Capitolo 7

Settima Lezione - Matrici

7.1 Indipendenza lineare

Uno dei concetti basilari dell'Algebra Lineare: nel contesto dei sistemi di equazioni si può esprimere così : quali equazioni sono utili e quali inutili in un sistema di equazioni? Ovvero, quali si possono ricavare dalle altre? Queste equazioni "inutili" si definiranno linearmente dipendenti, quelle "utili" linearmente indipendenti.

Esempio 7.1. `[CCC64]` *Risolviamo in* $\mathbb{K}$ *il sistema*

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

Vediamo facilmente che nessuna delle due equazioni è superflua.

Esempio 7.2. `[CCC60]` *Risolviamo in* $\mathbb{K}$ *il sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+5y-z=2 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$$

Vediamo facilmente che la terza equazione è la somma delle altre due, ed è quindi superflua.

Esempio 7.3. `[CCC53]` *Risolviamo in* $\mathbb{K}$ *il sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+5y-z=2 \\ -x-7y+5z=-1 \end{cases}$$

Riduciamo con Gauss la matrice completa associata al sistema

```
A:=Mat([ [1,1,1,1],
         [2,5,-1,2],
         [-1,-7,5,-1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1]
```

```
     2^a-2*1^a [0, 3, -3, 0]
     3^a+1*1^a [0, -6, 6, 0]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1]
-------------- [0, 3, -3, 0]
     3^a+2*2^a [0, 0, 0, 0]
```

Notiamo che la terza riga è stata ridotta a zero, e quindi un sistema equivalente al dato è

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Facendo l'operazione (di Gauss) sulla seconda riga al contrario `2^a->2^a+2*1^a` *otteniamo il sistema equivalente*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \end{cases}$$

Abbiamo scoperto che la terza equazione è combinazione lineare delle prime due e quindi inutile.

Problema 7.4. `[CCC54]` *Dato un sistema di equazioni, come faccio a riconoscere le equazioni superflue?*

Notazione 7.5. `[CCC43]` *Siano* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$. *Indichiamo il vettore* $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) \in \mathbb{K}^{ns}$ *come* $\underline{\underline{v}}$.

Definizione 7.6. `[CCC41]` *Siano* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$. *Diciamo che* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ *sono* linearmente indipendenti *se una loro combinazione lineare nulla ha forzatamente tutti i coefficienti nulli. Più formalmente, se*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Scritto in forma più compatta

$$\forall\ \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n, \quad \underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\lambda} = \underline{0}$$

Vettori che non siano linearmente indipendenti si dicono *linearmente dipendenti*. Volendo, la definizione che non si riferisce esplicitamente all'indipendenza è la seguente:

Definizione 7.7. `[CCC44]` *I vettori* $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ *sono* linearmente dipendenti *se e solo se*

$$\exists\ \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n,\ \underline{\lambda} \neq \underline{0}\ \textit{tale che}\ \underline{\lambda} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{0}$$

o, scritto in modo meno compatto, se e solo se

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq \underline{0},\ \textit{tali che}\ \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

Esempio 7.8. `[CCC91]` *È facile vedere che i vettori* $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ *non sono linearmente dipendenti (sono quindi linearmente indipendenti) applicando la definizione: sto cercando* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *non tutti nulli tali che*

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) &= (0,0,0) \\ (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) &= (0,0,0) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema lineare è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, *quindi non esiste una soluzione non nulla e quindi i tre vettori non sono linearmente dipendenti. Sono quindi linearmente indipendenti.*

Definizione 7.9. [CCC68] *Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ si dice* omogeneo. *Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$.*

Osservazione 7.10. [CCC92] *Per verificare se i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ siano linearmente indipendenti o meno, basta verificare se il sistema lineare $\underline{x} \cdot \underline{v} = \underline{0}$ abbia un'unica soluzione (quella nulla è sempre presente, il sistema è omogeneo).*

Osservazione 7.11. [CCC75] *Posso copiare le definizioni che ho dato per i vettori per polinomi univariati e multivariati, equazioni, funzioni, matrici etc. etc..... Tutto quello che mi serve è la somma, la moltiplicazione per uno scalare e la definizione precisa di uguaglianza.*

Definizione 7.12. [CCC50] *Siano $f_1(\underline{x}), \ldots, f_n(\underline{x}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. Diciamo che $f_1(\underline{x}), \ldots, f_n(\underline{x})$ sono* linearmente indipendenti *se*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 f_1(\underline{x}) + \ldots + \lambda_n f_n(\underline{x}) \underset{\mathbb{K}[x]}{\equiv} 0 \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \underline{0}$$

