Capitolo 9

Nona lezione - Determinante

9.1 Determinante

Vediamo cosa si può dire sull'invertibilità delle matrici 2×2:

Esempio 9.1 (Matrici 2×2)**.** `[EEE05]` *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$; vogliamo trovare tutte le matrici $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tali che*

$$A \cdot X = I_2$$

Determiniamo l'inversa destra risolvendo il sistema $A \cdot X = I_2$

```
Use R::=Q[x,y,z,t,a,b,c,d];
M:=Mat([[a,b,1,0],
        [c,d,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
FACCIO A PARTE IL CASO a=0
POSSO SUPPORRE a<>0

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [a,            b,    1, 0]
   2^a-c/a*1^a [0, (-bc + ad)/a, -c/a, 1]

CASO a<>0, bc - ad=0 TRATTO IL CASO A PARTE
POSSO SUPPORRE bc - ad<>0
Scala2DiagonaleVerbose(L);
     1^a*+1/a     [1, b/a,         1/a,            0]
2^a*-a/(bc - ad)  [0,   1, c/(bc - ad), -a/(bc - ad)]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot
 1^a-b/a*2^a   [1, 0, -d/(bc - ad), b/(bc - ad)]
-------------- [0, 1,  c/(bc - ad), -a/(bc - ad)]

CASO a=0
```

```
M:=Mat([[0,b,1,0],
        [c,d,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [c, d, 0, 1],
     [0, b, 1, 0]]

DEVO AVERE c<>0. SE a=0, c=0 TRATTO IL CASO A PARTE

DEVO AVERE b<>0. SE a=0, c<>0, b=0 TRATTO IL CASO A PARTE

PROSEGUO CON a=0, c<>0, b<>0

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*+1/c  [1, d/c, 0, 1/c]
     2^a*+1/b  [0, 1, 1/b, 0]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

 1^a-d/c*2^a   [1, 0, -d/(bc), 1/c]
-------------- [0, 1, 1/b, 0]
```

Esaminiamo i cinque casi

- $a \neq 0, bc - ad \neq 0$. *Soluzione*

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-d}{bc-ad} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ soluzione unica}$$

- $a \neq 0, bc - ad = 0$. *Il sistema diviene*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & -c/a & 1 \end{array}\right)$$

che è impossibile. Si vede facilmente dalla seconda riga, che con la seconda colonna dei termini noti mi dà $0z + 0t = 1$.

- $a = 0$, $b, c \neq 0$. *Dalla forma triangolare superiore otteniamo la soluzione*

$$\begin{pmatrix} \frac{-d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{bc-ad} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{-a}{bc-ad} \end{pmatrix}_{a=0} = \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)_{|a=0}$$

soluzione unica, e quindi questo caso è compreso nel primo, si tratta di uno di quei casi in cui le condizioni vengono dal processo di riduzione, non sono intrinseche.

- $a = 0, c = 0$. *Il sistema diviene*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} bz = 1 \\ bt = 0 \\ dz = 0 \\ dt = 1 \end{cases}$$

Dalla prima e quarta equazione, $z, d \neq 0$. Dalla terza $dz = 0$. Assurdo, il sistema è impossibile.

- $a = 0, c \neq 0, b = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La prima riga ci dice che il sistema è impossibile.

Possiamo quindi ricapitolare

- *Se $ad - bc \neq 0$ l'inversa destra di A esiste ed è $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*
- *Altrimenti, ovvero se $ad - bc = 0$, la matrice A non ha inversa destra, e quindi non è invertibile.*

Si verifica facilmente, come già sappiamo, che la matrice $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ è anche inversa sinistra di A.

Esempio 9.2. `[EEE51]` *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $ad - bc = 2 - 2 = 0$ e quindi la matrice non è invertibile.

