

Capitolo 6

Sesta Lezione - Esercizi

6.1 Esercizi svolti

Problema 6.1. [CCC10] Come faccio a testare se due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ sono uguali, o uno contiene l'altro?

1. Se i due insiemi sono finiti, controllo che abbiano stessa cardinalità e stessi elementi.
2. Se i due insiemi sono dati mediante equazioni (descrizione cartesiana, vedremo poi una definizione precisa), posso controllare se le due descrizioni equazionali si possono trasformare l'una nell'altra.
3. Se i due insiemi sono dati descrivendo un elemento generico (descrizione parametrica, vedremo poi una definizione precisa) possiamo controllare che ogni elemento del primo insieme appartenga al secondo e viceversa.

Esercizio 6.2. [CCE02] Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 4ix - 4 = 0\} \quad A_2 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 2xi - x + 2i = 0\}$$

Determinare se sono uguali o se uno contiene l'altro propriamente.

Soluzione. Abbiamo $x^2 - 4ix - 4 = (x - 2i)^2$, quindi

$$A_1 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 4ix - 4 = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid (x - 2i)^2 = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x - 2i = 0\} = \{2i\}$$

e dato che $x^2 - 2xi - x + 2i = (x - 1)(x - 2i)$, come si può vedere facilmente applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado ed il Teorema di Ruffini

$$A_2 = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 2xi - x + 2i = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid (x - 1)(x - 2i) = 0\} = \{1, 2i\}$$

Quindi $A_1 \subsetneq A_2$. □

Esercizio 6.3. [CRT02] Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\} \quad A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 + 1 = 0\}$$

Determinare le relazioni di inclusione tra A_1, A_2 .

Soluzione. L'equazione che descrive A_1 è $z^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0$ È quindi immediato che uno $z \in \mathbb{C}$ che soddisfi $z^4 + 1 = 0$ soddisfa $z^8 - 1 = 0$, mentre il viceversa non è vero. Quindi $A_1 \supseteq A_2$. L'esercizio si può risolvere determinando esplicitamente le otto radici complesse ottave di 1 e verificando che le quattro radici complesse quarte di -1 sono tra queste, ma il procedimento è più lungo. □

Esercizio 6.4. [CFT02] Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{C}^3$

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y - z = 0\} \quad A_2 = \{\lambda(-1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1) \mid z\lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$$

Determinare le relazioni di inclusione tra A_1, A_2 .

Soluzione. Verifichiamo se $A_1 \subseteq A_2$. Abbiamo che, considerando che $(x, y, z) \in A_1 \Leftrightarrow z = x + y$ e riconrdano il principio di identità per elementi di $\mathbb{C}^3$

$$\begin{aligned} A_1 \subseteq A_2 &\Leftrightarrow \forall \alpha \in A_1, \alpha \in A_2 \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in A_1, (x, y, z) \in A_2 \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in A_1, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ tali che } (x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{C}, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ tali che } (x, y, x+y) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{C}, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ tali che } \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ x + y = \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Stiamo quindi risolvendo un sistema lineare di tre equazioni in due incognite (λ, μ , legate a $\exists$) e due parametri (x, y , legati a $\forall$)

$$\begin{cases} -\lambda + \mu = x \\ \lambda = y \\ \mu = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + \mu = x \\ \lambda = y \\ \mu = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + \mu = x \\ \lambda = y \\ \mu = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = y \\ \mu = x + y \end{cases}$$

Quindi per ogni $x, y \in \mathbb{C}$ esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ che soddisfano le condizioni e $A_1 \subseteq A_2$. Possiamo dimostrare in modo analogo $A_2 \subseteq A_1$, sfruttando anche il lavoro già fatto per arrivare quasi immediatamente alla conclusione. $\square$

Esercizio 6.5. [CRE02] Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\} \quad A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 + 1 = 0\}$$

Determinare le relazioni di inclusione tra A_1, A_2 .

Soluzione. L'equazione che descrive A_1 è $z^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0$. È quindi immediato che uno $z \in \mathbb{C}$ che soddisfi $z^4 + 1 = 0$ soddisfa $z^8 - 1 = 0$, mentre il viceversa non è vero. Quindi $A_1 \supseteq A_2$ e quindi $A_1 = A_2$. $\square$

Esercizio 6.6. [CRX02] Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$A_1 = \{1 + a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{R}\} \quad A_2 = \{1 + b\sqrt{8} \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Determinare le relazioni di inclusione tra A_1, A_2 .

