 e l'unico divisore del termine di testa è 1, le possibili radici razionali di $f(x)$ sono

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Iniziamo a testare e calcoliamo

$$f(1) = 1 - 5 + 8 - 1 - 15 + 24 - 12 = 0.$$

Quindi $x - 1$ è un fattore di $f(x)$ pertanto si divide $f(x)$ per $x - 1$ e si ottiene:

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12 = (x - 1)(x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x + 12)$$

Ripartiamo cercando di fattorizzare

$$g(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x + 12.$$

Dato che il termine noto e quello di testa non sono cambiati, dobbiamo testare tutte le candidate radici. Notiamo che:

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 - 4 + 4 + 3 - 12 + 12 \neq 0 \\ g(-1) &= -1 - 4 - 4 + 3 + 12 + 12 \neq 0 \\ g(2) &= 32 - 4 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 12 = 0. \end{aligned}$$

Quindi $x - 2$ è un fattore di $g(x)$. Scomponiamo $g(x)$ come segue:

$$\begin{aligned} x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12 &= (x - 1)(x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x + 12) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x^4 - 2x^3 + 3x - 6) \end{aligned}$$

Poniamo $h(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ e cerchiamo di fattorizzarlo. Il termine noto è cambiato, adesso è 6, quindi possiamo evitare le candidate radici ± 12 . Possiamo evitare anche le candidate radici ± 1 che, non essendo radici di $g(x)$, non possono esserlo di $h(x)$. Dobbiamo testare tutte le altre le candidate radici.

Notiamo che, nuovamente $h(2) = 0$, quindi $x - 2$ è un fattore di $h(x)$ ed essendo anche un fattore di $g(x)$ e $f(x)$ ha molteplicità almeno 2.

Dividiamo quindi $h(x)$ per $x - 2$, ottenendo che

$$h(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6 = (x - 2)(x^3 + 3)$$

Ed il fattore $x^3 + 3$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$ per il Criterio di Eisenstein, $p = 3$ (cfr.24.1). A questo punto abbiamo che la fattorizzazione in irriducibili del polinomio

$$x^6 - 5x^5 + 8x^4 - x^3 - 15x^2 + 24x - 12$$

su $\mathbb{Q}$ è $(x - 1)(x - 2)^2(x^3 + 3)$. □

Esercizio 24.12. [MMX78] [Proposto] Fattorizzare il polinomio dell'esercizio precedente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 24.13. [MM11] Fattorizzare in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ il polinomio

$$f(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4$$

Soluzione. Usando la regola delle radici razionali vediamo che le possibili radici sono $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Si verifica facilmente che $f(\pm 1), f(\pm 2), f(\pm 4) \neq 0$ e quindi nessuna delle possibili radici è effettivamente una radice.

Proviamo a fattorizzare su $\mathbb{R}[x]$ con il metodo della molteplicità pertanto calcoliamo un gcd tra $f(x)$ e $f'(x)$ ovvero

$$\gcd(x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4, 6x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 4) = x^2 - 2$$

$$x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x + 4 = (x^2 - 2)^2(x^2 + x + 1).$$

Osserviamo che il polinomio $x^2 + x + 1$ è irriducibile su $\mathbb{R}[x]$ avendo discriminante negativo e quindi è irriducibile anche su $\mathbb{Q}[x]$.

Osserviamo inoltre che in $\mathbb{Q}[x]$ anche $x^2 - 2$ è irriducibile e pertanto una fattorizzazione in irriducibili di $f(x)$ è

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2)^2.$$

Mentre in $\mathbb{R}[x]$, il polinomio $x^2 - 2$ ha le due radici $\pm\sqrt{2}$ e quindi una fattorizzazione in irriducibili è

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2.$$

□

Esercizio 24.14. [LL24] Determinare se i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Q}$.

1. $f(x) = x^2 - 2$
2. $f(x) = 4x^{12} + 6x + 3$
3. $f(x) = x^n - a, \quad n, a \in \mathbb{N}$
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Soluzione.

1. Nel caso del polinomio $x^2 - 2$: 2 divide tutti i termini del polinomio tranne il primo ma $2^2 = 4 \nmid 2$. Quindi $x^2 - 2$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein (cfr.24.1).
2. Appliciamo il criterio di Eisenstein (cfr.24.1) al polinomio $4x^{12} + 6x + 3$: 3 non divide 4, divide 6, 3 ma $3^2 \nmid 3$. Quindi $4x^{12} + 6x + 3$ è irriducibile.
- 3.

- (a) Se $n = 1$, $x^n - a$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$ per ogni a .
- (b) Se $a = 0$, $x^n - a$ è iducibile su $\mathbb{Q}$ per ogni $n > 1$.
- (c) Se $a \in \mathbb{N}$ è una potenza n-esima, abbiamo che esiste $b \in \mathbb{N}$ tale che $a = b^n$ e quindi per le regole dei prodotti notevoli,

$$x^n - a = x^n - b^n = (x - b)h(x)$$

per un opportuno $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Quindi $x^n - a$ è riducibile su $\mathbb{Q}$.

- (d) Se $a \in \mathbb{N}$ non è una potenza n-esima, il polinomio $x^n - a$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein se

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

con $p_i \in \mathbb{N}$, primi.

(e) Negli altri casi, proposto. Una possibile soluzione completa si può ottenere usando le radici complesse, vedi prossima parte.

4. Il polinomio $x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$, ma non per il criterio di Eisenstein. Se fosse riducibile avrebbe almeno fattore lineare e quindi una radice. Ma nessuna delle possibili radici razionali, ± 1 , è effettivamente una radice, dato che $f(\pm 1) \neq 0$. Quindi $f(x)$ non può avere un fattore lineare ed è quindi irriducibile.

□

Esercizio 24.15. [AAA66] *Risolvi in $\mathbb{K}[x]$ il sistema*

$$\begin{cases} 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo quindi $\gcd(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)$.