Analogamente, per le funzioni

Definizione 7.13. [CCA51] *Siano $f_1, \ldots, f_n$ funzioni $: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$. Diciamo che $f_1, \ldots, f_n$ sono* linearmente indipendenti *se*

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \equiv \underline{0} \Rightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$$

Richiamo 7.14. [CCC51] *Ricordiamo che due funzioni*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g\colon & A & \to & B \\ & a & \mapsto & g(a) \end{array}$$

sono uguali come funzioni ($f \equiv g$) se e solo se

$$\forall\ a \in A\ f(a) = g(a)$$

Se un insieme di vettori è linearmente dipendente, ne posso esprimere uno mediante una combinazione lineare degli altri.

Proposizione 7.15. [CCC45] *Se $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^s$ sono linearmente dipendenti, allora esistono un indice j, con $1 \leq j \leq n$, e degli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che*

$$\underline{v}_j = \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_{j-1}\underline{v}_{j-1} + \lambda_{j+1}\underline{v}_{j+1} + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n$$

o, scritto in modo più compatto,

$$\underline{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \underline{v}_i$$

Dimostrazione. Dato che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

Per ipotesi esiste un $\alpha_j \neq 0$. Possiamo allora scrivere

$$\alpha_j \underline{v}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \Rightarrow \underline{v}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \underline{v}_i$$

e la tesi è dimostrata prendendo $\lambda_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ per $i : 1, \ldots, n$, $i \neq j$. □

Osservazione 7.16. [CCP45] *È immediato dalla proposizione precedente che posso esprimere mediante una combinazione lineare degli altri vettori tutti e soli i vettori il cui coefficiente nella combinazione lineare è non nullo.*

Esempio 7.17. [CCF11] *I vettori* $\underline{v}_1 = (1,1,1), \underline{v}_2 = (2,1,1), \underline{v}_3 = (3,2,2), \underline{v}_4 = (0,0,1)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti?*

Soluzione. I quattro vettori sono linearmente dipendenti, dato che la quadrupla $(1,1,-1,0)$ di coefficienti, non tutti nulli, mi dà la combinazione lineare nulla

$$(1)(1,1,1) + (1)(2,1,1) + (-1)(3,2,2) + (0)(0,0,1) = \underline{0}$$

ovvero $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}$.

Notiamo che da questa relazione possiamo esplicitare $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ o $\underline{v}_3$

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_2 \text{ o } \underline{v}_2 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 \text{ oppure } \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

ma non $\underline{v}_4$, perché il suo coefficiente nella combinazione lineare è 0. □

Il campo da cui posso scegliere gli scalari (i coefficienti della combinazione lineare) può essere importante.

7.2 Prodotto di matrici

Una motivazione

Notazione 7.18. [DDD00] *Spesso faremo riferimento alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

come $(a_{ij})_{ij}$ *o* (a_{ij}) *con* $i : 1 \dots m$, $j : 1 \dots n$.

Ricordiamo che

Osservazione 7.19. [DDD10] *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{ed il vettore} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere il sistema di equazioni lineari $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \textit{come} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Che, usando il prodotto scalare, possiamo scrivere come

$$\begin{cases} A_1 \cdot \underline{x} &= b_1 \\ & \vdots \\ A_i \cdot \underline{x} &= b_i \\ & \vdots \\ A_m \cdot \underline{x} &= b_m \end{cases}$$

in breve,

$$(A^1, \ldots, A^n) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

o

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Esempio 7.20. `[DDC10]` *Risolvere i tre sistemi*

$$S_1 : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x' + y' - z' = 1 \\ x' - y' - z' = 1 \\ 2x' + 2y' + 3z' = 1 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} x'' + y'' - z'' = 0 \\ x'' - y'' - z'' = 1 \\ 2x'' + 2y'' + 3z'' = 2 \end{cases}$$

Indichiamo le tre colonne dei termini noti come

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il primo sistema mediante una riduzione di Gauss a triangolare superiore

```
Ab:=Mat([[1, 1,-1,3],
         [1,-1,-1,0],
         [2, 2, 3,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3]
     2^a-1*1^a [0, -2, 0, -3]
     3^a-2*1^a [0, 0, 5, -5]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3]
-------------- [0, -2, 0, -3]
  0 sotto pivot[0, 0, 5, -5]
```