Soluzione. Vogliamo dimostrare che ogni elemento di A_1 sta in A_2 . Cioè che

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ tale che } 1 + a\sqrt{2} = 1 + b\sqrt{8}$$

risolviamo l'equazione $1 + a\sqrt{2} = 1 + b\sqrt{8}$ nell'incognita b con parametro a .

$$1 + b\sqrt{8} = 1 + a\sqrt{2} \Leftrightarrow b\sqrt{8} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow b = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{a}{2}$$

Abbiamo trovato b in dipendenza da a e quindi $A_1 \subseteq A_2$. L'altra inclusione si prova in modo analogo e quindi $A_1 = A_2$. $\square$

Per esercizio, vedere se sostituire $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$ cambia il risultato.

Esercizio 6.7. [CCC02] Siano dati i due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^2$

$$A_1 = \{(1 + 2t, 2 - 4t) \mid t \in \mathbb{Q}\} \quad A_2 = \{(3 - t, -2 + 2t) \mid t \in \mathbb{Q}\}$$

Determinare se $A_1 = A_2$.

Soluzione. Innanzitutto, per evitare confusioni, cambiamo il nome della variabile legata di A_2 da t ad s . Ricordiamo che i nomi delle variabili “legate”, che descrivono un insieme, hanno senso solo nella descrizione dell’insieme stesso.

$$A_2 = \{(3 - s, -2 + 2s) \mid s \in \mathbb{Q}\}$$

Vogliamo quindi vedere se ogni elemento di A_1 sta in A_2 e viceversa. Ovvero, se per ogni $t \in \mathbb{Q} \exists s \in \mathbb{Q}$ tale che $(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s)$ (incognita s , legata all’ $\exists$, parametro t legato al $\forall$) e viceversa (l’incognita sarà t ed il parametro, s). Abbiamo quindi il sistema a variabile s e parametro t

$$(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ 2 - 4t = -2 + 2s \end{cases}$$

Mettiamo il sistema nella solita forma

$$(1 + 2t, 2 - 4t) = (3 - s, -2 + 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ 2 - 4t = -2 + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 - 2t \\ s = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi per ogni valore del parametro t esiste una $s = 2 - 2t$ che soddisfa il sistema, ed abbiamo quindi dimostrato che ogni elemento di A_1 sta in A_2 , ovvero $A_1 \subseteq A_2$.

Il viceversa è immediato dai conti già fatti, per ogni valore del parametro s esiste una $t = 1 - \frac{1}{2}s$ che soddisfa il sistema, e quindi $A_2 \subseteq A_1$.

Quindi $A_1 = A_2$. □

Esercizio 6.8. [CCQ25] Sia $\mathbb{K}$ campo e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. Allora

1. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Infatti

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) &= 0 \\ v_1^2 + \dots + v_n^2 &= \sum_{i=1}^n v_i^2 = 0 \\ \forall i \ v_i &= 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \end{aligned}$$

2. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \not\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Infatti $(1, i) \cdot (1, i) = 1 + i^2 = 0$

Possiamo operare sulle matrici come sui sistemi, per esempio usando il metodo di riduzione di Gauss.

Esercizio 6.9. [KK05] Determinare le soluzioni del sistema di 4 equazioni in 4 incognite

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = 1 \\ x + 2y + 2z + 2t = 3 \\ 3x - 3y + z + 2t = -2 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Operiamo una riduzione di Gauss

```
Ab:=Mat[[3, 1, 1, -1, 0],
        [2, 1, 1, 2, 1],
        [1, 2, 2, 2, 3],
        [3, -3, 1, 2, -2]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=3
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 1, -1, 0]
      2^a-2/3*1^a [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
      3^a-1/3*1^a [0, 5/3, 5/3, 7/3, 3]
      4^a-1*1^a [0, -4, 0, 3, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 1, -1, 0]
----- [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
      3^a-5*2^a [0, 0, 0, -11, -2]
      4^a+12*2^a [0, 0, 4, 35, 10]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[ [3, 1, 1, -1, 0],
      [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1],
      [0, 0, 4, 35, 10],
      [0, 0, 0, -11, -2]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=4
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [3, 1, 1, -1, 0]
----- [0, 1/3, 1/3, 8/3, 1]
----- [0, 0, 4, 35, 10]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, -11, -2]
```