Esempio 9.3. `[EEE50]` *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $ad - bc = 1 - 3 = -2$ e quindi la matrice è invertibile. Usiamo la formula

$$\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Definizione 9.4. `[EEE60]` *Data una matrice quadrata $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ e due interi i, j tali che $1 \leq i, j \leq n$, definiamo* minore (i, j) di A*, e scriviamo $A_{i,j}$ la matrice appartenente a $\mathrm{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ ottenuta dalla cancellazione della i-esima riga e della j-esima colonna di A.*

Esempio 9.5. `[EEE61]` *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ allora } A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Usiamo la solita convenzione per cui le righe della matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono indicate come $A_1, \ldots, A_n$ e le colonne come $A^1, \ldots, A^n$.

Teorema 9.6 (Determinante)**.** [EEE64] *Esiste un'unica applicazione*

$$\det\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

tale che date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$

1. *Se* $A = (a_{11}) \in \mathrm{Mat}_{1\times 1}(\mathbb{K})$, $\det(A) = a_{11}$.
2. *Sviluppo di Laplace sulla riga i-esima,* $i : 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \qquad \textit{N.B. } i \textit{ è fissato}$$

3. *Sviluppo di Laplace sulla colonna j-esima,* $j : 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \qquad \textit{N.B. } j \textit{ è fissato}$$

4. *Teorema di Binet* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dimostrazione. Non è richiesta la dimostrazione. Per i dettagli, Abate capitolo 9. □

Vediamo ora alcune proprietà del determinante. Nelle ipotesi del teorema precedente:

Corollario 9.7. [EEE67] $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Dimostrazione. Basta sviluppare per una riga o colonna qualunque. □

Esempio 9.8. [EEE79] *Calcoliamo il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Soluzione. Sviluppiamo per la seconda riga

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 5(1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 6(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) \\ &= 24 - 60 + 36 = 0 \end{aligned}$$

□

Esempio 9.9. [EEE80] *Calcoliamo il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione. Sviluppiamo per la seconda colonna

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&2\\1&3&1\end{pmatrix} &= (-1)^3\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+(-1)^4\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+(-1)^5\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\\ &= (-1)\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 1\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot 0\\ &= 0-1-0=-1\end{aligned}$$

□

Corollario 9.10. [EEE65] $\det(0_n)=0$ *e* $\det(I_n)=1$.

Dimostrazione. La prima uguaglianza è immediata. La seconda segue immediatamente dalla definizione sviluppando per una riga qualunque ed usando l'induzione, ma la matrice identica è un caso particolare di matrice diagonale, quindi ci rifacciamo alla dimostrazione del determinante di matrici diagonali. □

Corollario 9.11. [EEE68] *Se una riga (o una colonna) di* A *è nulla ho* $\det(A)=0$.

Dimostrazione. Basta calcolare il determinante sviluppando per quella riga (o colonna). □

Corollario 9.12. [EEE88] *Il determinante di una matrice diagonale* D *è il prodotto degli elementi sulla diagonale, ovvero*

$$\det D=\prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

In particolare, è non nullo se e solo se tutti gli elementi sulla diagonale sono non nulli.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione sull'ordine della matrice diagonale

$$D=\mathrm{Diag}(d_{11},\dots,d_{nn})=\left(\begin{array}{c|cccc}d_{11}&0&\dots&\dots&0\\\hline 0&d_{22}&0&\dots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\ 0&0&0&\dots&d_{nn}\end{array}\right)$$

- Base: $n=1$ Ovvio.
- Passo induttivo: possiamo supporre, per l'ipotesi induttiva, che la tesi sia vera per tutte le matrici diagonali di ordine $n-1$, e quindi per il blocco in basso a destra, il minore A_{11}, che è diagonale di ordine $n-1$. Sviluppiamo secondo la prima riga.

  $$\det(D)=d_{11}\det A_{11}=d_{11}\prod_{i=2}^{n} d_{ii}=\prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

  ed abbiamo concluso.