Notiamo che i tre pivot sono tutti nelle prime tre colonne. Portiamo la matrice incompleta in forma diagonale

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=5
Risultato Matrix:Pivots:Row swaps,Splits
------------------------------
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -1, 3]
```

```
     2^a*-1/2  [0, 1, 0, 3/2]
     3^a*+1/5  [0, 0, 1, -1]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
     1^a+1*3^a [1, 1, 0, 2]
-------------- [0, 1, 0, 3/2]
-------------- [0, 0, 1, -1]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
     1^a-1*2^a [1, 0, 0, 1/2]
-------------- [0, 1, 0, 3/2]
-------------- [0, 0, 1, -1]
```

Quindi

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right) \right\} \text{ ovvero } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che, come affermato nella Proposizione 5.35, anche nel procedimento di sostituzione all'indietro, nessuna operazione è dipesa da particolari valori nella colonna dei termini noti.

Potremmo risolvere gli altri due sistemi

$$A\underline{x}' = \underline{b}' \qquad A\underline{x}'' = \underline{b}''$$

nello stesso modo usando Gauss, ma dato che la matrice incompleta dei tre sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è uguale, e basandoci sulle osservazioni precedenti, invece di mettere in forma a scala le altre due matrici $(A \mid \underline{b}')$, $(A \mid \underline{b}'')$ *possiamo mettere a scala la matrice*

$$(A \mid \underline{b} \mid \underline{b}' \mid \underline{b}'')$$

dato che durante il procedimento di risoluzione i pivot, come già notato, possono essere sempre comunque limitati alla matrice incompleta, e quindi le colonne dei termini noti non influiscono sulle operazioni di Gauss che vengono effettuate. Avremo in un colpo solo le risoluzioni dei tre sistemi facendo le stesse operazioni di prima sulla matrice incompleta e replicando le operazioni di prima sulle altre colonne dei termini noti, $\underline{b}', \underline{b}''$.

```
Abbb:=Mat([[1, 1,-1,3,1,0],
           [1,-1,-1,0,1,1],
           [2, 2, 3,1,1,2]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Abbb);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
     2^a-1*1^a [0, -2, 0, -3, 0, 1]
     3^a-2*1^a [0, 0, 5, -5, -1, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
-------------- [0, -2, 0, -3, 0, 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 5, -5, -1, 2]
```

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -1, 3, 1, 0]
     2^a*-1/2  [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
     3^a*+1/5  [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
     1^a+1*3^a [1, 1, 0, 2, 4/5, 2/5]
-------------- [0, 1, 0, 3/2, 0, -1/2]
-------------- [0, 0, 1, -1, -1/5, 2/5]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot

     1^a-1*2^a [1, 0, 0, 1/2,  4/5, 9/10]
-------------- [0, 1, 0, 3/2,    0, -1/2]
-------------- [0, 0, 1,  -1, -1/5,  2/5]
```

Abbiamo ritrovato la soluzione del primo sistema e abbiamo trovato le soluzioni del secondo e terzo sistema

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{x}'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ -1/2 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere i tre sistemi come

$$A(\underline{x} \mid \underline{x}' \mid \underline{x}'') = (\underline{b} \mid \underline{b}' \mid \underline{b}'')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \\ x_2 & x_2' & x_2'' \\ x_3 & x_3' & x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x_1' + x_2' - x_3' & x_1'' + x_2'' - x_3'' \\ x_1 - x_2 - x_3 & x_1' - x_2' - x_3' & x_1'' - x_2'' - x_3'' \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x_1' + 2x_2' + 3x_3' & 2x_1'' + 2x_2'' + 3x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.3 Prodotto di matrici - definizione formale

Definizione 7.21 (Prodotto di matrici)**.** `[DDD02]` *Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\,\mathbb{K}$ Definiamo il prodotto $\odot$ delle matrici A, B come*

$$A \odot B \text{ con } (A \odot B)_{i,j} = (A_i \cdot B^j) \qquad i, j : 1 \dots n$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ & \vdots & \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & \dots & A_1 \cdot B^n \\ & \vdots & \\ A_n \cdot B^1 & \dots & A_n \cdot B^n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Più formalmente

$$\begin{array}{rccc} \odot\colon & \mathrm{Mat}_{n\times n}\,\mathbb{K} \times \mathrm{Mat}_{n\times n}\,\mathbb{K} & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n}\,\mathbb{K} \\ & (A, B) & \mapsto & (A_i \cdot B^j)_{i,j} \end{array}$$