Il sistema $\mathcal{F}$ è quindi equivalente a

$$\begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ y + z + 8t = 3 \\ 4z + 35t = 10 \\ -11t = -2 \end{cases}$$

che possiamo facilmente risolvere con la sostituzione all'indietro

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + z - t & = & 0 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t & = & 1 \\ 4z + 35 \cdot \frac{2}{11} & = & 10 \\ t & = & \frac{2}{11} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + z - t & = & 0 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t & = & 1 \\ z & = & \frac{10}{11} \\ t & = & \frac{2}{11} \end{array} \right. \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + z - t & = & 0 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}t & = & 1 \\ z & = & \frac{10}{11} \\ t & = & \frac{2}{11} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + z - t & = & 0 \\ y & = & \frac{7}{11} \\ z & = & \frac{10}{11} \\ t & = & \frac{2}{11} \end{array} \right. \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + z - t & = & 0 \\ y & = & \frac{7}{11} \\ z & = & \frac{10}{11} \\ t & = & \frac{2}{11} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{5}{11} \\ y & = & \frac{7}{11} \\ z & = & \frac{10}{11} \\ t & = & \frac{2}{11} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{Sol}(A \cdot \underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}, \frac{2}{11} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{11} (-5, 7, 10, 2) \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

□

Esercizio 6.10. [EE97] Risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + 3z + 2t & = & 0 \\ x + 4y + z - t & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 2 \\ y + 2z + 2t & = & 1 \end{array} \right.$$

Soluzione. La matrice completa $[A \mid \underline{b}]$ associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Riduciamo questa matrice con Gauss

```

Ab:=Mat([[0,1,3,2,0],
         [1,4,1,-1,1],
         [2,1,1,0,2],
         [0,1,2,2,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Scambio la 1^a e la 2^a riga
Adesso la matrice e'

```

```

Mat[ [1, 4, 1, -1, 1],
      [0, 1, 3, 2, 0],
      [2, 1, 1, 0, 2],
      [0, 1, 2, 2, 1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 1, -1, 1]
      0 sotto pivot[0, 1, 3, 2, 0]
      3^a-2*1^a [0, -7, -1, 2, 0]
      0 sotto pivot[0, 1, 2, 2, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 1, -1, 1]
----- [0, 1, 3, 2, 0]
      3^a+7*2^a [0, 0, 20, 16, 0]
      4^a-1*2^a [0, 0, -1, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=20
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 4, 1, -1, 1]
----- [0, 1, 3, 2, 0]
----- [0, 0, 20, 16, 0]
      4^a+1/20*3^a [0, 0, 0, 4/5, 1]

```

La matrice è adesso in forma triangolare superiore e, dato che tutti i pivot sono diversi da zero, il sistema ammette un'unica soluzione. Troviamo questa soluzione mettendo la matrice incompleta in forma diagonale mediante operazioni di tipo Gauss, il che è equivalente ad operare una sostituzione all'indietro.

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 4, 1, -1, 1]
----- [0, 1, 3, 2, 0]
      3^a*1/20 [0, 0, 1, 4/5, 0]
      4^a*+5/4 [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
      1^a+1*4^a [1, 4, 1, 0, 9/4]
      2^a-2*4^a [0, 1, 3, 0, -5/2]
      3^a-4/5*4^a [0, 0, 1, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
      1^a-1*3^a [1, 4, 0, 0, 13/4]
      2^a-3*3^a [0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 1, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5/4]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-4*2^a [1, 0, 0, 0, 5/4]
----- [0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 1, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 1, 5/4]

```

Dalla matrice in questa forma leggiamo immediatamente la soluzione:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \\ t = \frac{5}{4} \end{cases}$$

□

Il seguente esercizio ci permette di esaminare il comportamento dell'algoritmo di Gauss in presenza di un parametro tra le entrate della matrice.

Esercizio 6.11. [CCE38] *Al variare del parametro reale a , dire quando il sistema 3×3 associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & a & 2 & 2 \\ a-2 & 2a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha un'unica soluzione.

Soluzione. • Procediamo senza indugio: riduciamo la matrice con Gauss