□

Corollario 9.13. [EEE91] *Sia* A *una matrice triangolare superiore. Allora*

$$\det A=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. [Hint: ricalcare la dimostrazione per le matrici diagonali vista al corollario precedente]. □

Corollario 9.14. `[EEE69]` *Abbiamo* $\det(A^T) = \det(A)$

Dimostrazione. Posso calcolare il determinante sviluppando sia per riga che per colonna, e le righe di A sono le colonne di A^T e viceversa. □

9.2 Operazioni di Gauss e determinante

Moltiplicazione di una riga/colonna per uno scalare

Definizione-Proposizione 9.15. `[EEW76]` *Data* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, l'operazione di moltiplicazione della riga* i*-esima di* A *per* $\lambda \in \mathbb{K}$ *si può effettuare mediante la sua moltiplicazione a sinistra per la matrice*

$$S_n^i(\lambda) = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1}, \lambda\underline{e}_i, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n]$$

Analogamente per le colonne, con moltiplicazione a destra.

Esempio 9.16. `[EEY02]` *Per esempio,*

$$S_3^2(2)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\boxed{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\8&10&12\\7&8&9\end{pmatrix}$$

Proposizione 9.17. `[EEE78]` *Data* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, moltiplicare una riga (colonna) di* A *per uno scalare* λ *moltiplica il determinante per* λ*.*

Dimostrazione. Si vede immediatamente sviluppando il determinante con Laplace secondo la i-esima riga e raccogliendo λ tra tutti gli addendi. Analogamente per le colonne.

La dimostrazione può anche essere dedotta, immediatamente, dal teorema di Binet. □

Esempio 9.18. `[EEW02]`

1.

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&0&3&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} = 3$$

2.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&5&0\\3&6&3\\2&0&4\end{pmatrix} &= 3\cdot\det\begin{pmatrix}1&5&0\\1&2&1\\2&0&4\end{pmatrix}\\ &= 3\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}1&5&0\\1&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}\\ &= 6\cdot\left(1\det\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}-5\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+0\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\right)\\ &= 6(1\cdot 4-5\cdot 1+0\cdot(-2))=-6\end{aligned}$$

Abbiamo raccolto 3 *dalla seconda riga e* 2 *dalla terza riga. Abbiamo poi sviluppato con Laplace per la prima riga.*

Scambio di righe e colonne

Osservazione 9.19. `[EEU71]` *Ricordiamo che S_n^{ij} è la matrice elementare uguale alla matrice identità tranne che ha le righe i, j scambiate.*

Esempio 9.20. `[EEY71]`

$$S_5^{1,4}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Proposizione 9.21. `[EEW71]` *Abbiamo che* $\det S_n^{ij}=-1$

Dimostrazione. Sviluppiamo il determinante ed i determinanti dei minori successivi per le righe non scambiate ottenendo che

$$\det(S_n^{ij})=\det(S_{n-1}^{ij})=\ldots=\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$$

□

[Proposto: formalizzare la dimostrazione con un procedimento di induzione]

Esempio 9.22. `[EEW01]` *Vediamo che* $\det S_5^{1,4}=-1$

$$\det S_5^{1,4}=\det\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$$

Abbiamo sviluppato rispettivamente per la seconda riga, per la seconda riga, per la terza riga.

Corollario 9.23. `[EEE71]` *Sia $A\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ e B^{ij} la matrice ottenuta da A scambiando le righe i e j. Allora*

$$\det B^{ij}=-\det(A)$$

Dimostrazione. Dato che $B^{ij} = S^{ij} \cdot A$ e che $\det S^{ij} = -1$, per il teorema di Binet, consegue che

$$\det(B^{ij}) = \det(S_n^{ij} A) = \det(S_n^{ij}) \det(A) = \cdots = -\det(A)$$

Analogamente per le colonne, moltiplicando la matrice A per S_n^{ij} a destra. □

Passo di riduzione di Gauss

Osservazione 9.24. `[EEV71]` *Ricordiamo che $G_n^{ij}(\lambda)$ è la matrice identità con al posto della riga i-esima ($\underline{e}_i$) la riga $\underline{e}_i + \lambda \underline{e}_j$.*

Esempio 9.25. `[EET71]`

$$G_5^{32}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 9.26. `[EEG71]` *Abbiamo che* $\det G_n^{ij}(\lambda) = 1$

