

Capitolo 8

Ottava lezione - Esercizi

8.1 Indipendenza lineare

Esercizio 8.1. [CCB42] *I numeri complessi $1+i$, 4 sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$? Su $\mathbb{R}$?*

1. Risolviamo per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ il sistema omogeneo

$$\{\alpha(1+i) + \beta 4 = 0 \Leftrightarrow \{\beta = -\frac{1+i}{4}\alpha$$

le soluzioni sono quindi

$$\left\{ \left(\lambda, -\frac{1+i}{4}\lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

dato che ci sono altre soluzioni oltre a $\underline{0}$ i numeri complessi $1+i$, 4 sono linearmente dipendenti su $\mathbb{C}$.

2. Risolviamo per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo

$$\{\alpha(1+i) + \beta 4 = 0 \Leftrightarrow \{\alpha + 4\beta + \alpha i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

l'unica soluzione è quindi $\underline{0}$ ed i numeri complessi $1+i$, 4 sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.2. [CCS42] *Il vettore $\underline{0}$ è dipendente anche da se stesso, infatti $3 \cdot \underline{0} = \underline{0}$ ma $3 \neq 0$.*

Esercizio 8.3. [KK13] *Stabilire se i tre vettori $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 4, 7) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.*

Soluzione: Usando la definizione di indipendenza lineare, questa domanda equivale a chiedersi se il sistema

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(2, 4, 7) = \underline{0}$$

ammette solo la soluzione $\underline{0}$. Dato che $(1, 2, 3) + (1, 2, 4) = (2, 4, 7)$ il sistema ammette anche la soluzione $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = -1$; i tre vettori non sono quindi linearmente indipendenti. $\square$

Esercizio 8.4. [LL82] *Dati i polinomi in $\mathbb{R}[x]$*

$$p_1(x) = x^7 + 3x^5 - 3x^2 + 1$$

$$p_2(x) = 5x^7 + 2x^2 + 3$$

$$p_3(x) = -4x^5 + 3x^2 + 2$$

$$p_4(x) = 6x^7 - x^5 + 2x^2 + 6$$

stabilire se sono linearmente indipendenti e in caso contrario, determinare una relazione lineare tra di essi.

Soluzione. Usiamo la definizione di indipendenza lineare, cercando le soluzioni del sistema omogeneo in $\alpha, \beta, \gamma, \theta$

$$\alpha(x^7 + 3x^5 - 3x^2 + 1) + \beta(5x^7 + 2x^2 + 3) + \gamma(-4x^5 + 3x^2 + 2) + \theta(6x^7 - x^5 + 2x^2 + 6) \equiv 0_{\mathbb{R}[x]}$$

ovvero, raccogliendo le potenze della x

$$x^7(\alpha + 5\beta + 6\theta) + x^5(3\alpha - 4\gamma - \theta) + x^2(-3\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\theta) + \alpha + 3\beta + 2\gamma + 6\theta \equiv 0_{\mathbb{R}[x]}$$

che per il principio di identità dei polinomi ci dà il sistema in quattro equazioni, quattro incognite

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta + 6\theta = 0 \\ 3\alpha - 4\gamma - \theta = 0 \\ -3\alpha + 2\beta + 3\gamma + 2\theta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma + 6\theta = 0 \end{cases}$$

che risolviamo con Gauss

```
A:=Mat[[1, 5, 0, 6,0],
        [3, 0, -4, -1,0],
        [-3, 2, 3, 2,0],
        [1, 3, 2, 6,0]];
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 5, 0, 6, 0]
      2^a-3*1^a [0, -15, -4, -19, 0]
      3^a+3*1^a [0, 17, 3, 20, 0]
      4^a-1*1^a [0, -2, 2, 0, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-15
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 5, 0, 6, 0]
----- [0, -15, -4, -19, 0]
      3^a+17/15*2^a [0, 0, -23/15, -23/15, 0]
      4^a-2/15*2^a [0, 0, 38/15, 38/15, 0]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-23/15
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 5, 0, 6, 0]
----- [0, -15, -4, -19, 0]
----- [0, 0, -23/15, -23/15, 0]
      4^a+38/23*3^a [0, 0, 0, 0, 0]
```

Già dalla penultima matrice, che ha due righe multiple una dell'altra, possiamo vedere che non esiste un'unica soluzione, quindi i quattro polinomi sono linearmente dipendenti.