```
M:=Mat([[a, a-1,1,2],
        [a-1, a,2,2],
        [a-2,2a,0,0]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Procedo considerando a<>0, il caso a=0 verra' svolto a parte
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a - 1, 1, 2]
2^a-((a - 1)/a)*1^a [0, (2a - 1)/a, (a + 1)/a, 2/a]
3^a-((a - 2)/a)*1^a [0, (a^2 + 3a - 2)/a, (-a + 2)/a, (-2a + 4)/a]
Dato che a<>0 multiplico per a la seconda e terza riga, ottenendo la matrice
Mat([[a,      a - 1,      1,      2],
      [0,      2a - 1,  a + 1,      2],
      [0, a^2 + 3a - 2, -a + 2, -2a + 4]])

Procedo considerando a<>1/2, il caso a=1/2 verra' svolto a parte
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a - 1, 1, 2]
----- [0, 2a - 1, a + 1, 2]
3^a-((1/2a^2 + 3/2a - 1) [0, 0, (-1/2a^3 - 3a^2 + 2a)/(a - 1/2), (-3a^2 + 2a)/(a - 1/2)]
/(a - 1/2))*2^a

Dato che a<>1/2 multiplico per a-1/2 la terza riga,
e dato che a<>0 divido la terza riga per a, ottenendo la matrice
[a, a - 1,      1,      2]
[0, 2a - 1,      a + 1,      2]
[0,      0, -1/2a^2 - 3a + 2, -3a + 2]
```

Consideriamo quindi i tre casi

1. $a \neq 0, \frac{1}{2}$ Abbiamo tre elementi sulla diagonale, i primi due sicuramente diversi da zero. Per il terzo, dato che

$$-1/2a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

abbiamo due ulteriori casi:

- (a) $a \neq \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$. Abbiamo tre pivot e quindi un'unica soluzione.
 (b) $a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$ abbiamo che la terza riga è nulla tranne l'ultimo elemento. L'equazione associata diviene $0 = -3 \cdot \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2} + 2$, che è chiaramente impossibile, dato che $-3a + 2 = 0$ solo per $a = \frac{2}{3}$.
2. $a = 0$. Possiamo sostituire nella matrice dove abbiamo posto la condizione, ovvero la matrice iniziale a con 0, ottenendo

```
M:=Mat([[0, -1,1,2],
        [-1, 0,2,2],
        [-2,0,0,0]]);
Moltiplichiamo la terza riga per -1 e la scambiamo con la prima
M:=Mat([[2,0,0,0],
        [-1, 0,2,2],
        [0, -1,1,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 0, 0, 0]
2^a-(-1/2)*1^a [0, 0, 2, 2]
      0 sotto pivot[0, -1, 1, 2]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[2, 0, 0, 0],
     [0, -1, 1, 2],
     [0, 0, 2, 2]])
```

Ho tre pivot, e quindi un'unica soluzione.

3. $a = \frac{1}{2}$. Possiamo sostituire nella matrice dove abbiamo posto la condizione, ovvero la matrice

```
Mat([[a,      a - 1,      1,      2],
     [0,      2a - 1,  a + 1,      2],
     [0, a^2 + 3a - 2, -a + 2, -2a + 4]])
```

a con $\frac{1}{2}$, ottenendo la matrice

```
Mat([[1/2, -1/2, 1, 2],
     [0,      0, 3/2, 2],
     [0, -1/4, 3/2, 3]]);
Scambiando la seconda e terza riga, otteniamo la matrice
Mat([[1/2, -1/2, 1, 2],
     [0, -1/4, 3/2, 3],
     [0,      0, 3/2, 2]]);
```

che è già in forma a scala, con tre pivot, e quindi esiste un'unica soluzione.

Ricapitolando, il sistema ha un'unica soluzione tranne che per $a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$, quando è impossibile.

- Dato che non ci sono chieste le soluzioni, ma solo quando ne esiste una sola, possiamo permutare le prime tre colonne (portiamo la terza colonna in prima posizione, spostando le prime due a destra) senza alterare il problema *per quanto vogliamo sapere, ovvero la numerosità delle soluzioni*. N.B. Non possiamo scambiare una delle prime tre colonne con la quarta, perché questa è la colonna dei termini noti, non dei coefficienti di una variabile. Otteniamo quindi la matrice

```
M:=Mat([[1, a, a-1, 2],
        [2, a-1, a, 2],
        [0, a-2, 2a, 0]]);
```

```
RiduciScalaVerbose(M);
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
```

```
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [1, a, a - 1, 2]
2^a-(2)*1^a [0, -a - 1, -a + 2, -2]
0 sotto pivot[0, a - 2, 2a, 0]
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-a - 1
```