Dimostrazione. Dato che una matrice $G_n^{ij}(\lambda)$ è triangolare superiore od inferiore (a seconda che sia $i < j$ o $i > j$), e gli elementi sulla diagonale sono tutti uguali ad 1, il determinante è 1. □

Osservazione 9.27. `[EEX71]` *Ricordiamo che data $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, la matrice*

$$B = [A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j + \lambda A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n]$$

risultato dell'operazione di Gauss

$$A_j \longrightarrow A_j + \lambda A_i$$

si può ottenere come

$$B = G_n^{ji}(\lambda) \cdot A$$

Notiamo che, per il teorema di Binet,

$$\det B = \det(G_n^{ji}(\lambda) \cdot A) = \det G_n^{ji}(\lambda) \det A = 1 \cdot \det A = \det A$$

Abbiamo visto l'effetto che le operazioni di Gauss hanno sul determinante della matrice. Vediamo quindi cosa succede riducendo con Gauss una matrice a scala, in forma standard, in forma normale.

Corollario 9.28. `[EEC99]` *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, l'operazione sulle colonne $C_j \longrightarrow C_j + \lambda C_i$ (sostituire la colonna j-esima con la somma della colonna j-esima e della colonna i-esima moltiplicata per lo scalare λ) lascia invariato il determinante.*

Dimostrazione. L'operazione sulle righe lascia il determinante invariato, ed il determinante di A è uguale al determinante di A^T, le cui righe sono le colonne di A e su cui l'operazione $C_j \longrightarrow C_j + \lambda C_i$ diviene $R_j \longrightarrow R_j + \lambda R_i$, che sappiamo non cambiare il determinante. □

Possiamo riassumere quanto visto con i seguenti enunciati:

Proposizione 9.29. `[EEF99]` *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, ed usando la notazione A_i per le righe e A^i per le colonne, abbiamo che*

1. *L'operazione* $A_j \longrightarrow \alpha A_j + \beta A_i$*, che si può realizzare moltiplicando a sinistra* A *per la matrice (con* $i \neq j$*) le cui* righe *sono*
$$[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{j-1}, \alpha\underline{e}_j + \beta\underline{e}_i, \underline{e}_{j+1}, \ldots, \underline{e}_n]$$
ottenendo la matrice
$$[A_1, \ldots, A_{j-1}, \alpha A_j + \beta A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n]$$
moltiplica il determinante per α*.*

2. *L'operazione* $A^j \longrightarrow \alpha A^j + \beta A^i$*, che si può realizzare moltiplicando a destra* A *per la matrice (con* $i \neq j$*) le cui* colonne *sono*
$$[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{j-1}, \alpha\underline{e}_j + \beta\underline{e}_i, \underline{e}_{j+1}, \ldots, \underline{e}_n]$$
ottenendo la matrice
$$[A^1, \ldots, A^{j-1}, \alpha A^j + \beta A^i, A^{j+1}, \ldots, A^n]$$
moltiplica il determinante per α*.*

Dimostrazione. Dalle proposizioni precedenti, oppure possiamo notare che in ambedue i casi il determinante della matrice per cui moltiplichiamo A è uguale ad α e la tesi segue per il teorema di Binet. □

Osservazione 9.30. `[EEA98]` *Nel caso precedente, se* $i < j$ *abbiamo una matrice triangolare inferiore, se* $i > j$ *triangolare superiore per le righe. Viceversa per le colonne.*

Osservazione 9.31. `[EEZ99]` *Nelle ipotesi della proposizione 9.29*

1. *Se* $\alpha = 1$ *abbiamo un passo di riduzione di Gauss.*
2. *Se* $\alpha = 0$*, il determinante della matrice risultato è* 0*.*
3. *Se* $\alpha \neq 0$*,* $\beta = 0$ *stiamo moltiplicando la riga (colonna)* j*-esima per* α *ed il determinante della matrice risultato è il determinante di* A *moltiplicato per* α*.*

Proposizione 9.32. `[EEX99]` *Per una matrice quadrata* A *e la sua riduzione in forma normale* N*, ottenuta con lo scambio di* k *righe ed* s *colonne e la moltiplicazione di righe per gli scalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ *abbiamo che*
$$\det(N) = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A$$