`GCDPolyVerbose(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2);`

`(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2)=(x - 1)*(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)+(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)`

`(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)=(x - 1)*(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)+(9x^2 - 6)`

`(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)=(x + 2)*(3x^2 - 2)+(0)`

Quindi

`(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)`

`(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2, 3x^3 + 6x^2 - 2x - 4)`

`(3x^3 + 6x^2 - 2x - 4, 3x^2 - 2)`

`(3x^2 - 2, 0)`

Abbiamo quindi che $\gcd(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2) = 3x^2 - 2$ e le soluzioni del sistema sono quindi

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Esempio 24.16. [AAA69] *Dato che*

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = (x + 1)(x - 1)(x + 3)$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$$

abbiamo che

$$(x^2 - 1) \mid (x^3 - 2x^2 - 5x + 10) \quad e \quad (x^2 + 2x - 3) \mid (x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$$

Quindi

$$\gcd(x^2 - 1, x^2 + 2x - 3) = (x - 1) \mid (x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$$

ma

$$(x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = (x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3x) \nmid (x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$$

Esempio 24.17. [AAA71] *Chiaramente, se trovo il gcd non banale di due polinomi, posso parzialmente fattorizzare questi polinomi. Nell'esempio visto prima, abbiamo che*

$$\gcd(3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2, 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2) = 3x^2 - 2$$

e quindi, con semplici divisioni

$$\frac{3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{3x^2 - 2} = x^3 + x + 1 \quad \frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2}{3x^2 - 2} = x^2 + x + 1$$

da cui otteniamo una fattorizzazione parziale dei due polinomi.

$$\begin{aligned} 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= (3x^2 - 2)(x^3 + x + 1) \\ 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2 &= (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Esercizio 24.18. [AAA08] *Abbiamo che*

$$\begin{aligned} (2x - 3)^4 &= \binom{4}{0} \cdot (2x)^4 \cdot (-3)^0 + \binom{4}{1} \cdot (2x)^3 \cdot (-3)^1 + \binom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot (-3)^2 + \\ &\quad + \binom{4}{3} \cdot (2x)^1 \cdot (-3)^3 + \binom{4}{4} \cdot (2x)^0 \cdot (-3)^4 \end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned} \binom{4}{0} &= \frac{4!}{0!4!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 1 \\ \binom{4}{1} &= \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = 4 \\ \binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 6 \\ \binom{4}{3} &= \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 1} = 4 \\ \binom{4}{4} &= \frac{4!}{4!0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 16x^4 + 4 \cdot (8x^3) \cdot (-3) + 6 \cdot (4x^2) \cdot 9 + 4 \cdot (2x) \cdot (-27) + 81 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81 \end{aligned}$$

Esempio 24.19. [AAA10] *Abbiamo che*

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Alternativamente,

$$x^6 - 1 = ((x^2)^3 - 1^3) = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

da cui vedremo che, per il teorema della fattorizzazione unica, $(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Esempio 24.20. [AAA07] $x^5 - 32 = x^5 - 2^5 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Esempio 24.21. [AAA81] *Dividiamo $x^7 + x^4 - 1$, per $x^3 + x + 2$*

`DivPoly(x^7+x^4-1,x^3+x+2);`

Passo 1 ho $x^7 + x^4 - 1$ multiplico per x^4

Passo 1 sottraggo $x^7 + x^5 + 2x^4$

Passo 1 ottengo $-x^5 - x^4 - 1$

Passo 2 ho $-x^5 - x^4 - 1$ multiplico per $-x^2$

Passo 2 sottraggo $-x^5 - x^3 - 2x^2$

Passo 2 ottengo $-x^4 + x^3 + 2x^2 - 1$

Passo 3 ho $-x^4 + x^3 + 2x^2 - 1$ multiplico per $-x$

Passo 3 sottraggo $-x^4 - x^2 - 2x$

Passo 3 ottengo $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

Passo 4 ho $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ multiplico per 1

Passo 4 sottraggo $x^3 + x + 2$

Passo 4 ottengo $3x^2 + x - 3$

Resto= $3x^2 + x - 3$

Quoto= $x^4 - x^2 - x + 1$

Quindi

$$x^7 + x^4 - 1 = (x^3 + x + 2)(x^4 - x^2 - x + 1) + 3x^2 + x - 3$$

Esempio 24.22. [AAA06] *Vogliamo risolvere l'equazione.*

$$\frac{x^5 - 2x^3 + x^2 - 2}{x^3 + 1} = 0$$

Dividiamo $x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$, per $x^3 + 1$

`DivPoly(x^5 - 2x^3 + x^2 - 2,x^3+1);`

Passo 1 ho $x^5 - 2x^3 + x^2 - 2$ multiplico per x^2

Passo 1 sottraggo $x^5 + x^2$

Passo 1 ottengo $-2x^3 - 2$

Passo 2 ho $-2x^3 - 2$ multiplico per -2

Passo 2 sottraggo $-2x^3 - 2$

Passo 2 ottengo 0

Resto=0

Quoto= $x^2 - 2$

ottenendo

$$x^5 - 2x^3 + x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^3 + 1)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{x^5 - 2x^3 + x^2 - 2}{x^3 + 1} &= 0 \\ x^2 - 2 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Esercizio 24.23. [AAA62] Risolvere in $\mathbb{K}[x]$ il sistema

$$\begin{cases} 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che le soluzioni del sistema sono tutte e sole le soluzioni comuni ai due polinomi. Per il teorema di Ruffini, i fattori lineari associati alle soluzioni sono tutti e soli i fattori lineari associati alle soluzioni che dividono entrambi i polinomi. Per definizione di gcd, il prodotto di questi fattori divide il gcd dei due polinomi. Quindi

$$\begin{cases} 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \gcd(3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2, 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 2) = 0$$

Il problema è calcolare questo gcd.....

Esempio 24.24. [AAA65] Calcoliamo $\gcd(x^6 - 2, x^5 - 1)$.

`GCDPolyVerbose(x^6-2,x^5-1);`

`(x^6-2,x^5-1)`

`(x^6 - 2)=(x)*(x^5 - 1)+(x - 2)`

`(x^5-1,x - 2)`

`(x^5 - 1)=(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)*(x - 2)+(31)`

`(x - 2,31)`

`(31,0)`

Quindi $\gcd(x^6 - 2, x^5 - 1) = 31$ o meglio $\gcd(x^6 - 2, x^5 - 1) = 1$. Ricordiamo che il gcd è monico, e in $\mathbb{K}[x]$ il numero 31 è invertibile, con inverso $1/31$.

Esempio 24.25. [AAY33] $\gcd(x^5 - 1, 7x^3 - 7) = \gcd(x^5 - 1, x^3 - 1)$ dato che possiamo rimuovere il fattore invertibile 7 nel secondo polinomio

$$\gcd(x^5 - 1, x^3 - 1) = (x - 1)$$

`GCDPolyVerbose(x^5-1,x^3-1);`

`(x^5 - 1)=(x^2)*(x^3 - 1)+(x^2 - 1)`

`(x^3 - 1)=(x)*(x^2 - 1)+(x - 1)`

`(x^2 - 1)=(x + 1)*(x - 1)+(0)`

Quindi

```
(x^5 - 1, x^3 - 1)
(x^3 - 1, x^2 - 1)
(x^2 - 1, x-1)
(x-1, 0)
```

Esempio 24.26. [AAG33] $\gcd((x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1) = 1$ dato che

```
GCDPolyVerbose(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^2+x+1);
(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)=(x^2)*(x^2 + x + 1)+(x + 1)
(x^2 + x + 1)=(x)*(x + 1)+(1)
(x + 1)=(x + 1)*(1)+(0)
```