```
Pongo a<> -1 e procedo, il caso a=-1 sara' svolto a parte
```

```
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [1, a, a - 1, 2]
----- [0, -a - 1, -a + 2, -2]
3^a-((-a + 2)/(a + 1))*2^a [0, 0, (a^2 + 6a - 4)/(a + 1), (-2a + 4)/(a + 1)]
```

```
Moltiplico per a+1, dato che lo so non nullo, ottenendo
```

```
Mat([[1, a, a - 1, 2],
     [0, -a - 1, -a + 2, -2],
     [0, 0, a^2 + 6a - 4, -2a + 4]])
```

Esaminiamo i due casi, ricordando che le radici di $a^2 + 6a - 4$ sono $a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -3 \pm \sqrt{13}$.

1. $a \neq -1$.
 - (a) se $a \neq -3 \pm \sqrt{13}$ ho tre pivot ed una sola soluzione.
 - (b) se $a = -3 \pm \sqrt{13}$, come sopra ho un sistema impossibile.
2. $a = -1$: opero la sostituzione nella matrice in cui ho posto la condizione,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 & 2 \\ 0 & -a-1 & -a+2 & -2 \\ 0 & a-2 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che dopo aver scambiato la seconda e terza riga diviene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

matrice a scala con tre pivot e quindi esiste una soluzione unica.

Come prima (ovviamente), esiste un'unica soluzione se e solo se $a \neq -3 \pm \sqrt{13}$, altrimenti il sistema è impossibile.

Oppure, riformulando, il sistema è impossibile se $a = -3 \pm \sqrt{13}$, altrimenti esiste un'unica soluzione. Notiamo che

- è stato conveniente scegliere una strada che semplificasse i conti, piuttosto che partire senza pensare.
- La teoria che abbiamo sviluppato ci garantisce che le soluzioni siano le stesse, NON che il processo risolutivo sia lo stesso. Alcune scelte possono portare a calcoli più lunghi e a casi spuri, inutili, come i casi $0, \frac{1}{2}$ del primo metodo sopra.

□

Esercizio 6.12. [CCC38] **Non in classe** *Risolvere il sistema*

$$S : \begin{cases} 3xt + yt + \frac{t(t-5)}{2}z = \frac{t(2-t)}{2} \\ x + y + tz = 0 \\ x - y - z = t \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. (t è quindi parametro).

Soluzione. Questo equivale a descrivere più in dettaglio l'insieme delle soluzioni

$$\text{Sol}(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 3xt + yt + 1/2zt^2 - 5/2zt = -1/2t^2 + t \\ x + y + tz = 0 \\ x - y - z = t \end{cases} \right\}$$

Scriviamo il sistema nella forma equivalente mediante la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 3t & t & 1/2t^2 - 5/2t & -1/2t^2 + t \\ 1 & 1 & t & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

Per semplificare i calcoli, riordiniamo le righe in modo da non avere nella posizione a_{11} un'entrata dipendente da t , riconducendoci mediante scambio di righe al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 0 \\ 1 & -1 & -1 & t \\ 3t & t & 1/2t^2 - 5/2t & -1/2t^2 + t \end{pmatrix}$$

```
A:=Mat[ [1, 1, t, 0],
         [1, -1, -1, t],
         [3t, t, 1/2t^2 - 5/2t, -1/2t^2 + t]];
```