Dimostrazione. La riduzione in forma normale N si può ottenere da A mediante una serie di operazioni di scambio riga e/o colonna, riduzioni di Gauss e moltiplicazione di righe per scalare. Quindi $N = LAR$ dove L è il prodotto, in un certo ordine, di matrici del tipo S_n^{ij}, $G_n^{ij}(\lambda)$ e $S_n^i(\mu)$ (scambio di righe, riduzione, moltiplicazione di una riga per uno scalare), precisamente

- k matrici S_n^{ij}, (scambio riga).
- t matrici $S_n^i(\lambda)$, una per ogni pivot $p_i = \frac{1}{\lambda_i}$.
- Un certo numero di matrici $G_n^{ij}(\lambda)$.

e R è il risultato del prodotto di s matrici S_n^{ij} (scambio colonna), a destra.

Ricordando che

- $\det S_n^{ij} = -1$.
- $\det S_n^i(\lambda) = \lambda$.

- $\det G_n^{ij}(\lambda) = 1$.

Per il teorema di Binet

$$\begin{aligned} N &= L \cdot A \cdot R \\ \det(N) &= \det(L \cdot A \cdot R) \\ \det(N) &= \det(L)\det(A)\det(R) \\ \det(N) &= (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{t} \lambda_i\right) \det(A)(-1)^s \\ \det(N) &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A \end{aligned}$$

□

Corollario 9.33. [EEX45] *In particolare,*

- $\det A = 0$ *se e solo se c'è almeno una riga di zeri in* N*.*
- *Se* $\det A \neq 0$*, ovvero se* $N = I_n$*, abbiamo* n *pivot* $p_1, \ldots, p_n$ *con* $p_i = \frac{1}{\lambda_i}$ *e*

$$\begin{aligned} \det(N) &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A \\ 1 = \det I_n &= (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \det A \end{aligned}$$

da cui

$$\det A = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = (-1)^{k+s} \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Corollario 9.34. [EEY47] *Una matrice quadrata ha inversa destra se e solo se ha determinante non nullo.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.32, $\det A \neq 0$ se e solo se $\det N \neq 0$, cioè se e solo se la forma normale N di A è I_n; questo accade se e solo se i sistemi $A\underline{x} = \underline{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$, hanno soluzione (unica, Proposizione 5.35), cioè se e solo se A ha inversa destra. □

Proposizione 9.35. [EEN99] *Una matrice quadrata* A *è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$*.*

Dimostrazione.

- Abbiamo che $\det A \neq 0$ se e solo se A ha inversa destra.
- Dimostriamo che $\det A \neq 0$ se e solo se A ha inversa sinistra.

  Infatti

$$\begin{aligned} A \text{ ha inversa sinistra } &\Leftrightarrow X \cdot A = I_n \text{ per opportuna } X \\ &\Leftrightarrow (X \cdot A)^T = (I_n)^T \\ &\Leftrightarrow A^T \cdot X^T = I_n \\ &\Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A^T) = \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che A ha inversa destra e sinistra se e solo se $\det A \neq 0$, quindi per la Proposizione 7.43, A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. □

Definizione 9.36. [EEK46] *Una matrice quadrata si dice* singolare *se ha il determinante nullo.*

Osservazione 9.37. [EEY46] *Per la Proposizione 9.35, per una matrice quadrata essere invertibile è equivalente ad essere non singolare.*

Corollario 9.38. [EEE70] *Se la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è invertibile abbiamo*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Binet. Da $A^{-1}A = I_n$ Abbiamo

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}A) &= \det(I_n) \\ \det(A^{-1})\det(A) &= 1 \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \end{aligned}$$

□

Corollario 9.39 (Trasposta e inversa)**.** [EEQ17] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora A invertibile se e solo se A^T invertibile, ed abbiamo*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Dimostrazione. Che A sia invertibile se e solo se A^T è invertibile segue immediatamente da $\det(A^T) = \det A$ e dalla Proposizione 9.35 precedente.