Quindi

```
(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^2+x+1)
(x^2 + x + 1, x + 1)
(x + 1, 1)
(1, 0)
```

e $\gcd(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1) = 1$. Abbiamo che

$$\gcd(x^5 - 1, x^3 - 1) = (x - 1) \gcd(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1) = (x - 1)$$

Esercizio 24.27. [NNN51] Dato l'endomorfismo di $\mathbb{Q}$ -spazio $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definito da

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$p_T(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = -t^3 + 4t^2 - 3t + 1$$

$\mathbb{Q}$ Vediamo le radici razionali: candidati sono solo ± 1 e $p_T(1) \neq 0 \neq p_T(-1)$. Dato che non ci sono radici razionali, T non è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{C}$ Le radici sono tutte in $\mathbb{C}$. Vediamo se $p_T(1)$ ha radici multiple (se non le ha, non le può avere neppure $PM_T(t)$).

```
GCDPolyVerbose(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2+8t-3);
(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1)=(1/3t - 4/9)*(-3t^2 + 8t - 3)+(14/9t - 1/3)
(-3t^2 + 8t - 3)=(-3/14t + 103/196)*(14t - 3)+(-279/196)
(14t - 3)=(-14t + 3)*(-1)+(0)
Record[GCD = -1, Sequence = [-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3, 14t - 3, -1]]
Ricordiamo che nella sequenza i fattori invertibili positivi sono stati semplificati
```

Quindi $\gcd(p_T(t), p'_T(t)) = 1$, non ci sono radici multiple su $\mathbb{C}$ neppure del polinomio minimo, quindi T è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ Non ci sono radici multiple, dato che non ce ne sono su $\mathbb{C}$, ma dobbiamo verificare se tutte le radici sono in $\mathbb{R}$.

Costuiamo la sequenza di Sturm

```
GCDPolySTURMVerbose(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3);
(-t^3 + 4t^2 - 3t + 1) = (1/3t - 4/9) * (-3t^2 + 8t - 3) + (14/9t - 1/3)
(-3t^2 + 8t - 3) = (3/14t - 103/196) * (-14t + 3) + (-279/196)
(-14t + 3) = (-14t + 3) * (1) + (0)
Lista delle coppie  [[-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3], [-3t^2 + 8t - 3, -14t + 3], [-14t + 3, 1]]
Record[GCD = 1, Sequence = [-t^3 + 4t^2 - 3t + 1, -3t^2 + 8t - 3, -14t + 3, 1]]
Ricordiamo che nella sequenza i fattori invertibili positivi sono stati semplificati
```

Quindi

- $\underline{c} = (-1, -3, -14, 1)$ e $V_+ = 1$.
- $((-1)^3 \cdot (-1), (-1)^2 \cdot (-3), (-1)^1 \cdot (-14), (-1)^0 \cdot 1) = (1, -3, 14, 1)$, $V_- = 2$
(ci sono tutti i gradi, cambio segno a posto alterno)
- $V_- - V_+ = 2 - 1 = 1$. C'è una sola radice reale, T non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

N.B. Avremmo potuto naturalmente usare direttamente il metodo di Sturm per calcolare il gcd tra il polinomio e la sua derivata anche nel caso complesso, evitando di fare due volte l'algoritmo euclideo in versioni leggermente diverse. Abbiamo effettuato i due svolgimenti per permettere di vedere le differenze di calcolo tra l'algoritmo euclideo in forma usuale e in forma di Sturm in un caso concreto. $\square$

Esercizio 24.28. [NNN24] *Discutere la fattorizzabilità su $\mathbb{R}$ dei seguenti polinomi.*

1. $x^6 + 7x^4 + 15x^2 + 9$. [Due fattori, uno quadratico di molteplicità 1 ed uno quadratico di molteplicità 2]
2. $x^{11} + 10x^9 + 25x^7 + 3x^5 + 3x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 75x + 75$. [Due fattori, uno di grado 7 di molteplicità 1 uno quadratico di molteplicità 2. Il fattore di grado 7 si scompone in un fattore lineare e tre fattori quadratici distinti]
3. $x^{12} - x^8 - x^4 + 1$. [Due fattori lineari di molteplicità 2, un fattore quadratico di molteplicità 2, due fattori quadratici di molteplicità 1]

Esercizio 24.29. [NNN97a] *Dato l'endomorfismo*

$$T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + 2b + c & b - c \\ c - d & a + b + c \end{pmatrix}$$

determinare autovettori ed autovalori di T , e dire se T è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Soluzione. Consideriamo la base di $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usiamo l'isomorfismo

$$\psi: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} M_{1,1} &\mapsto \underline{e}_1 \\ M_{1,2} &\mapsto \underline{e}_2 \\ M_{2,1} &\mapsto \underline{e}_3 \\ M_{2,2} &\mapsto \underline{e}_4 \end{aligned}$$

Vediamo le immagini secondo T della base di $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{llll} M_{1,1} & \xrightarrow{T} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (1, 0, 0, 1) \\ M_{1,2} & \xrightarrow{T} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (2, 1, 0, 1) \\ M_{2,1} & \xrightarrow{T} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (1, -1, 1, 1) \\ M_{2,2} & \xrightarrow{T} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\psi} (0, 0, -1, 0) \end{array}$$

e quindi in $\mathbb{R}^4$ abbiamo l'endomorfismo $\bar{T}$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$(M_{\bar{T}})_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_{\bar{T}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1$$

Vediamo innanzitutto la diagonalizzabilità su $\mathbb{Q}$: usando le regola delle radici razionali abbiamo che le possibili radici di $p_{\bar{T}}(\lambda)$ sono ± 1 ed abbiamo $p_{\bar{T}}(1) = -2$, $p_{\bar{T}}(-1) = 10$. Quindi $p_{\bar{T}}(\lambda)$ non ha radici razionali, e $\bar{T}$ non ha autovalori in $\mathbb{Q}$, e non è quindi diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

Calcoliamo $\gcd(p_{\bar{T}}(\lambda), p'_{\bar{T}}(\lambda))$ mediante la versione di Sturm dell'algoritmo euclideo.

```
P0:=x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1;
P1:=Der(P0,x);P1;
//4x^3 - 9x^2 + 8x - 3;
GCDPolySTURMVerbose(P0,P1);
```

```
(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1)=(1/4x - 3/16)*(4x^3 - 9x^2 + 8x - 3)+(5/16x^2 - 3/4x - 25/16)
(4x^3 - 9x^2 + 8x - 3)=(-4/5x - 3/25)*(-5x^2 + 12x + 25)+(736/25x)
(-5x^2 + 12x + 25)=(5x - 12)*(-x)+(25)
(-x)=(x)*(-1)+(0)
lista delle coppie [[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1, 4x^3 - 9x^2 + 8x - 3],
[4x^3 - 9x^2 + 8x - 3, -5x^2 + 12x + 25],
[-5x^2 + 12x + 25, -x],
[-x, -1]]
```

```
Record[GCD = -1, Sequence =
[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1, 4x^3 - 9x^2 + 8x - 3, -5x^2 + 12x + 25, -x, -1]]
```

Dato che l'ultimo elemento della sequenza è uno scalare, $\gcd(p_{\bar{T}}(\lambda), p'_{\bar{T}}(\lambda)) = 1$, che vuol dire che il polinomio è libero da quadrati. Essendo su $\mathbb{C}$, quindi, ha tutte le radici e tutte di molteplicità uno, e quindi $\bar{T}$ è diagonalizzabile.