```
L:=RiduciScalaVerbose(A);L;
```

```
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
```

```
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
```

```
----- [1, 1, t, 0]
          2^a-1*1^a [0, -2, -t - 1, t]
          3^a-3t*1^a [0, -2t, -5/2t^2 - 5/2t, -1/2t^2 + t]
```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot

$$\begin{array}{rrrr} \text{-----} & [1, & 1, & t, & 0] \\ \text{-----} & [0, & -2, & -t - 1, & t] \\ & 3^a - t \cdot 2^a & [0, & 0, & -3/2t^2 - 3/2t, & -3/2t^2 + t] \end{array}$$

Moltiplichiamo la seconda riga per -1 e la terza riga per $-\frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 2 & t+1 & -t \\ 0 & 0 & t(t+1) & t(t-\frac{2}{3}) \end{pmatrix}$$

Rimettendo il sistema nella forma equazionale

$$\begin{cases} x + y + tz = 0 \\ 2y + (t+1)z = -t \\ t(t+1)z = t(t-\frac{2}{3}) \end{cases}$$

Notiamo che in ogni passo di Gauss il coefficiente della combinazione lineare relativo alla riga che stavamo manipolando è sempre stato sicuramente non nullo. Quindi non è mai stato necessario spezzare i casi.

L'ultima equazione

$$t(t+1)z = t\left(t - \frac{2}{3}\right)$$

ha soluzione unica se e solo se $t \neq 0, -1$ (tratteremo a parte questi due casi), e questa soluzione è

$$z = \frac{3t-2}{3(t+1)}$$

Sostituendo la z nella seconda equazione otteniamo

$$2y + (t+1)\frac{3t-2}{3(1+t)} = -t$$

da cui

$$y = \frac{1-3t}{3}$$

Sostituendo la z e la y nella prima equazione otteniamo

$$x + \frac{1-3t}{3} + t\frac{3t-2}{3(1+t)} = 0$$

da cui

$$x = \frac{4t-1}{3(t+1)}$$

e quindi, per ogni $t \neq 0, -1$, la soluzione è

$$\text{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{4t-1}{3(t+1)}, \frac{1-3t}{3}, \frac{3t-2}{3(1+t)} \right) \right\}$$

Trattiamo a parte i due casi $t = 0, -1$.

$t = 0$ Il sistema diviene, sostituendo $t = 0$ nella forma equazionale scritta sopra,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

e quindi le soluzioni, per $t = 0$, sono

$$\text{Sol}(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \right\}$$

ovvero

$$\text{Sol}(S) = \{(-y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(-\lambda, \lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$t = -1$ In questo caso la terza equazione del sistema diviene

$$0 = (-1) \left(-1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

che è chiaramente impossibile, e quindi il sistema è impossibile.

Riassumendo, il sistema S

- per $t = -1$ è impossibile.
- Per $t = 0$ ha ∞ soluzioni

$$\text{Sol}(S) = \{(-\lambda, \lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(-1, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{-\lambda(1, -1, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Per $t \neq 0, -1$ ha un'unica soluzione (che dipende dal parametro t)

$$\text{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{4t-1}{3(t+1)}, \frac{1-3t}{3}, \frac{3t-2}{3(1+t)} \right) \right\}$$

□

Esercizio 6.13. [EE7] Risolvere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Scegliamo di non fare scambi di righe.

Andiamo avanti con Gauss con la trasformazione $III^a \rightarrow III^a + \frac{2}{t} \cdot I^a$. Dato che stiamo dividendo per t , dobbiamo porre $t \neq 0$. Risolveremo a parte più tardi il caso $t = 0$.

Dato che $t \neq 0$ possiamo operare con Gauss

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & \frac{2t-2}{t} & \frac{t+2}{t} & \frac{5t+2}{t} \end{pmatrix} \quad III^a \rightarrow III^a + \frac{2}{t} \cdot I^a$$

N.B. Avremmo potuto anche operare sulla terza riga con la trasformazione $III^a \rightarrow t \cdot III^a + 2 \cdot I^a$. Avremmo dovuto considerare a parte il caso $t = 0$ perché avremmo avuto nullo il coefficiente della riga che stiamo sostituendo.

Possiamo moltiplicare per t la terza riga, dato che $t \neq 0$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 2t-2 & t+2 & 5t+2 \end{pmatrix} \quad III^a \rightarrow t \cdot III^a$$

Continuiamo con la seconda colonna

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t+2 & 5t \end{pmatrix} \quad III^a \rightarrow III^a - 2 \cdot II^a$$

Ed abbiamo messo il sistema in forma triangolare superiore.

Abbiamo già la condizione $t \neq 0$, e quindi il primo pivot. Abbiamo il secondo pivot se $t \neq 1$, il terzo se $t \neq 2$. Se $t \notin \{0, 1, 2\}$ il sistema ha un'unica soluzione. Verificheremo a parte i tre casi particolari. Calcoliamo ora le soluzioni con la sostituzione all'indietro. La terza riga ci dice che

$$(1 - \frac{1}{2}t)z = \frac{5}{2}t \implies z = \frac{5t}{2-t}$$

Sostituendo nella seconda riga otteniamo

$$(t-1)y + t \frac{5t}{2-t} = 1 \implies y = \frac{5t^2 + t - 2}{t^2 - 3t + 2}$$

e sappiamo che $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) \neq 0$ per le condizioni poste. Sostituendo nella prima riga otteniamo