Per la seconda parte

$$A^{-1}A = I_n \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)^T = I_n \Leftrightarrow A^T\left(A^{-1}\right)^T = I_n$$

quindi $\left(A^{-1}\right)^T$ è inversa destra, quindi inversa di A^T, e quindi $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$. □

Corollario 9.40 (Righe/colonne uguali)**.** [EEE75] *Una matrice A con due righe (o colonne) uguali ha determinante nullo.*

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, supponiamo che la prima e seconda riga siano uguali. Applichiamo un'operazione di Gauss che lascia invariato il determinante

$$\det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II^a - I^a \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = 0$$

dato che la matrice ha una riga nulla. Analogamente per le colonne. □

Un esempio completo di calcolo del determinante

Esempio 9.41. [EEE83]

$$\det\begin{pmatrix}5&5&5&5&5\\3&3&3&1&3\\9&3&2&1&7\\1&2&2&1&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&3&3&1&3\\9&3&2&1&7\\1&2&2&1&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix} \quad I^a \to 1/5 \cdot I^a$$

$$= 5\det\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&-2&0\\9&3&2&1&7\\1&2&2&1&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix} \quad II^a \to II^a - 3 \cdot I^a$$

Sviluppo per la seconda riga

$$= -10\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\9&3&2&7\\1&2&2&2\\1&2&3&5\end{pmatrix}$$

$$= -10\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\9&3&2&7\\-1&0&0&0\\1&2&3&5\end{pmatrix} \quad III^a \to III^a - 2 \cdot I^a$$

Sviluppo per la terza riga

$$= 10\det\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&7\\2&3&5\end{pmatrix}$$

calcolo a parte questo determinante

$$= 10 \cdot (-7) = -70$$

9.3 Determinante e lineare indipendenza

Proposizione 9.42. [EEX46] *Le righe e le colonne di una matrice quadrata sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice è non singolare.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di lineare indipendenza e dalla caratterizzazione dell'invertibilit data dal Proposizione 7.50.

Infatti per $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\det A \neq 0$ se e solo se A è invertibile se e solo se il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha un'unica soluzione se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti. Per le righe, si ripete il ragionamento precedente con A^T, che è non singolare perché A è non singolare.

□

Esempio 9.43. [FFQ81] *I vettori* $(1,2,0),(4,2,0),(4,4,5)$ *sono linearmente indipendenti? Sì, dato che*

$$\det\begin{pmatrix}1&2&0\\4&2&0\\4&4&5\end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix}1&2\\4&2\end{pmatrix} = 5(-6) = -30 \neq 0$$

sviluppando per la terza colonna.

Osservazione 9.44. [FFF25] *Vediamo il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice* 3×3 *con i vari metodi. Il costo di una divisione viene calcolato uguale a quello di una moltiplicazione. Il costo di una somma viene ritenuto irrilevante rispetto al costo di una moltiplicazione.*

- *Calcolare il determinante di una matrice* 3×3 *con la regola del Sarrus richiede* 12 *moltiplicazioni.*
- *Calcolare il determinante di una matrice* 3×3 *con lo sviluppo di Laplace richiede* 9 *moltiplicazioni.*
- *Calcolare il determinante di una matrice* 3×3 *con riduzione a scala mediante Gauss richiede* 8 *moltiplicazioni.*

Si vede immediatamente che il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ con lo sviluppo di Laplace è molto alto.

Mediante sviluppo di Laplace

- Matrice 4×4: quattro determinanti di matrici 3×3 e quattro moltiplicazioni: $4(9)+4 = 40$ moltiplicazioni.
- Matrice 5×5: cinque determinanti di matrici 4×4 e cinque moltiplicazioni: $5(40)+5 = 205$ moltiplicazioni.
- Matrice 6×6: sei determinanti di matrici 5×5 e sei moltiplicazioni: $6(205) + 6 = 1236$ moltiplicazioni.