Cerchiamo quindi una relazione lineare tra i polinomi, ovvero una soluzione non nulla del sistema

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta + 6\theta = 0 \\ -15\beta - 4\gamma - 19\theta = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha = -\theta \\ \beta = -\theta \\ \gamma = -\theta \end{cases}$$

Quindi

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{(-d, -d, -d, d) \mid d \in \mathbb{R}\}$$

e quindi $(1, 1, 1, -1) \in \text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ e

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) - p_4(x) \equiv_{\mathbb{R}[x]} 0$$

è una relazione lineare tra i quattro polinomi. □

Esercizio 8.5. [CCB00] *I polinomi in $\mathbb{K}[x]$*

$$x^3 + x + 2, x^2 - 1, 3x - 2, 6$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$?

Soluzione. Basta vedere il numero di soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{aligned} \alpha(x^3 + x + 2) + \beta(x^2 - 1) + \gamma(3x - 2) + \delta 6 &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha + 3\gamma)x + 2\alpha - \beta - 2\gamma + 6\delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma + 6\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

Quindi $\text{Sol} = \{0\}$ ed i quattro polinomi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$. □

Esercizio 8.6. [CCB03] *Le funzioni*

$$\begin{array}{lll} F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x & x \mapsto \cos x & x \mapsto x \end{array}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$?

Soluzione. Usando la definizione di indipendenza lineare, dobbiamo vedere se l'unica soluzione dell'equazione a variabili $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma x \equiv \mathbf{0}$$

è la tripla $(\alpha, \beta, \gamma) = \underline{0}$, dove $\mathbf{0}$ è la funzione nulla

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$$

L'uguaglianza sulle funzioni diviene, per il principio di identità delle funzioni,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin x_0 + \beta \cos x_0 + \gamma x_0 = 0$$

e queste sono infinite equazioni nelle tre variabili α, β, γ , una equazione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dato che questa uguaglianza vale per tutti gli $x_0 \in \mathbb{R}$, vale in particolare per $x_0 = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$, che scelgo per la semplicità dei calcoli relativi, avrei potuto prendere altri numeri.

$$\begin{cases} \alpha \sin 0 + \beta \cos 0 + \gamma 0 = 0 & x_0 = 0 \\ \alpha \sin \pi + \beta \cos \pi + \gamma \pi = 0 & x_0 = \pi \\ \alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2} = 0 & x_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ovvero, dato che $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ -\beta + \gamma\pi = 0 \\ \alpha + \gamma\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Quindi necessariamente $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e le tre funzioni sono quindi linearmente indipendenti.

Ricordiamo che il nome della variabile associato a $\forall$, che si comporta come parametro, può essere cambiato a piacere. Avremmo potuto considerare la relazione

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin a + \beta \cos a + \gamma a = 0$$

oppure

$$\forall \spadesuit \in \mathbb{R} \quad \alpha \sin \spadesuit + \beta \cos \spadesuit + \gamma \spadesuit = 0$$

□

8.2 Prodotto di matrici

Esercizio 8.7. [DDD24] *Dimostrare che per il prodotto di matrici non vale la legge di cancellazione del prodotto ovvero, per $A, B, C \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ non vale necessariamente*

$$AB + AC = 0 \Rightarrow B + C = 0$$

Soluzione. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} A \cdot B + A \cdot C &= A \cdot (B + C) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} B + C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

□

Corollario 8.8. [EEE12] *Abbiamo che $(\{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \exists A^{-1}\}, \cdot)$ è un gruppo rispetto al prodotto di matrici con neutro I_n .*

Dimostrazione. L'insieme è chiuso rispetto al prodotto e soddisfa tutte le condizioni di gruppo. □

Osservazione 8.9. [DDD15] *Dimostrare che date due matrici $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ abbiamo che*

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Se le due matrici commutano (se $AB = BA$) allora ritroviamo la formula usuale

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Esercizio 8.10. [DDD32] *Trovare una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ non nulla tale che $A^2 = 0$.*

Soluzione. Proviamo con una matrice 2×2 quasi nulla, ma con diagonale nulla (altrimenti ripetiamo una riga non nulla nel quadrato)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

□

Definizione 8.11. [DDD14] *Una matrice non nulla $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è detta nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che*

$$A^k = 0$$

8.3 Matrici elementari

Vediamo che le operazioni di Gauss possono essere interpretate come moltiplicazioni per matrici speciali, dette *matrici elementari*.

Per lo scambio di righe:

Definizione-Proposizione 8.12. [DDD50] *La matrice identità I_n con le righe i -esima e j -esima scambiate si indica come S_n^{ij} . Data una matrice $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, la matrice $S_n^{ij} \cdot B$ è uguale alla matrice B ma con le righe i -esima e j -esima scambiate.*

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto matriciale.