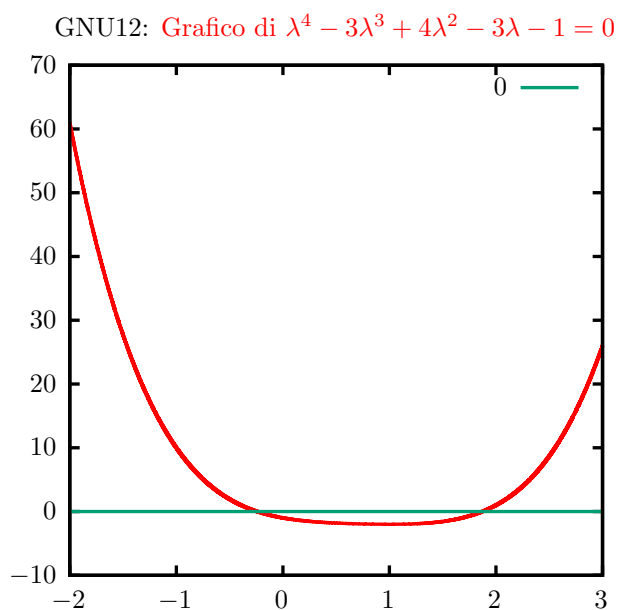
Per la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ usiamo la sequenza di Sturm per calcolare il numero di radici reali. La sequenza è, come visto prima

$$(\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 1, 4\lambda^3 - 9\lambda^2 + 8\lambda - 3, -5\lambda^2 + 12\lambda + 25, -\lambda, -1)$$

Abbiamo

$$V_- = \#[1, -4, -5, 1, -1] = 3 \text{ e } V_+ = \#[1, 4, -5, -1, -1] = 1$$

e quindi il numero di radici è $3 - 1 = 2$. Il polinomio caratteristico non ha tutte le radici nel campo e quindi $\bar{T}$ non è diagonalizzabile. Vediamo il grafico del polinomio caratteristico.



Se siete curiosi di trovare la forma esatta delle soluzioni, che esiste trattandosi di un'equazione di quarto grado, andate sul sito <https://www.wolframalpha.com> chiedete

```
solve x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1=0
```

chiedendo la forma esatta e intuite immediatamente perché tale soluzione esatta è utile fino ad un certo punto. $\square$

Esempio 24.30. Vediamo che durante l'esecuzione dell'Algoritmo Euclideo possono apparire coefficienti numerici molto complessi, anche per polinomi in grado basso.

```
F:=x^5-7x^4-3x^3+x^2-7x-5;
```

Calcoliamo il GCD di F con la sua derivata

```
Der(x^5-7x^4-3x^3+x^2-7x-5,x)
5x^4 - 28x^3 - 9x^2 + 2x - 7
```

```
GCDPolyVerbose(x^5-7x^4-3x^3+x^2-7x-5, 5x^4 - 28x^3 - 9x^2 + 2x - 7);
```

```
GCDPolyVerbose(F,5x^4 - 28x^3 - 9x^2 + 2x - 7);
(x^5 - 7x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x - 5)=(1/5x - 7/25)*(5x^4 - 28x^3 - 9x^2 + 2x - 7)+(-226/25x^3 - 48/25
(5x^4 - 28x^3 - 9x^2 + 2x - 7)=(-5/113x + 3284/12769)*(-113x^3 - 24x^2 - 63x - 87)+(-71700/12769x^2
(-113x^3 - 24x^2 - 63x - 87)=(113/2868x + 897235/8225424)*(-2868x^2 + 7331x + 7853)+(-9640863149/82
```

$$(-2868x^2 + 7331x + 7853) = (2868/755021x - 7278364147/570056710441) * (-755021x - 607847) + (5252353543(-755021x - 607847) = (-755021x - 607847) * (1) + (0))$$

Record[GCD = 1,

Sequence = [x⁵ - 7x⁴ - 3x³ + x² - 7x - 5,
5x⁴ - 28x³ - 9x² + 2x - 7,
-113x³ - 24x² - 63x - 87,
-2868x² + 7331x + 7853,
-755021x - 607847,
1]]

$$F := 11x^9 - 7x^4 - 13x^3 + x^2 - 7x - 5;$$

Calcoliamo il GCD di F con la sua derivata

G:=Der(F,x);G;

$$99x^8 - 28x^3 - 39x^2 + 2x - 7$$

GCDPolyVerbose(11x⁹-7x⁴-13x³+x²-7x-5, 99x⁸ - 28x³ - 39x² + 2x - 7);

$$(11x^9 - 7x^4 - 13x^3 + x^2 - 7x - 5) = (1/9x) * (99x^8 - 28x^3 - 39x^2 + 2x - 7) + (-35/9x^4 - 26/3x^3$$

$$(99x^8 - 28x^3 - 39x^2 + 2x - 7) = (-99/35x^4 + 7722/1225x^3 - 626571/42875x^2 + 57555828/1500625x -$$

$$(-35x^4 - 78x^3 + 7x^2 - 56x - 45) = (35/432219600422x + 18800682155973/93406891494476671289042) * (-4$$

$$(-432219600422x^3 + 111092442258x^2 - 188213318174x - 224539003055) = (216109800211/11793462559877x$$

$$(-23586925119754x^2 + 12969446778039x + 38452360838339) = (23586925119754/5732345843245515x - 134877$$

$$(-5732345843245515x - 2566334328504007) = (-5732345843245515x - 2566334328504007) * (1) + (0)$$

Record[GCD = 1,

Sequence = [11x⁹ - 7x⁴ - 13x³ + x² - 7x - 5,
99x⁸ - 28x³ - 39x² + 2x - 7,
-35x⁴ - 78x³ + 7x² - 56x - 45,
-432219600422x³ + 111092442258x² - 188213318174x - 224539003055,
-23586925119754x² + 12969446778039x + 38452360838339,
-5732345843245515x - 2566334328504007,
1]]

24.3 Esercizi proposti

Esercizio 24.31. [EX79] *Fattorizzare* $f(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 3x^2 + 6x - 3$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Soluzione.