Esempio 7.22. [DDD60]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \\ x_2 & x_2' & x_2'' \\ x_3 & x_3' & x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x_1' + x_2' - x_3' & x_1'' + x_2'' - x_3'' \\ x_1 - x_2 - x_3 & x_1' - x_2' - x_3' & x_1'' - x_2'' - x_3'' \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x_1' + 2x_2' + 3x_3' & 2x_1'' + 2x_2'' + 3x_3'' \end{pmatrix}$$

Osservazione 7.23. [DDC60] *In genere indicheremo il prodotto di matrici $A \odot B$ come $A \cdot B$ o anche AB*

Esempio 7.24. [DDD13]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.25. [DDD11]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} & (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} & (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} & (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\textit{oppure} = \begin{pmatrix} 1(1,4,7) + 0(2,5,8) + 0(3,6,9) \\ 0(1,4,7) + 0(2,5,8) + 1(3,6,9) \\ 1(1,4,7) + 1(2,5,8) + 1(3,6,9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

Molto utili per il calcolo pratico del prodotto matriciale in molti casi sono le due osservazioni seguenti:

Corollario 7.26. [DDD81] *Il risultato della moltiplicazione di una matrice A a sinistra per una matrice M è una matrice la cui riga i-esima è la combinazione lineare delle righe di A a coefficienti le componenti della riga i-esima di M.*

Ed analogamente

Osservazione 7.27. [DDD82] *Il risultato della moltiplicazione di una matrice A a destra per una matrice M è una matrice la cui colonna j-esima è la combinazione lineare delle colonne di A a coefficienti le componenti della colonna j-esima di M.*

Esempio 7.28. [DDD83] *Riprendendo l'Esempio 7.24, vediamo che seguendo l'osservazione 7.27 sopra,*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (1,0)\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\\ (2,3)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} & (2,3)\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$= \left(1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 11 & 16\end{pmatrix}$$

7.4 Anello delle matrici

Studiamo le proprietà di alcune operazioni sulle matrici: somma, prodotto esterno, prodotto interno

Osservazione 7.29. [DDD05] *Ricordiamo che due matrici $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij})$ appartenenti a $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sono uguali se e solo se*

$$\forall\ i,j : 1\dots n, \qquad a_{ij} = b_{ij}$$

Osservazione 7.30. [DDD06] *Ricordiamo che l'operazione*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\times\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\\ & ((a_{ij}),(b_{ij})) & \mapsto & (a_{ij}+b_{ij})\end{array}$$

si dice somma di matrici.

Osservazione-Definizione 7.31. [DDD77] *Ricordiamo che l'insieme $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),+)$ è un gruppo commutativo con neutro 0_n, la matrice $n\times n$ con entrate tutte nulle.*

Definizione-Proposizione 7.32. [DDD08] *L'operazione*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K}\times\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\\ & (\lambda, a_{ij}) & \mapsto & (\lambda a_{ij})\end{array}$$

si dice prodotto esterno o prodotto per uno scalare *ed ha tutte le solite proprietà del prodotto esterno.*

Esempio 7.33. [DDS08] *Le matrici in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$*

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$?

Soluzione. Dato che abbiamo la somma ed il prodotto esterno, possiamo usare l'usuale definizione di indipendenza lineare. La domanda si traduce nella domanda: l'equazione matriciale nelle variabili x, y, z

$$x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$$

ha solo la soluzione nulla $x = y = z = 0$?

$$\begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} x & 2x+y+z \\ 3x+y & 4x+z \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x+y+z = 0 \\ 3x+y = 0 \\ 4x+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

E le tre matrici sono quindi linearmente indipendenti. □

N.B. Quando questo non crei confusione, le matrici nulle $0_{m\times n}$ saranno indicate, per semplicità, come 0.