□

Esercizio 8.13. [DDD51]

$$S_5^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} S_5^{24} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per la cancellazione:

Definizione-Proposizione 8.14. [DDD53] La matrice identità I_n con la riga i -esima sostituita dalla riga $(I_n)_i + \lambda(I_n)_j$ (la somma della riga i -esima e della riga j -esima moltiplicata per λ) si indica come $G_n^{ij}(\lambda)$. Data una matrice $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, la matrice $G_n^{ij}(\lambda) \cdot B$ è uguale alla matrice B ma con la riga i -esima B_i sostituita da $B_i + \lambda B_j$.

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto matriciale. □

Esercizio 8.15. [DDD54]

$$G_3^{21}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e vediamo che moltiplicare a sinistra per $G_3^{21}\left(-\frac{3}{2}\right)$ l'opportuna matrice equivale a fare un'operazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad II^a \rightarrow II^a - \frac{3}{2} I^a$$

Definizione 8.16. [DDD57] Le matrici del tipo S_n^{ij} , $G_n^{ij}(\lambda)$ e $S_n^i(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$ (la matrice identità con la riga i -esima moltiplicata per λ , che realizza la moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo; cfr. la Definizione-Proposizione 9.15) si dicono matrici elementari.

8.4 Matrici non quadrate

Osservazione 8.17. [EEE13] Diciamo che una matrice non necessariamente quadrata $A \in \text{Mat}_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}(\mathbb{K})$ ha inversa destra $X \in \text{Mat}_{\mathbf{n} \times \mathbf{m}}(\mathbb{K})$ se $A \cdot X = I_m$. Analogamente, diciamo che ha inversa sinistra $Y \in \text{Mat}_{\mathbf{n} \times \mathbf{m}}(\mathbb{K})$ se $Y \cdot A = I_n$. Le due inverse hanno lo stesso ordine $n \times m$, ma se la matrice non è quadrata non possono esistere entrambe (lo vedremo con il rango): non ha quindi senso parlare di inversa.

Esercizio 8.18. [EEE14] Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare, se esistono, una sua inversa destra ed una sua inversa sinistra.

Esercizio 8.19. [DDD22] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dire se è nilpotente.

Soluzione. Svolgiamo i conti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $A^2 \neq 0$. Vediamo $A^3 = A \cdot A^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $A^3 = 0$ e A è nilpotente. □

Esercizio 8.20. [DDA24] *Determinare una matrice X in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tale che*

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Procediamo con la forza bruta: costruiamo la matrice di incognite

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad x, y, z, t \in \mathbb{C}$$

e vediamo quando

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt - 1 \\ xz + zt & yz + t^2 + 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ xy + yt - 1 = 0 \\ xz + zt = 0 \\ yz + t^2 + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema è complesso, e a noi è richiesta solo una soluzione. Proviamo a dare dei valori opportuni ad una variabile per semplificare il sistema, sperando che il sistema semplificato abbia soluzioni. Poniamo $t = i$: l'ultima equazione diviene $yz = 0$. Scegliamo $z = 0$. Il sistema diviene quindi

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ xy + yi - 1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \\ t = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ yi - 1 = 0 \\ z = 0 \\ t = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{i} = -i \\ z = 0 \\ t = i \end{cases}$$

Quindi una soluzione è

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 8.21. [MMX56] *(Lo stesso problema è risolto con la riduzione di Gauss nell'Esercizio 8.22.) Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

determinare, se esiste, l'inversa di A .

Soluzione. Proviamo a calcolare l'inversa per forza bruta, visto il numero di zeri presenti in A . Stiamo quindi cercando una matrice incognita $X \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tale che

$$A \cdot X = I_4$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} + x_{31} - 1 & 3x_{12} + x_{32} & 3x_{13} + x_{33} & 3x_{14} + x_{34} \\ x_{11} & x_{12} - 1 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} - 1 & x_{24} \\ 2x_{31} + x_{41} & 2x_{32} + x_{42} & 2x_{33} + x_{43} & 2x_{34} + x_{44} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