$$\begin{aligned}\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) &= (x^5 - 3)(x - 1)^2 \\ \text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) &= (x - \sqrt[5]{3}) \left(x^2 - 2\sqrt[5]{3} \cos \frac{2}{5}\pi x + \sqrt[5]{9} \right) \\ &\quad \left(x^2 - 2\sqrt[5]{3} \cos \frac{4}{5}\pi x + \sqrt[5]{9} \right) (x - 1)^2 \\ \text{In } \mathbb{C}[x] : f(x) &= (x - \sqrt[5]{3}) \left(x - \sqrt[5]{3} e^{\frac{2}{5}i\pi} \right) \left(x - \sqrt[5]{3} e^{\frac{4}{5}i\pi} \right) \\ &\quad \left(x - \sqrt[5]{3} e^{\frac{6}{5}i\pi} \right) \left(x - \sqrt[5]{3} e^{\frac{8}{5}i\pi} \right) (x - 1)^2\end{aligned}$$

□

Esercizio 24.32. [EX43] *Fattorizzare su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ il polinomio $f(x) = x^8 - x^4 - 6$.*

Soluzione.

$$\begin{aligned}\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) &= (x^4 - 3)(x^4 + 2) \\ \text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) &= (x + \sqrt[4]{3}) \left(x - \sqrt[4]{3} \right) \left(x^2 - 2\sqrt[4]{3} \cos \left(\frac{1}{2}\pi \right) x + \sqrt[4]{9} \right) \cdot \\ &\quad \left(x^2 - 2\sqrt[4]{3} \cos \left(\frac{3}{2}\pi \right) x + \sqrt[4]{9} \right) \\ \text{In } \mathbb{C}[x] : f(x) &= (x + \sqrt[4]{3}) \left(x - \sqrt[4]{3} \right) \left(x - \sqrt[4]{3} e^{\frac{1}{2}i\pi} \right) \left(x - \sqrt[4]{3} e^{\frac{3}{2}i\pi} \right) \cdot \\ &\quad \left(x - \sqrt[4]{3} e^{\frac{5}{2}i\pi} \right) \left(x - \sqrt[4]{3} e^{\frac{7}{2}i\pi} \right)\end{aligned}$$

□

Esercizio 24.33. [EX55] *Fattorizzare su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ il polinomio $f(x) = x^4 + 2$*

Soluzione.

$$\begin{aligned}\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) &= x^4 + 2 \\ \text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) &= \left(x^2 - 2\sqrt[4]{2} \cos \frac{1}{4}\pi x + \sqrt[4]{4} \right) \left(x^2 - 2\sqrt[4]{2} \cos \frac{3}{4}\pi x + \sqrt[4]{4} \right) \\ \text{In } \mathbb{C}[x] : f(x) &= (x - \sqrt[4]{2} e^{\frac{1}{4}i\pi}) \left(x - \sqrt[4]{2} e^{\frac{3}{4}i\pi} \right) \left(x - \sqrt[4]{2} e^{\frac{5}{4}i\pi} \right) \left(x - \sqrt[4]{2} e^{\frac{7}{4}i\pi} \right)\end{aligned}$$

□

Esercizio 24.34. [EX99] *Fattorizzare $f(x) = 6x^7 - 7x^6 + 2x^5 + 12x^2 - 14x + 4$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*

Soluzione.

$$\begin{aligned}\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) &= (2x - 1)(3x - 2)(x^5 + 2) \\ \text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) &= (2x - 1)(3x - 2)(x + \sqrt[5]{2})(x^2 - 2\sqrt[5]{2} \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) x + \sqrt[5]{4}) \\ &\quad (x^2 - 2\sqrt[5]{2} \cos \left(\frac{3\pi}{5} \right) x + \sqrt[5]{4}) \\ \text{In } \mathbb{C}[x] : f(x) &= (2x - 1)(3x - 2)(x + \sqrt[5]{2})(x - \sqrt[5]{2} e^{\frac{1}{5}i\pi})(x - \sqrt[5]{2} e^{\frac{3}{5}i\pi}) \cdot \\ &\quad (x - \sqrt[5]{2} e^{\frac{7}{5}i\pi})(x - \sqrt[5]{2} e^{\frac{9}{5}i\pi})\end{aligned}$$

□

Esercizio 24.35. [EX11] Fattorizzare $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Soluzione. Notiamo che

$$(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^7 - 1$$

In $\mathbb{Q}[x]$: $f(x)$ è irriducibile

$$\text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) = \left(x^2 - 2 \cos\left(\frac{2}{7}\pi\right)x + 1\right) \left(x^2 - 2 \cos\left(\frac{4}{7}\pi\right)x + 1\right) \\ \left(x^2 - 2 \cos\frac{6}{7}\pi x + 1\right)$$

$$\text{In } \mathbb{C}[x] \quad \left(x - e^{\frac{2}{7}i\pi}\right) \left(x - e^{\frac{4}{7}i\pi}\right) \left(x - e^{\frac{6}{7}i\pi}\right) \left(x - e^{\frac{8}{7}i\pi}\right) \left(x - e^{\frac{10}{7}i\pi}\right) \left(x - e^{\frac{12}{7}i\pi}\right)$$

□

Esercizio 24.36. [NNN22] Dire se i seguenti polinomi hanno tutte le radici in $\mathbb{Q}$, il caso contrario contare le radici distinte in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. [SI]
2. $x^4 + 6x^3 - 29x^2 - 114x + 280$. [SI]
3. $x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 39x^2 + 36x + 108$. [SI]
4. $x^4 - 5x^2 + 6$. [NO: 0, 4, 4]
5. $x^7 - 6x^2 + 12$. [NO: 0, 1, 7]

Esercizio 24.37. [NNN23] Contare il numero di radici distinte in $\mathbb{R}$, trovare le radici in $\mathbb{C}$ quando possibile.

1. $x^4 - 5x^2 + 6$. [4]
2. $x^5 - x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 10x - 10$. [5]
3. $x^8 - x^5 - x^3 + 1$. [1]
4. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$. [0]
5. $x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$. [0]
6. $x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1$. [2]

Esercizio 24.38. [QQQ51] Dato $a \in \mathbb{R}$ e la funzione

$$T_a: \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leq 3} & \rightarrow & \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ p(t) & \mapsto & t \cdot p'(t - a) \end{array}$$

determinare gli $a \in \mathbb{R}$ per cui T_a è lineare.

Sol: $\forall a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 24.39. [AAQ08] Scrivere per quanto possibile le formule per

1. $a^5 - b^5$.

2. $a^7 + b^7$.
3. $a^4 - b^4$.
4. $a^{2n+1} \pm b^{2n+1}$ (esponente dispari).
5. $a^{2n} \pm b^{2n}$ (esponente pari).
6. $a^{15} - b^{15}$.
7. $a^{16} - b^{16}$.