Proposizione 7.34. [DDD07] *L'insieme* $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *è un anello, non commutativo per* $n \geq 2$*, con neutro additivo* 0 *e neutro moltiplicativo* I_n*, la matrice quadrata diagonale di ordine* n *con* 1 *sulla diagonale.*

Dimostrazione. È facile verificare tutte le proprietà. In particolare, date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$

- $I_n \cdot A = A \cdot I_n$ per ogni $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$. Segue immediatamente dalla definizione.
- Per vedere che il prodotto di matrici è in genere non commutativo, basta vedere che esistono $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Abbiamo già visto che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

  Verifichiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

□

Notiamo che, essendo l'anello non commutativo, valgono tutte e due le proprietà distributive, destra e sinistra.

$$\forall\ A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \qquad \begin{matrix} (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \\ C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B \end{matrix}$$

Vale anche la proprietà di omogeneità

$$\forall\ A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda(A\cdot B) = (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)$$

Spesso indicheremo le matrici I_n come I.

Richiamo 7.35. [DDD99] *Una matrice non nulla* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *è detta zero-divisore se esiste una matrice non nulla* $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *tale che*

$$A \cdot B = 0$$

Esempio 7.36. [DDD78]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Queste matrici sono zero divisori.

Osservazione 7.37. [DDD79] *Segue immediatamente dalla definizione di prodotto di matrici che per* $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathrm{Mat}_{n\times s}(\mathbb{K})$ *si ha*

$$(A \cdot B)_{ij} = (A_i \cdot B^j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

con $i : 1 \dots m,\ j : 1 \dots s$.

7.5 Matrici invertibili

Ricordiamo che il prodotto di matrici non è commutativo. Una matrice può avere inverso rispetto all'operazione di prodotto tra matrici, naturalmente.

Definizione 7.38. [EEE00] *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Una matrice* $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *si dice* inversa moltiplicativa destra *di* A*, o semplicemente inversa destra, se* $A \cdot X = I_n$. *Si dice* inversa moltiplicativa sinistra *di* A*, o semplicemente inversa sinistra, se* $X \cdot A = I_n$. *Una matrice che sia contemporaneamente inversa destra e inversa sinistra di* A *si dice* inversa *di* A *e si scrive come* A^{-1}. **Ricordare: mai come** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}}$.

Esempio 7.39. [EEE01] *Troviamo l'inversa destra della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$

Soluzione. Introduciamo la matrice di incognite

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$

e risolviamo il sistema

$$A \cdot X = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

col metodo che abbiamo visto precedentemente, ovvero riducendo con Gauss la matrice

```
M:=Mat([[1,3,1,0],
        [2,2,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 3, 1, 0]
     2^a-2*1^a [0, -4, -2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-4
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 3, 1, 0]
     2^a*-1/4  [0, 1, 1/2, -1/4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot

     1^a-3*2^a [1, 0, -1/2, 3/4]
-------------- [0, 1, 1/2, -1/4]
```

La soluzione, e quindi l'inversa destra di A, è quindi

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dato che la soluzione del sistema è unica, l'inversa destra

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

è unica. □

Osservazione 7.40. [EEE02] *Dato che abbiamo fatto solo operazioni di Gauss, questo calcolo è indipendente dal campo, sarebbe stato lo stesso calcolo su* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}$*.....*

Esempio 7.41. [EEE03] *Troviamo l'inversa sinistra della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$

dell'esempio 7.39.

Soluzione. Proviamo a vedere se l'inversa destra è anche inversa sinistra, ed effettivamente

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lasciamo per esercizio il verificare che questa inversa sinistra è unica, ovvero che

$$X \cdot A = I_2 \Rightarrow X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo si può fare risolvendo esplicitamente il sistema $X \cdot A = I_2$ e vedendo che l'unica soluzione è $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, oppure, più rapidamente, che il sistema $X \cdot A = I_2$ ha un'unica soluzione, che quindi è necessariamente $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. □

Problema 7.42. [EEE04]

1. *L'inversa destra è sempre uguale all'inversa sinistra?*
2. *L'inversa è sempre unica?*
3. *Trovare un metodo efficiente per calcolare l'inversa.*
4. *Determinare se una matrice è invertibile senza calcolare esplicitamente l'inversa.*

Per i primi tre problemi, possiamo dare una risposta immediata:

Proposizione 7.43. [EEX04] *Se esistono inverse destra e sinistra di una matrice quadrata, sono uguali.*

Dimostrazione. Data $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, siano $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ le sue inverse destre e sinistre rispettivamente. Dobbiamo dimostrare che $X = Y$.

Per ipotesi abbiamo

$$AX = I_n \qquad YA = I_n$$

Allora

$$Y \cdot A = I_n \Rightarrow (Y \cdot A) \cdot X = I_n \cdot X \Leftrightarrow Y \cdot (A \cdot X) = X \Leftrightarrow Y \cdot I_n = X \Leftrightarrow Y = X$$

□

Proposizione 7.44. [EEY04] *L'inversa se esiste è unica*

Dimostrazione. Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, siano $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sue inverse. Dobbiamo dimostrare che $X = Y$.

