4.3 Prima prova di autovalutazione

`[Auto1]` [Tempo stimato 2h]

1. Determinare l'inverso di $2+3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

   Soluzione. $-\frac{2-3\sqrt{3}}{23} = \frac{3\sqrt{3}-2}{23}$ □

2. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo con le operazioni standard? Se sì, dare la formula per l'inverso di $a+b\sqrt{3}$.

   Soluzione. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo, e $(a+b\sqrt{3})^{-1} = \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}$ per $(a,b) \neq (0,0)$ (il denominatore non si annulla perché $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$). □

3. Sia $\mathbb{Z}_5$ l'insieme dei numeri interi con l'uguaglianza ridefinita: per $x, y \in \mathbb{Z}_5$

   $$x = y \Leftrightarrow \text{ } x \text{ e } y \text{ hanno lo stesso resto nella divisione per } 5$$

   Quanti elementi distinti esistono in $\mathbb{Z}_5$?

   Soluzione. 5 □

4. (Difficile) L'insieme $\mathbb{Z}_5$ è un gruppo rispetto alla somma? Un anello rispetto alla somma e alla moltiplicazione? Un campo rispetto alla somma e moltiplicazione?

   Soluzione. Sì. Sì. Sì. □

5. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ il sistema di equazioni $\begin{cases} z^3 - 2z^2 + i - 2 = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \end{cases}$

   Soluzione. $z = i$ □

6. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{iz} = e^{2\overline{z}}$.

   Soluzione. $z = \frac{2}{3}k\pi(1-2i)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

7. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $z^5 = \overline{z}^5$.

   Soluzione. Le semirette uscenti dall'origine $\theta = \frac{k}{5}\pi$, con $k = 0, \ldots, 9$, origine compresa. □

8. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{z+1} = e^{\overline{z}-1}$.

   Soluzione. Non esistono soluzioni. □