Esercizio 24.40. [AAQ09] Calcolare le seguenti potenze

1. $(x+2)^4$
2. $(3x-1)^5$
3. $(x+1)^9$

Esercizio 24.41. [AAV32] Due polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ che hanno le stesse radici con la stessa molteplicità sono uguali a meno di un fattore invertibile?

Esercizio 24.42. [AAA90] Calcolare il resto delle seguenti divisioni

1. $x^5 + x^3 + 1, x - 3$. [Sol: 271]
2. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 1, x^2 + x + 1$. [Sol: 2]
3. $x^5 + 3x^4 + x^2 + x, x^2 + 2x + 1$. [Sol: $-8x - 6$]
4. $x^{15} + 3x^4 + x^2 + x, x^{12} + 2x + 1$. [Sol: $x^4 - x^3 + x^2 + x$]

Esercizio 24.43. [AAA91] Calcolare i seguenti

1. $\gcd(x^{16} - 1, x^{12} - 1)$. [Sol: $x^4 - 1$]
2. $\gcd(x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1, x^3 + 1)$. [Sol: $x^3 + 1$]
3. $\gcd(x^8 - x^7 + x^5 - x^3 + x - 1, x^2 - 1, x - 1)$. [Sol: $x - 1$]
4. $\gcd(x^3 + x - 1, x^2 - 1, x - 1)$. [Sol: $x - 1$]/[Sol: 1]

Esercizio 24.44. [NN01] Calcolare gcd e lcm dei seguenti polinomi

1. $x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2, x^3 - x^2 + x - 1$. Soluzione $\gcd = x - 1$.
2. $x^3 - 8x^2 + 21x - 18, x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Soluzione $\gcd = x^2 - 5x + 6$.
3. $4x^5 - 4x^4 - 27x^3 + 30x^2 + 45x - 54, 4x^6 + 20x^5 - 35x^4 - 148x^3 + 189x^2 + 216x - 270$. Soluzione $\gcd = 4x^2 - 12x + 9$.

Esercizio 24.45. [EX97] Fattorizzare $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Soluzione. In $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x] : f(x) = (x+4)(x+3)(x-1)(x-2)$. □

Esercizio 24.46. [EX54] Fattorizzare $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 30$ su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Soluzione.

$$\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) = (x-2)(x^2-5)(x^2+3)$$

$$\text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) = (x-2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+3)$$

□

Esercizio 24.47. [EX53] *Fattorizzare su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ $f(x) = 24x^3 - 94x^2 + 117x - 45$.*

Soluzione.

$$\text{In } \mathbb{Q}[x] : f(x) = (4x-3)(3x-5)(2x-3)$$

$$\text{In } \mathbb{R}[x] : f(x) = (4x-3)(3x-5)(2x-3)$$

□

Esercizio 24.48. [LL49] *Fattorizzare in $\mathbb{R}[x]$ il polinomio*

$$f(x) = x^{10} - 4x^8 + x^6 + 10x^4 - 4x^2 - 8$$

Soluzione.

$$x^{10} - 4x^8 + x^6 + 10x^4 - 4x^2 - 8 = (x^2+1)^2(x^2-2)^3$$

□

Esercizio 24.49. [AAX95] *Trovare un polinomio $F(a) \in \mathbb{R}[a]$ tale che $F(a)$ diviso per $a+3$ abbia quoto $a^2 - 2a + 5$ e resto -13*

Esercizio 24.50. [AAX34] *Trovare il numero di radici reali dei polinomi*

1. $t^3 - 4t^2 - t + 1$ [3]

2. $2t^3 + 4t^2 - t + 1$ [1]

3. $2t^4 + 4t^3 - t + 1$ [2]

4. $t^8 - 1$ [2]

5. $t^4 + 2t^3 - 13t^2 - 14t + 23$ [4]

Esercizio 24.51. [AAX37] *Trovare le radici reali con approssimazione di 3 cifre decimali dei polinomi*

1. $t^3 - 4t^2 - t + 1$ $[-0.58, 0.40, 4.18]$

2. $2t^3 + 4t^2 - t + 1$ $[-2.31]$

3. $2t^4 + 4t^3 - t + 1$ $[-1, -1.74]$

4. $t^8 - 1$ $[\pm 1]$

5. $t^4 + 2t^3 - 13t^2 - 14t + 24$ $[-4, -2, 1, 3]$

24.4 Sesta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

[Auto6A] [Tempo stimato 1h] Tutti gli esercizi valgono 3 punti, tranne il primo, che ne vale 6.

1. Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 1 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare il coefficiente di testa del polinomio $p_T(\lambda) - \lambda^4$.

2. Scrivere il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Scrivere il polinomio minimo della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Dire se la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ soddisfa la condizione $A^{16} = 0$

5. Dare la forma di Jordan di $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dare una matrice diagonale simile a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$

7. Determinare il numero di radici reali del polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - 1$

8. Determinare il numero di radici reali in $(0, 2)$ del polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - 1$

9. Il polinomio $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ è squarefree?

24.5 Sesta prova di autovalutazione B compito

[Auto6B] [Tempo stimato 3h15m]

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $\overline{z^3}z^5 = -1$

2. Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & a & 1 & b & a^2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$

3. Dare una descrizione cartesiana dello spazio vettoriale $V = \text{Span}((1, 1, 1, 1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

4. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$

$$V_1 = \text{Span}(x+1, x+3, x^3-7x+31) \quad V_2 = \text{Span}(x^2+2, x^2+4, x^3-17x^2+13)$$

5. Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $A = (M_T)_{E_2}^{E_2}$ tale che $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_2 = 0$, dire se T è diagonalizzabile e perché (non più di due righe di motivazione, nessun calcolo).

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi il testo con nome e cognome.
- Dopo l'inizio dello scritto, non sarà possibile andare in bagno per due ore. Dopo, solo consegnandomi il cellulare. Andateci immediatamente prima che si inizi. Ovvero, ADESSO.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono ammessi in aula cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi (ovviamente!)
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, possibilmente in alto a destra.
- NON CONSEGNATE LA BRUTTA. Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno forti penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete.

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 24.52. [ZZZ01] [8pt] Al variare di $a, b \in \mathbb{C}$ discutere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + az = a \\ 3x + y + (a^2 + 1)z = 3 \\ 2x + y + bz = a^2 + 1 \end{cases}$$

Esercizio 24.53. [ZZZ02] [8pt] Data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T((2, 3)) = (1, 3) \quad T((1, a + 1)) = (0, 1) \quad T((3, 5 - a)) = (2, a + 5)$$

1. Determinare gli a per cui T può essere un morfismo.

Per queste a , supponendo T morfismo,

2. Scegliere una base B di $\mathbb{R}^2$ e determinare $(M_T)_B^B$.

3. Determinare $T((1, 1))$, se T è un isomorfismo e se esiste a tale che $T((1, 1))^{-1} = (0, 1)$

Esercizio 24.54. [ZZZ03] [8pt] Data la base B di $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ ed un endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T al variare di a .