Per ipotesi abbiamo

$$AX = I_n \qquad AY = I_n$$

Allora

$$\begin{aligned} AX = AY &\Leftrightarrow AX - AY = 0_n \\ &\Leftrightarrow A(X-Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow XA(X-Y) = X0_n \\ &\Leftrightarrow I_n(X-Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow (X-Y) = 0_n \\ &\Leftrightarrow X = Y \end{aligned}$$

□

Definizione 7.45. [FFF24] *Il vettore di $\mathbb{K}^n$ che ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima si indica come $\underline{e}_i$ o* vettore canonico i-esimo.

$$(0,0,1,0,0) = \underline{e}_3 \in \mathbb{K}^5$$
$$(1,0,0,0) = \underline{e}_1 \in \mathbb{K}^4$$

Con abuso di notazione, ometteremo quando non necessario l'indicazione precisa della dimensione dello spazio di riferimento, per evitare notazioni tipo $\underline{e}_3^4$ per indicare $(0,0,1,0)$.

Osservazione 7.46. [EEQ05] *Possiamo scrivere la matrice I_n come $[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n]$, intendendo sia le righe che le colonne. Più formalmente*

$$(I_n)_i = \underline{e}_i \qquad (I_n)^i = \underline{e}_i$$

Osservazione 7.47. [EEZ04] *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, posso calcolare l'inversa destra risolvendo il sistema matriciale*

$$AX = I_n$$

ovvero gli n sistemi lineari

$$A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \underline{e}_1, \ldots, A\begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \underline{e}_n$$

Notiamo che questo è equivalente a mettere in forma normale la matrice $[A \mid I_n]$.

- *Se nella parte relativa ad A ci sono righe nulle, il sistema non ha un'unica soluzione per la Proposizione 5.35, e la matrice A non ha inversa destra e quindi non è invertibile.*
- *Se non ci sono righe nulle, la forma normale è*

  $$[I_n \mid X]$$

  e leggo l'inversa destra direttamente dalla matrice, $A^{-1} = X$

Esempio 7.48. [EEE47] *Calcolare se possibile l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat([[1,2,3,1,0,0],
        [4,5,6,0,1,0],
        [7,8,9,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
     2^a-4*1^a [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-7*1^a [0, -6, -12, -7, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
-------------- [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-2*2^a [0, 0, 0, 1, -2, 1]
```

La terza riga ha la parte relativa ad A nulla e quella dei termini noti non nulla: i sistemi sono impossibili, quindi la matrice A non ha inversa destra e non è invertibile.

Esempio 7.49. [EEE40] *Calcolare se possibile l'inversa destra della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat([[1,2,3,1,0,0],
        [4,5,6,0,1,0],
        [7,8,8,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
     2^a-4*1^a [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-7*1^a [0, -6, -13, -7, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
-------------- [0, -3, -6, -4, 1, 0]
     3^a-2*2^a [0, 0, -1, 1, -2, 1]
     Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 2, 3, 1, 0, 0]
     2^a*-1/3  [0, 1, 2, 4/3, -1/3, 0]
       3^a*-1  [0, 0, 1, -1, 2, -1]
```

```
Cancello la colonna sopra il 3  pivot

    1^a-3*3^a  [1, 2, 0, 4, -6, 3]
    2^a-2*3^a  [0, 1, 0, 10/3, -13/3, 2]
-------------- [0, 0, 1, -1, 2, -1]

Cancello la colonna sopra il 2  pivot

    1^a-2*2^a  [1, 0, 0, -8/3, 8/3, -1]
-------------- [0, 1, 0, 10/3, -13/3, 2]
-------------- [0, 0, 1, -1, 2, -1]
```

L'inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} -8/3 & 8/3 & -1 \\ 10/3 & -13/3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 7.50. [EEE08] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *A ha inversa destra.*
2. *A ha inversa sinistra.*
3. *A è invertibile.*
4. *Il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha unica soluzione $\underline{x} = \underline{0}$.*
5. *Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha unica soluzione.*

Dimostrazione.