ed otteniamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_{11} + x_{31} = 1 \\ 3x_{12} + x_{32} = 0 \\ 3x_{13} + x_{33} = 0 \\ 3x_{14} + x_{34} = 0 \\ x_{11} = 0 \\ x_{12} = 1 \\ x_{13} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{23} = 1 \\ x_{24} = 0 \\ 2x_{31} + x_{41} = 0 \\ 2x_{32} + x_{42} = 0 \\ 2x_{33} + x_{43} = 0 \\ 2x_{34} + x_{44} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 0 \\ x_{12} = 1 \\ x_{13} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{23} = 1 \\ x_{24} = 0 \\ x_{31} = 1 \\ x_{32} = -3 \\ x_{33} = 0 \\ x_{34} = 0 \\ x_{41} = -2 \\ x_{42} = 6 \\ x_{43} = 0 \\ x_{44} = 1 \end{array} \right.$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 8.22. [MMX59] (Lo stesso problema è risolto con un sistema lineare nell'Esercizio 8.21.) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

determinare, se esiste, l'inversa di A .

Soluzione. Procediamo con il metodo dell'identità:

```
AI4:=Mat[[3 , 0 , 1 , 0, 1, 0, 0, 0],
          [1 , 0 , 0 , 0, 0, 1, 0, 0],
          [0 , 1 , 0 , 0, 0, 0, 1, 0],
          [0 , 0 , 2 , 1, 0, 0, 0, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI4);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a-(1/3)*1^a [0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
```

Scambio la 2^a e la 3^a riga

Adesso la matrice e'

```
Mat([[3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0],
      [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
      [0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0],
      [0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]])
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

```
----- [3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1/3

Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot

```
----- [3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 0, -1/3, 0, -1/3, 1, 0, 0]
4^a-(-6)*3^a [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1

```
1^a*(1/3) [1, 0, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
3^a*(-3) [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Cancello la colonna sopra il pivot nella 4 colonna

```
----- [1, 0, 1/3, 0, 1/3, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
```

```
----- [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna

```
1^a-(1/3)*3^a [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna

```
----- [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
----- [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 1, -3, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 6, 0, 1]
```

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

□

Esercizio 8.23. [MM25] *Calcolare, se esiste, l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Procediamo col calcolo mediante l'aggiunta dell'identità. Costruiamo la matrice

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e riduciamola in forma diagonale mediante il procedimento di Gauss.

```
AI3:=Mat[[2, 3, 1, 1, 0, 0],
          [-1, 2, 2, 0, 1, 0],
          [6, 2, -2, 0, 0, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI3);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, 1, 0, 0]
2^a+1/2*1^a [0, 7/2, 5/2, 1/2, 1, 0]
3^a-3*1^a [0, -7, -5, -3, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=7/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, 1, 0, 0]
----- [0, 7/2, 5/2, 1/2, 1, 0]
3^a+2*2^a [0, 0, 0, -2, 2, 1]
```

La terza riga della matrice incompleta è nulla quindi A non è invertibile. Ma avrei potuto capirlo immediatamente dopo la riduzione della prima colonna: la seconda e la terza riga della matrice incompleta sono una multipla dell'altra, e quindi il passo successivo avrebbe necessariamente prodotto una riga nulla nell'incompleta. $\square$

Esercizio 8.24. [EEE43] *Data la matrice a blocchi*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

trovare una formula per A^n .

Soluzione. Calcoliamo qualche potenza finché non abbiamo un'idea della formula, che poi dimostreremo per induzione.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^2 &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 \cdot I_3 + \underline{v} \cdot \underline{0} & I_3 \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot 1 \\ \hline \underline{0} \cdot I_3 + 1 \cdot \underline{0} & \underline{0} \cdot \underline{v} + 1 \cdot 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & I_3 \cdot \underline{v} + \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^3 &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 2\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 3\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Abbiamo calcolato A^2, A^3 . Pensiamo che la formula sia

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & \underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)^k = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & k\underline{v} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array} \right)$$

Dimostriamolo per induzione sull'esponente della matrice, k .

- Base. $k = 1$: ovvio (abbiamo comunque verificato anche $k = 2, 3$).

- Passo induttivo. Supponiamo che valga

$$\left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{\underline{v}}{1} \right)^k = \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{k\underline{v}}{1} \right)$$

e dimostriamo che vale

$$\left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{\underline{v}}{1} \right)^{k+1} = \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{(k+1)\underline{v}}{1} \right)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{\underline{v}}{1} \right)^{k+1} &= \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{\underline{v}}{1} \right)^k \cdot \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{\underline{v}}{1} \right) \\ &= \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{k\underline{v}}{1} \right) \cdot \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{\underline{v}}{1} \right) \\ &= \left(\frac{I_3}{\underline{0}} \middle| \frac{(k+1)\underline{v}}{1} \right) \end{aligned}$$

□