

6.2 Esercizi proposti

Esercizio 6.19. [GGV01] *Determinare le eventuali relazioni di inclusione tra gli insiemi A_1, A_2 con*

1. $A_1 = \{1 + a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q}\}, A_2 = \{1 + a\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q}\}.$
2. $A_1 = \{1 + a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{R}\}, A_2 = \{1 + a\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{R}\}.$
3. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4\}, A_2 = \{\alpha(2, 1) + \beta(2, 2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$ *Determinare l'intersezione dei due insiemi.*
4. $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x - y - z = 0\}, A_2 = \{\lambda(2, 1, 1) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}.$
5. $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x - y - z = 0\}, A_2 = \{\lambda(2, 3, 1) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}.$

Soluzione.

1. Nessuna inclusione; $A_1 \cap A_2 = \{1\}.$
2. $A_1 = A_2 = \mathbb{R}.$
3. $A_1 \subsetneq A_2 = \mathbb{R}^2; A_1 \cap A_2 = A_1.$
4. $A_2 \subsetneq A_1.$
5. Nessuna inclusione; $A_1 \cap A_2 = \{0\}.$

□

Osservazione 6.20. [GGD01] *Quando diciamo che un sistema ha ∞^s soluzioni, intendiamo che l'insieme delle soluzioni ha bisogno di almeno s parametri per essere descritto. Questa nozione sarà dettagliata in seguito.*

Esercizio 6.21. [GG01] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = (0, 2, -1, 1).$

□

Esercizio 6.22. [GG02] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ 3x + y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + 2z + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = \left(\frac{4}{11}, 0, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right).$

□

Esercizio 6.23. [GG03] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni $(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}, y, z, -\frac{1}{4}\right)$. □

Esercizio 6.24. [GG04] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Il sistema è impossibile. □

Esercizio 6.25. [GG05] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ x + y + z + t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = \left(2, \frac{3}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ □

Esercizio 6.26. [CCA15] Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice, conservando le soluzioni nei primi due casi e, nel caso della forma normale, conservandole a meno di un eventuale riordino delle variabili.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Rango 4. Scala: righe $(1, 5, 0, 1, 1, 4)$, $(0, 0, 5, 0, 4, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 6)$ e due righe nulle. Standard: righe $(1, 5, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ e due righe nulle. Normale (colonne nell'ordine 1, 3, 5, 6, 2, 4): $\left(\frac{I_4}{0} \middle| \frac{B}{0}\right)$ con B di righe $(5, 1)$, $(0, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 0)$. □

Esercizio 6.27. [CCA14] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Rango 3. Scala: righe $(1, 2, 1)$, $(0, -5, -3)$, $(0, 0, -\frac{3}{5})$ e due righe nulle. Standard e normale: $\begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 6.28. [CCA13] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Rango 6 (determinante 73). Scala: righe $(1, 5, 0, 1, 1, 4)$, $(0, -9, 5, -2, 2, -8)$, $(0, 0, 1, 0, 2, 1)$, $(0, 0, 0, \frac{4}{3}, \frac{31}{3}, \frac{32}{3})$, $(0, 0, 0, 0, \frac{19}{12}, \frac{4}{3})$, $(0, 0, 0, 0, 0, -\frac{73}{19})$. Standard e normale: I_6 . $\square$

Esercizio 6.29. [CCA12] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & -6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Rango 4. Scala: righe $(1, 5, 0, 1, 1, 4)$, $(0, -9, 5, -2, 2, -8)$, $(0, 0, 1, 0, 2, 1)$, $(0, 0, 0, \frac{22}{9}, \frac{151}{9}, \frac{125}{9})$ e due righe nulle. Standard e normale: $\left(\begin{array}{c|c} I_4 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ con B di righe $(-\frac{59}{22}, -\frac{57}{22})$, $(-\frac{7}{11}, \frac{2}{11})$, $(2, 1)$, $(\frac{151}{22}, \frac{125}{22})$. $\square$

Esercizio 6.30. [CCC08] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y = 0\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy = 0\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \end{aligned}$$

Soluzione. $A_1 = A_2 = \{x = 0\} \cup \{x + y = 0\} \supsetneq A_3$. $\square$

Esercizio 6.31. [CCC07] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1+t, 1-t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ A_2 &= \{(1+t^2, 1-t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ A_3 &= \{(1+t^3, 1-t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Soluzione. $A_1 = A_3$ (la retta $x + y = 2$) $\supsetneq A_2$ (la semiretta $\{(1+s, 1-s) \mid s \geq 0\}$). $\square$