- Dimostreremo in seguito, usando il determinante, che le prime due condizioni sono equivalenti. Per la Proposizione 7.43, la terza condizione è quindi equivalente alle prime due.
- Le condizioni 4 e 5 sono equivalenti, dato che l'esistenza di una soluzione unica per una matrice quadrata si decide, facendo una riduzione di Gauss, guardando solo la matrice incompleta.
- La condizione 3 implica la 4, dato che

  $$A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{0} \Rightarrow I_n\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

  .
- La condizione 5 implica la 1, dato che se il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha un'unica soluzione per ogni $\underline{b}$ anche il sistema

  $$A \cdot [\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n] = [\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n] \Leftrightarrow AX = B$$

  ha unica soluzione e quindi, prendendo $B = I_n$, A ha inversa destra.

□

Proposizione 7.51. [EEE11] *Date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, abbiamo che $A \cdot B$ è invertibile se e solo se A, B sono invertibili e in questo caso $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$*

Dimostrazione. Vediamo che se A, B sono invertibili $A \cdot B$ è invertibile e la sua inversa è proprio $B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\begin{aligned}(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot I_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= I_n\end{aligned}$$

e quindi $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è inversa sinistra, e quindi (Proposizione 7.50) inversa, di $A \cdot B$.

Vediamo ora l'altra implicazione. Supponiamo che $A \cdot B$ sia invertibile e dimostriamo che A, B sono invertibili.

$$\begin{aligned}&(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I_n && \text{Dato che } A \cdot B \text{ è invertibile} \\ &A \cdot \left[B \cdot (A \cdot B)^{-1}\right] = I_n\end{aligned}$$

e questo mi dice che il prodotto di A per la matrice $B \cdot (A \cdot B)^{-1}$ è I_n, e quindi A ha inversa destra, quindi è invertibile. Posso fare lo stesso ragionamento su B ed ho quindi la tesi. □

7.6 Prodotto di matrici non quadrate

Possiamo facilmente generalizzare il prodotto matriciale $A \cdot B$ a matrici non quadrate, avendo cura che sia possibile fare i prodotti scalari, ovvero che il numero delle colonne di A sia uguale al numero di righe di B.

Definizione 7.52. [DDD04] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$. Allora la matrice $A \cdot B \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{K})$ così definita*

$$A \cdot B = \left(A_i \cdot B^j\right)_{i,j} \text{ con } i : 1 \dots m,\ j : 1 \dots k$$

si dice prodotto matriciale di A, B.

Notiamo che il numero delle colonne di A è uguale al numero di righe di B. I prodotti $A_i \cdot B^j$ hanno quindi senso

Valgono tutte le osservazioni e le definizioni che abbiamo visto sul prodotto di matrici quadrate, adattate naturalmente a questo caso. Le matrici non quadrate non formano un anello, visto che non è possibile definire un prodotto interno per matrici in $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $m \neq n$ del tipo che ci interessa.

Esempio 7.53. [DDD12]

1. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni 2×3 e 3×2 ha dimensioni 2×2*

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [4,5,6]]);

B:=Mat([[1,2],
        [4,5],
        [1,1]]);
A*B;
Mat[[12, 15],
    [30, 39]];
```

2. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 1×3 *e* 3×1 *ha dimensioni* 1×1

```
A:=Mat([[1,2,3]]);
B:=Mat([[1],
        [4],
        [1]]);
A*B;
Mat[[12]]
```

Si tratta in effetti, in questo caso, di un prodotto scalare

3. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 4×1 *e* 1×4 *ha dimensioni* 4×4

```
A:=Mat([[1],
        [4],
        [1],
        [0]]);
B:=Mat([[1,2,0,3]]);
A*B;
Mat[ [1, 2, 0, 3],
     [4, 8, 0, 12],
     [1, 2, 0, 3],
     [0, 0, 0, 0]]
```

4. *Il prodotto delle due matrici di dimensioni* 3×2 *e* 2×4 *ha dimensioni* 3×4