$$\begin{aligned} -tx + (t-1) \frac{5t^2 + t - 2}{t^2 - 3t + 2} + \frac{5t}{2-t} &= 1 \\ -tx + \frac{5t^2 + t - 2}{t-2} - \frac{5t}{t-2} - 1 &= 0 \\ \frac{-xt^2 + 2xt + 5t^2 - 5t}{(t-2)} &= 0 \\ -xt^2 + 2xt + 5t^2 - 5t &= 0 \\ x &= \frac{5t-5}{t-2} \end{aligned}$$

Quindi se $t \notin \{0, 1, 2\}$ ho la soluzione, unica al variare del parametro t (questo vuol dire che per ogni dato $t \in \mathbb{R}$ c'è una ed una sola soluzione)

$$\left(\frac{5t-5}{t-2}, \frac{5t^2+t-2}{t^2-3t+2}, \frac{5t}{2-t} \right) = \frac{1}{t-2} \left(5t-5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right)$$

notando che $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ e raccogliendo $\frac{1}{t-2}$

Analizziamo adesso i casi particolari.

$t = 1$ Sostituiamo $t = 1$ nella forma triangolare superiore

$$\begin{pmatrix} -t & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t+2 & 5t \end{pmatrix}$$

(possiamo farlo perché siamo arrivati a calcolare la forma triangolare superiore senza supporre che $t \neq 1$)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dalla seconda riga otteniamo l'equazione $z = 1$ e dalla terza l'equazione $z = 5$. Il sistema è pertanto impossibile.

$t = 2$ Sostituiamo $t = 2$ nella forma triangolare superiore (possiamo farlo perché siamo arrivati a calcolare la forma triangolare superiore senza supporre che $t \neq 2$) ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima riga otteniamo l'equazione $0 \cdot z = 10$ che non ha soluzione. Quindi il sistema è impossibile.

$t = 0$ Il sistema, sostituendo $t = 0$ nella forma iniziale

$$\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 1 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

diviene

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ -y = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

che ha immediatamente soluzione unica $x = \frac{5}{2}, y = -1, z = 0$. Abbiamo dovuto sostituire nella forma iniziale del sistema *e non nella forma triangolare superiore* perché quest'ultima è stata calcolata supponendo $t \neq 0$.

Ricapitolando, il sistema

- Per $t = 1, 2$ è impossibile.
- Per $t = 0$ ha soluzione unica $(\frac{5}{2}, -1, 0)$
- Per $t \notin \{0, 1, 2\}$ (caso generico) ha soluzione unica $\frac{1}{t-2} \left(5t - 5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right)$.

Notiamo che sostituendo $t = 0$ nella formula della soluzione del caso generico otteniamo

$$\frac{1}{t-2} \left(5t - 5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{5}{2}, -1, 0 \right)$$

Quindi potremmo compattare la descrizione:

- Per $t = 1, 2$ è impossibile.
- Per $t \notin \{1, 2\}$ (caso generico) ha soluzione unica $\frac{1}{t-2} \left(5t - 5, \frac{5t^2+t-2}{t-1}, -5t \right)$

Questo accade perché abbiamo trattato a parte il caso $t = 0$ soltanto perché abbiamo scelto un particolare elemento come primo pivot. Altre scelte avrebbero potuto portare ad altri casi particolari, che ugualmente sarebbero confluiti nel caso generale. $\square$

Provate a rifare l'esercizio scambiando la prima e terza riga della matrice iniziale.

Esercizio 6.14. [MM77] *Determinare le soluzioni in $\mathbb{R}$ del sistema*

$$\begin{cases} 3x + y + z + 3t = 1 \\ x + 4y + t = 1 \\ 5x + 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa $[A|b]$ associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Notiamo che se mettessimo come prime colonne la terza e la quarta, la riduzione gaussiana sarebbe molto più semplice. Possiamo farlo, tenendo presente che questo equivale a introdurre nuove variabili $x' = z$, $y' = t$, $z' = x$, $t' = y$ e a risolvere il sistema nelle nuove variabili associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Svolgiamo i passi di riduzione di Gauss necessari a mettere il sistema in forma triangolare superiore: basta sostituire la quarta riga con la quarta riga meno $2/5$ della terza, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

Risolviamo con la sostituzione all'indietro *nelle variabili x', y', z', t'* ed otteniamo facilmente

$$t' = 3, \quad z' = -1, \quad y' = -10, \quad x' = 31,$$

da cui

$$t = y' = -10, \quad z = x' = 31, \quad y = t' = 3, \quad x = z' = -1.$$

$\square$

N.B. Avremmo potuto risolvere la terza e quarta equazione ricavando la soluzione unica in $x = x_0$, $y = y_0$, e sostituire poi $x = x_0$, $y = y_0$ nella prima e seconda riga, ottenendo un sistema di due equazioni nelle due variabili z, t facilmente risolubile.

Esercizio 6.15. [MM16] Risolvere in $\mathbb{R}$, nelle incognite x, y, z, t, u, v , il sistema lineare associato alla matrice completa

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Soluzione. Mettiamo la matrice incompleta in una forma il più possibile vicina a quella diagonale mediante operazioni di Gauss:

