

10.3 Esercizi proposti

Esercizio 10.26. [FFW73] Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ discutere l'invertibilità e calcolare quando possibile l'inversa delle matrici

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 3 & b \end{pmatrix}$ Sol $\exists A^{-1}$ se e solo se $-3ab + 6b \neq 0$. In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{-3ab + 6b} \begin{pmatrix} -3b & 3b & 0 \\ -2b & ab & -ab + 2b \\ 6 & -3a & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2a+6 & 3b+1 & 3c \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ La matrice non è invertibile per nessun valore di a, b, c .

3. $A = \begin{pmatrix} a & 3b & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ Sol: $\exists A^{-1}$ se e solo se $-6abc + ac \neq 0$. In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{-6abc + ac} \begin{pmatrix} c & -3bc & 0 \\ -2ac & ac & 0 \\ 2ab - 2 & -ab + 6b & -6ab + a \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & b \\ a & 0 & a+1 & b \\ b & b & a & b \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sol $\exists A^{-1}$ se e solo se $ab \neq 0$. In questo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ab^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b^2 \\ -ab & 0 & ab & ab - b^2 \\ -ab^2 & ab^2 & 0 & 0 \\ a^2b + ab & -a^2b & 0 & -ab \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.27. [DDR53] Siano date le matrici $A, A' \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, con la matrice A' identica alla matrice A tranne che per avere le sue righe i, j scambiate.

1. Se $\det A \neq 0$, allora l'equazione $X \cdot A = A'$ ha come unica soluzione $X = S_n^{ij}$.
2. Se $\det A = 0$, allora l'equazione $X \cdot A = A'$ ha infinite soluzioni, tra cui $X = S_n^{ij}$.

[Sol: Vero in entrambi i casi; per $\det A = 0$ le soluzioni sono $X = S_n^{ij} + Y$, con $Y \cdot A = 0$]

Esercizio 10.28. [EEA33] Calcolare se possibile i determinanti delle seguenti matrici

•

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 8 \\ 12 & 21 & 32 & 21 \end{pmatrix} \quad [\text{Sol: } 0]$$

- Con lo sviluppo di Laplace

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [Sol: 57]$$

- Mediante riduzione a triangolare superiore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [Sol: 57]$$

•

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [Impossibile]$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad [Sol: 6]$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [Sol: -42]$$

Esercizio 10.29. [EEP33] Determinare le relazioni lineari tra le righe delle seguenti matrici mediante l'algoritmo tag-variable.

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 8 \\ 12 & 21 & 32 & 21 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

1. $A_3 = 2A_1 - 3A_2$.
2. $A_3 = A_1 + A_2$, $A_4 = 2A_1 - A_2$.
3. (determinante 57): le righe sono linearmente indipendenti.
4. $A_3 = A_1 + 3A_2$.
5. $A_4 = 3A_1 - A_2 + A_3$.
6. $A_2 = 2A_1$, $A_5 = A_1 - A_3 + 2A_4$.

□

Esercizio 10.30. [EEA13] *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3454 \\ 10^3 & 23 \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(B^T \cdot (A^5 \cdot B^T)^{-1} \cdot A^7)$

[Sol: 289]

Esercizio 10.31. [EEA00] *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *calcolare* $\det((A + I_2) \cdot (A - I_2))$

Sol: 0.

Esercizio 10.32. [EEA02] *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} e^{1/3i\pi} & 1 \\ i & e^{2/3i\pi} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 2i \end{pmatrix}$$

calcolare $\det(A \cdot B)$.Sol: $1 + i$.**Esercizio 10.33.** [LL96] *Risolvere l'equazione matriciale* $CX = D$ *dove*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{17}{6} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.34. [LLX96] Risolvere l'equazione matriciale $XC = D$ dove

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.35. [EEE87] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 20 & 20 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 20 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $\det(5 \cdot A)$ [Sol: $\det(A) = 300$,

$$\det(5 \cdot A) = 187500]$$

Esercizio 10.36. [EEA14] Determinare i valori di $k \in \mathbb{K}$ per cui è nullo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & k \\ k & 2 & k \\ k & k & 2 \end{pmatrix}$$

[Sol: $k = -1, 2$]

Esercizio 10.37. [EEA03] Determinare i valori di $k \in \mathbb{Q}$ per cui è nullo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 5 \\ 5k & k & 5 \end{pmatrix}$$

[Sol: $\emptyset$]

Esercizio 10.38. [EEA15] Determinare il numero di valori $k \in \mathbb{C}$ per cui è nullo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 5 \\ 5k & k & 5 \end{pmatrix}$$

[Sol: 3]

Esercizio 10.39. [EEA16] Determinare il numero di valori $k \in \mathbb{C}$ per cui il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+9 & -6 & 2 \\ 22 & k-14 & 4 \\ 11 & -6 & k \end{pmatrix}$$

è nullo

[Sol: 2]

Esercizio 10.40. [EEG16] Risolvere con Cramer i seguenti sistemi

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soluzione. } \det A = 4, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 3 & b \\ 1 & 3 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\det A = (3a - 2)(1 - b)$; per $a \neq \frac{2}{3}$, $b \neq 1$:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(3a-2)(1-b)} \\ \frac{\frac{a-1}{(3a-2)(1-b)}}{\frac{1}{b-1}} \\ \frac{1}{b-1} \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\det A = abc - 2a - 4b - 3c + 11 =: D$; per $D \neq 0$:

$$\underline{x} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -3ac + 8a + bc - 2 \\ a^2c - 4a - c + 1 \\ -2a^2 + 3a - b + 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10.41. [EEG19] *Determinare l'inversa delle seguenti matrici con la regola dei cofattori*

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\det A = 6$,

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 2 & b \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\det A = (a - 1)(b - a)$; per $a \neq 1$, $a \neq b$:

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(b-a)} \begin{pmatrix} ab-2 & 2-b & 1-a \\ a-b & b-a & 0 \\ 2-a^2 & a-2 & a-1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & c & c \end{pmatrix}$$

Soluzione. $\det A = b(ac - 4)$; per $b \neq 0$, $ac \neq 4$:

$$A^{-1} = \frac{1}{b(ac-4)} \begin{pmatrix} bc & c & -4b \\ 0 & ac-4 & 0 \\ -b & 3-ac & ab \end{pmatrix}.$$