```
A:=Mat([[1,2],
        [4,1],
        [1,0]]);
B:=Mat([[1,2,0,3],
        [0,2,1,1]]);
A*B;
Mat([[1, 6, 2, 5],
     [4, 10, 1, 13],
     [1, 2, 0, 3]])
```

Esempio 7.54. [DDD23] *Il prodotto matriciale* $A \cdot B$ *delle matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

è definito?

Soluzione. Il prodotto matriciale di sopra non è definito perché il numero di colonne di $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ è diverso dal numero di righe di $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{K})$. Infatti non è possibile fare, per esempio, il prodotto scalare

$$(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

□

7.7 Matrice trasposta

Definizione 7.55. [EEE20] *Data una matrice*

$$A = (a_{ij})_{ij} \quad i : 1 \dots m,\ j : 1 \dots n$$

la matrice

$$(a_{ji})_{ij} \quad i : 1 \dots n,\ j : 1 \dots m$$

è detta matrice trasposta *di A e si scrive A^T. Trasporre una matrice lascia invariata la diagonale e scambia gli elementi sopra di essa con i corrispondenti elementi al di sotto. Da un altro punto di vista, trasporre una matrice ne scambia le righe con le colonne.*

Osservazione 7.56. [EEX20] *Notiamo che l'operazione di trasposizione di una matrice $(a_{ij})_{ij}$ si può definire anche come*

$$((a_{ij})^T)_{ij} = (a_{ji})_{ij}$$

Esempio 7.57. [EEE48]

```
M:=Mat([[1,1,1],
        [2,2,2],
        [3,3,3]]);
Transposed(M);
Mat[ [1, 2, 3],
     [1, 2, 3],
     [1, 2, 3]]
```

Esempio 7.58. [EEW48]

```
M:=Mat([[1,2,3],
        [4,5,6],
        [7,8,8]]);
Transposed(M);
Mat[ [1, 4, 7],
     [2, 5, 8],
     [3, 6, 8] ]
```

Proposizione 7.59 (Proprietà della trasposta)**.** [EEE17] *Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $\forall\ t \in \mathbb{K} \qquad (tA)^T = tA^T$.
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ *(qui con $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$, perché il prodotto sia definito).*

Dimostrazione.

1. Immediata.
2. Immediata.
3. Immediata.

4. Vediamo che $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ [Non svolta in classe]

$$\left((A \cdot B)^T\right)_{ij} = \left(\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{ij}\right)^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$
$$(B^T \cdot A^T)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

e dato che il prodotto di scalari è commutativo le due sommatorie sono uguali.
Notiamo che

- per la prima riga, la prima uguaglianza segue dalla definizione di prodotto di matrici

$$(a_{ij})_{ij} \cdot (b_{ls})_{ls} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{ij}$$

  e la seconda dalla definizione di trasposta $((a_{ij})^T)_{ij} = (a_{ji})_{ij}$.

- Analogamente per la seconda riga.

□

Esempio 7.60. [EEE16]

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [0,1,0],
        [1,1,1]]);
B:=Mat([[1,2,0],
        [1,2,0],
        [1,2,1]]);
A*B;
Mat[[6, 12, 3],
    [1, 2, 0],
    [3, 6, 1]]

Transposed(A*B);
Mat[[6, 1, 3],
    [12, 2, 6],
    [3, 0, 1]]

Transposed(B)*Transposed(A);
Mat[[6, 1, 3],
    [12, 2, 6],
    [3, 0, 1]]
```

7.8 Matrici a Blocchi

Definizione 7.61 (Matrici a blocchi)**.** `[CCQ00]` *Una matrice* $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *si può scrivere come*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

dove A, B, C, D *sono opportune matrici. La matrice* M *scritta in questo modo si dice* matrice a blocchi *e le matrici* A, B, C, D *si dicono* blocchi *della matrice* M*. Possiamo facilmente generalizzare la definizione a matrici con un numero qualunque di blocchi.*

Esempio 7.62. `[CCQ01]` *Esempi di matrici a blocchi*

1. $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

2. $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 9 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

4. $$\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline A & 0 & B \\ \hline C & C & C \end{array}\right)$$

Osservazione 7.63. `[CCD17]` *Una matrice* $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *in forma normale si può scrivere come*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_r & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

ove r *è il numero dei pivot, gli* 0 *sono opportune matrici di zeri (eventualmente vuote) e* A *è un'opportuna matrice.*

Osservazione 7.64 (Prodotto a blocchi)**.** `[EEE41]` *Date matrici* A_1, A_2, B_1, B_2 *di opportune dimensioni sullo stesso campo,*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\cdot B_{11} + A_{12}\cdot B_{21} & A_{11}\cdot B_{12} + A_{12}\cdot B_{22} \\ A_{21}\cdot B_{11} + A_{22}\cdot B_{21} & A_{21}\cdot B_{12} + A_{22}\cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Le formule valgono quando le dimensioni dei blocchi rendono possibile calcolare i vari prodotti e somme.