Appendice A

Spazi affini

Non svolti a lezione e non richiesti.

Definizione A.1. [PPP01] Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, $W \underset{SSP}{\subseteq} V$ e $\underline{v}_0 \in V$. L'insieme

$$L = \{\underline{w} + \underline{v}_0 \mid \underline{w} \in W\} = W + \underline{v}_0$$

è detto sottospazio affine di V , W è la sua giacitura, e diremo che L è parallelo a W . La dimensione di L è uguale alla dimensione di W . Il vettore $\underline{v}_0$ è detto vettore fisso di L .

Esempio A.2. [PPP02] In $\mathbb{R}^2$, l'insieme

$$L = \{(x+1, 2x+3) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Span}((1, 2)) + (1, 3)$$

è uno spazio affine di dimensione 1 parallelo allo spazio vettoriale $\text{Span}((1, 2))$, la sua giacitura. Il vettore fisso di L è $(1, 3)$.

Osservazione A.3. [PPP03] Ogni sottospazio W di un $\mathbb{K}$ -spazio V è sottospazio affine, basta prendere come vettore fisso $\underline{0}$.

Esempio A.4. [PPP04] In $\mathbb{R}^2$, i sottospazi affini sono i punti, le rette e tutto lo spazio.

Esempio A.5. [PPP05] In $\mathbb{R}^3$, i sottospazi affini sono i punti, le rette, i piani e tutto lo spazio.

Proposizione A.6. [PPP16] [Cfr. con la dimostrazione del Teorema di Rouchè-Capelli in forma generale, 15.11] Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ e $\underline{v}_0 \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora ogni altra soluzione è della forma $\underline{w} + \underline{v}_0$, con $\underline{w} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$.

Dimostrazione.

1. Se $\underline{w} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ allora $\underline{w} + \underline{v}_0 \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Infatti

$$A(\underline{w} + \underline{v}_0) = A \cdot \underline{w} + A \cdot \underline{v}_0 = \underline{0} + \underline{b} = \underline{b}$$

2. Sia $\underline{v} \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora

$$A \cdot \underline{v} = \underline{b} \text{ e } A \cdot \underline{v}_0 = \underline{b} \Rightarrow A \cdot (\underline{v} - \underline{v}_0) = \underline{0}$$

Quindi $\underline{v} = (\underline{v} - \underline{v}_0) + \underline{v}_0 \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0}) + \underline{v}_0$

□

Corollario A.7. [PPP06] *L'insieme $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ è uno spazio affine di giacitura $\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{0})$ e vettore fisso $\underline{b}$.*

Osservazione A.8. [PPP07] *Possiamo estendere le definizioni di vettore generico, descrizione cartesiana e parametrica dagli spazi vettoriali etc. agli spazi affini.*

Esempio A.9. [PPP08] *L'insieme $L = \text{Span}((1, 2, 1), (0, 2, 2)) + (0, 0, 1)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ dato mediante una descrizione parametrica. La sua giacitura è $\text{Span}((1, 2, 1), (0, 2, 2))$ ed un vettore fisso $(0, 0, 1)$. dato che*

$$a(1, 2, 1) + b(0, 2, 2) + (0, 0, 1) = (a, 2a + 2b, a + 2b + 1)$$

L si scrive anche come

$$\{(a, 2a + 2b, a + 2b + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \text{ oppure } \begin{cases} x = a \\ y = 2a + 2b \\ z = a + 2b + 1 \end{cases}$$

Un vettore generico di L è $(a, 2a + 2b, a + 2b + 1)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Esempio A.10. [PPP19] *L'insieme*

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ dato mediante una descrizione cartesiana. La sua giacitura è

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

Per determinare un suo vettore fisso devo trovare una sua descrizione parametrica. Fatelo per esercizio.

Esempio A.11. [PPP20] *Diamo una descrizione cartesiana dello spazio affine*

$$L = \{(a + b, a - b - 2, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Soluzione. Cerchiamo le relazioni tra le tre componenti, che indichiamo rispettivamente come x, y, z . Dobbiamo quindi trovare le relazioni tra i parametri x, y, z che permettono l'esistenza di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b - 2 = y \\ 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y+2}{2} \\ b = \frac{x-y-2}{2} \\ 1 = z \end{cases}$$

Una descrizione cartesiana di L è quindi $z = 1$. □

Esempio A.12. [PPP10] *Diamo una descrizione cartesiana dello spazio affine*

$$L = \{(a + 2, a - b - 2, 3a - b, 2a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Soluzione. Cerchiamo le relazioni tra le tre componenti, che indichiamo rispettivamente come x, y, z, t . Dobbiamo quindi trovare le relazioni tra i parametri x, y, z che permettono l'esistenza di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a + 2 = x \\ a - b - 2 = y \\ 3a - b = z \\ 2a - b = t \end{cases}$$


```

Use R:=Q[x,y,z,t];
M:=Mat([[1, 0,x-2],
        [1,-1,y+2],
        [3,-1,z],
        [2,-1,t]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1,  0, x - 2]
      2^a-1*1^a [0, -1, -x + y + 4]
      3^a-3*1^a [0, -1, -3x + z + 6]
      4^a-2*1^a [0, -1, -2x + t + 4]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1,  0, x - 2]
----- [0, -1, -x + y + 4]
      3^a-1*2^a [0,  0, -2x - y + z + 2]
      4^a-1*2^a [0,  0, -x - y + t]

```

Una descrizione cartesiana di L è quindi

$$\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -2x - y + z + 2 = 0 \\ -x - y + t = 0 \end{cases} \right\}$$

□

Esempio A.13. [PPP11] *Determinare una descrizione parametrica dello spazio affine*

$$L = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases} \right\}$$

Soluzione. Basta trovare il vettore generico delle soluzioni

```

M:=Mat([[1,-1, -1,-1,3],
        [2, 2, -1 ,0,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -1, -1, -1, 3]
      2^a-2*1^a [0, 4, 1, 2, -4]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, -1, -1, -1, 3]
      2^a*+1/4 [0, 1, 1/4, 1/2, -1]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

      1^a+1*2^a [1, 0, -3/4, -1/2, 2]
----- [0, 1, 1/4, 1/2, -1]

```

Ho quindi che $x = 3/4z + 1/2t + 2$, $y = -1/4z - 1/2t - 1$. Sostituendo nel vettore generico (x, y, z, t) di $\mathbb{R}^4$ le condizioni di appartenenza alle soluzioni otteniamo

$$(3/4z + 1/2t + 2, -1/4z - 1/2t - 1, z, t)$$

un vettore generico delle soluzioni e possiamo scrivere

$$L = \begin{cases} x = 3/4\lambda + 1/2\mu + 2 \\ y = -1/4\lambda - 1/2\mu - 1 \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \quad \text{oppure } L = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Esempio A.14. [QQQ01] *Dire se l'insieme*

$$L = \{(t^3, t^3, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. L'insieme L non ha una descrizione parametrica lineare, quindi non possiamo dire immediatamente che si tratta di uno spazio affine. Vediamo di trovare una descrizione cartesiana di L risolvendo rispetto alla variabile T e parametri x, y, z il sistema

$$\begin{cases} t^3 = x \\ t^3 = y \\ 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = x \\ x = y \\ 1 = z \end{cases}$$