Esempio 9.45. [FFW25] *Determinare il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice* $n \times n$ *mediante sviluppi di Laplace.*

Esempio 9.46. [FFQ25] *Determinare il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice* $n \times n$ *mediante riduzione a scala.*

Osservazione 9.47. [HHH61] *Notiamo che il determinante della matrice a blocchi*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

che è 4*, è uguale al prodotto dei determinanti dei singoli blocchi*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 = 4$$

Proposizione 9.48. [HHH71] *Data la matrice quadrata*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

con matrici A, B, C *di dimensioni opportune abbiamo che*

$$\det M = \det A \cdot \det C$$

Dimostrazione. Lasciata come esercizio. Hint: operare una riduzione di Gauss □

9.4 Tag variable Gauss

Proposizione 9.49 (Tag variable Gauss)**.** [FFF11] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *una matrice di righe* $A_1, \ldots, A_m$*,* $v_1, \ldots, v_m$ *variabili,* B *la matrice*

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \underline{w}_1 & p_1(v_1, \ldots, v_m) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{w}_m & p_m(v_1, \ldots, v_m) \end{array}\right)$$

con $p_i(v_1,\dots,v_m) \in \mathbb{K}[v_1,\dots,v_m]$ *polinomio omogeneo di grado* 1 *tale che per ogni* $i : 1,\dots,m$

$$B_i = (\underline{w}_i, p_i(v_1,\dots,v_m)) \text{ e } p_i(A_1,\dots,A_m) = \underline{w}_i \in \mathbb{K}^n$$

ed S *ottenuta da* B *con uno scambio di riga o un'operazione* $S_j = B_j + \lambda B_i$.

Allora ogni riga S_i *di* S*, con* $i : 1,\dots,m$*, si può scrivere nella forma*

$$S_i = (\underline{w}'_i, p'_i(v_1,\dots,v_m)) \tag{9.1}$$

con $p'_i(v_1,\dots,v_m) \in \mathbb{K}[v_1,\dots,v_m]$ *polinomio omogeneo di grado* 1 *tale che*

$$p'_i(A_1,\dots,A_m) = w'_i \in \mathbb{K}^n \tag{9.2}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Corollario 9.50. [FFQ21] *Dato che abbiamo dimostrato questa proprietà per un passo di riduzione di Gauss (scambio riga o riduzione), e che vale per il caso iniziale*

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_m & v_m \end{array}\right)$$

(è un caso particolare della dimostrazione precedente), la tesi vale per S *risultato di una riduzione a scala di* B *come sopra, ovvero se* B *si riduce ad* S *a scala.*

Esempio 9.51. [FFX20] *Determinare le relazioni lineari tra i vettori*

$$\underline{v}_1 = (1,2,3,2), \underline{v}_2 = (1,1,0,3), \underline{v}_3 = (3,4,3,8), \underline{v}_4 = (-1,1,6,-5),$$

Mettiamo i vettori per riga in una matrice, aggiungiamo una colonna di variabili tag e riduciamo.

```
Use R::=Q[v[1..4]];
M:=Mat([[ 1, 2, 3, 2,v[1]],
        [ 1, 1, 0, 3,v[2]],
        [ 3, 4, 3, 8,v[3]],
        [-1, 1, 6,-5,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, v[1]]
     2^a-1*1^a [0, -1, -3, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a-3*1^a [0, -2, -6, 2, -3v[1] + v[3]]
     4^a+1*1^a [0, 3, 9, -3, v[1] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 2, v[1]]
-------------- [0, -1, -3, 1, -v[1] + v[2]]
     3^a-2*2^a [0, 0, 0, 0, -v[1] - 2v[2] + v[3]]
     4^a+3*2^a [0, 0, 0, 0, -2v[1] + 3v[2] + v[4]]
```

I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ *sono linearmente indipendenti, gli altri due sono combinazioni lineari dei primi due e si esplicitano dalle relazioni lineari trovate*

$$\begin{aligned} -v[1] - 2v[2] + v[3] = 0 &\Rightarrow v[3] = v[1] + 2v[2] \\ -2v[1] + 3v[2] + v[4] = 0 &\Rightarrow v[4] = 2v[1] - 3v[2] \end{aligned}$$