Abbiamo quindi che le relazioni tra x, y, z perché (x, y, z) appartenga a L sono

$$\begin{cases} x = y \\ 1 = z \end{cases}$$

e x può assumere ogni valore in $\mathbb{R}$, non ha limitazioni date dalla prima equazione del sistema $t^3 = x$. quindi

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = y \\ 1 = z \end{cases}\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$

□

Osservazione A.15. [QQQ02] *Dati V $\mathbb{K}$ -spazio e $L, J \subseteq V$ spazi affini, gli insiemi*

$$L \cap J = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \in L, \underline{v} \in J\} \text{ e } L + J = \{\underline{v} + \underline{w} \mid \underline{v} \in L, \underline{w} \in J\}$$

sono spazi affini.

La determinazione di $L \cap J$ è semplice se abbiamo una descrizione cartesiana di L, J , basta unire le equazioni (vedi esempio sotto).

La determinazione di $L + J$ è semplice se abbiamo una descrizione parametrica di L, J , basta sommare la giaciture e i vettori fissi (vedi esempio sotto).

Per vedere se $L = J$ basta trovare una descrizione cartesiana di L, J e vedere se i sistemi di equazioni associati sono equivalenti. Un altro metodo è di determinare un vettore generico di L e vedere che soddisfa le equazioni cartesiane di J (mi dice $J \supseteq L$) e vice versa (mi dice $L \supseteq J$) da cui l'uguaglianza.

Osservazione A.16. [QQQ20] *Un sistema di equazioni $A\underline{x} = \underline{b}$ senza soluzioni non descrive uno spazio affine.*

Osservazione A.17. [QQQ10] *Le descrizioni parametriche e cartesiane degli spazi affini non sono uniche, come non lo sono per gli spazi vettoriali.*

Esercizio A.18. [QQQ03] *Dati gli spazi affini*

$$L = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\} \text{ e } J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} z + t = 2 \end{cases} \right\}$$

determinare una descrizione parametrica dello spazio affine $L \cap J$ e una descrizione dello spazio affine $L + J$.

Soluzione.

1. Per $L \cap J$, abbiamo che

$$L \cap J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y + t = 0 \\ z + t = 2 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \right\}$$

Un vettore generico di $L \cap J$ si ottiene dal vettore generico di $\mathbb{R}^4$ con le condizioni $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 1 - t$ ed è

$$(1 + t, -t, 1 - t, t) = t(1, -1, -1, 1) + (1, 0, 1, 0)$$

Quindi $L \cap J = \text{Span}((1, -1, -1, 1)) + (1, 0, 1, 0)$.

2. Per $L + J$, troviamo descrizioni parametriche di L, J ed operiamo le somme.

- (a) per L , abbiamo

$$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z + 2t \\ y = -t \end{cases}$$

Un vettore generico di L è (x, y, z, t) più le condizioni $x = 2 - z + 2t$, $y = -t$, ovvero

$$(2 - z + 2t, -t, z, t) = z(-1, 0, 1, 0) + t(2, -1, 0, 1) + (2, 0, 0, 0)$$

Quindi $L = \text{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)) + (2, 0, 0, 0)$.

- (b) Per J abbiamo

$$\begin{cases} z + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - t \end{cases}$$

Un vettore generico di J è (x, y, z, t) più la condizioni $z = 2 - t$, ovvero

$$(x, y, 2 - t, t) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, -1, 1) + (0, 0, 2, 0)$$

Quindi $L = \text{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (0, 0, 2, 0)$.

Quindi

$$\begin{aligned} L + J &= \text{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)) + (2, 0, 0, 0) + \text{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (0, 0, 2, 0) \\ &= \text{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)) + \text{Span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (2, 0, 0, 0) + (0, 0, 2, 0) \\ &= \text{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) + (2, 0, 2, 0) \end{aligned}$$

Per esercizio, determinare una base di $\text{Span}((-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$.

□

A.1 Esercizi proposti

Esercizio A.19. [PPP22] Dare una descrizione parametrica dello spazio affine

$$L = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 3a + 3b - b - c = 1 \\ 5a - b + 3c + d = 2 \end{cases} \in \mathbb{R} \right\}$$

Soluzione. vettore generico $(4/9x + 5/18y, -7/9x - 11/18y, x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ □

Esercizio A.20. [PPP12] Dare una descrizione cartesiana dello spazio affine

$$L = \{(a + 2b - c + d, 2a - b - c - 1, b + d, a - b - d, a - d - 3) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Soluzione. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - 2z + t - 1 = 0\}$ □

Esercizio A.21. [PPP13] Dare una descrizione cartesiana dello spazio affine

$$L = \begin{cases} x = a + 3b + 1 \\ y = a - b - 1 \\ z = b + 2 \end{cases}$$

Soluzione. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -1/4x + 1/4y + z - 3/2 = 0\}$ □

Esercizio A.22. [QQQ11] Dati gli spazi affini

$$L = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ x + y - z - 3t = 2 \\ x + z - t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\} \text{ e } J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x - z - t = 1 \end{cases} \right\}$$

determinare una descrizione parametrica dello spazio affine $L \cap J$ e una descrizione dello spazio affine $L + J$.

Esercizio A.23. [QQQ61] Dati gli spazi affini

$$L = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y - 4z + t = 0 \\ 3x + y - z - 3t = 2 \\ 2x + z - 3t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \right\} \text{ e } J = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2z + 2t = 1 \\ x - z - t = 1 \\ 5x - 2t = 3 \end{cases} \right\}$$

dire se $L \subseteq J$ o $L \supseteq J$

Sol: NO in entrambe i casi.

Esercizio A.24. [QQQ04] Dire se l'insieme

$$L = \{(t^2 - 2, t^2 + 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. No □

Esercizio A.25. [QQQ05] Data una funzione $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surgettiva e $a, b, c \in \mathbb{R}$ dire se l'insieme

$$L = \{(\phi(t) + a, \phi(t) + b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. Si

□

Esercizio A.26. [QQQ06] Data una funzione $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva e $a, b, c \in \mathbb{R}$ dire se l'insieme

$$L = \{(\phi(t) + a, \phi(t) + b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è uno spazio affine.

Soluzione. Non sempre.

□

Bibliografia

[Abate] Marco Abate, (1996). *Geometria*, McGraw-Hill.