```
Ab:=Mat[[ 2, 3, 1, -1, 2, 1, 1],
         [ 2, 3, 1, 0, 0, 1, 0],
         [ 0, 0, 2, 1, 2, 2, 2],
         [-2, -3, 0, -1, 6, 0, 4],
         [ 2, 3, -1, -2, 4, 0, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
      0 sotto pivot[0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
      4^a+1*1^a [0, 0, 1, -2, 8, 1, 5]
      5^a-1*1^a [0, 0, -2, -1, 2, -1, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[2, 3, 1, -1, 2, 1, 1],
     [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2],
     [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1],
     [0, 0, 1, -2, 8, 1, 5],
     [0, 0, -2, -1, 2, -1, -1]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
----- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
      4^a-1/2*2^a [0, 0, 0, -5/2, 7, 0, 4]
      5^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 4, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
----- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
      4^a+5/2*3^a [0, 0, 0, 0, 2, 0, 3/2]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 4, 1, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[4, 5]=2
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 3, 1, -1, 2, 1, 1]
----- [0, 0, 2, 1, 2, 2, 2]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
```

```
----- [0, 0, 0, 0, 2, 0, 3/2]
5^a-2*4^a [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
```

Abbiamo ridotto la matrice $[A|b]$ in forma a scala. Vediamo ora di fare la sostituzione all'indietro mediante operazioni di Gauss

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a+1/2 [1, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 1/2, 1/2]
2^a+1/2 [0, 0, 1, 1/2, 1, 1, 1]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
4^a+1/2 [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 6 pivot
1^a-1/2*5^a [1, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 0, 3/2]
2^a-1*5^a [0, 0, 1, 1/2, 1, 0, 3]
----- [0, 0, 0, 1, -2, 0, -1]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 5 pivot
1^a-1*4^a [1, 3/2, 1/2, -1/2, 0, 0, 3/4]
2^a-1*4^a [0, 0, 1, 1/2, 0, 0, 9/4]
3^a+2*4^a [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 4 pivot
1^a+1/2*3^a [1, 3/2, 1/2, 0, 0, 0, 1]
2^a-1/2*3^a [0, 0, 1, 0, 0, 0, 2]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
Cancello la colonna sopra il 3 pivot
1^a-1/2*2^a [1, 3/2, 0, 0, 0, 0, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 2]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1/2]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0, 3/4]
----- [0, 0, 0, 0, 0, 1, -2]
```

Da cui otteniamo le equazioni:

$$x + \frac{3}{2}y = 0, \quad z = 2, \quad t = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{3}{4}, \quad v = -2$$

Le soluzioni sono

$$\left\{ \left(-\frac{3}{2}\lambda, \lambda, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -2 \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

□

Esercizio 6.16. [KK06] Risolvere su $\mathbb{Q}$ il sistema di 4 equazioni in 4 incognite con matrice completa

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -7 & 2 \end{array} \right)$$

Soluzione. Riduciamo la matrice $[A|b]$ con Gauss

```
Ab:=Mat[[5, 2, 1, -1, 0],
        [7, 1, 3, 2, -1],
        [3, 3, -1, -4, 1],
        [1, 4, -3, -7, 2]];
L:=RiduciScalaVerbose(Ab);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=5
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [5, 2, 1, -1, 0]
      2^a-7/5*1^a [0, -9/5, 8/5, 17/5, -1]
      3^a-3/5*1^a [0, 9/5, -8/5, -17/5, 1]
      4^a-1/5*1^a [0, 18/5, -16/5, -34/5, 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-9/5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [5, 2, 1, -1, 0]
----- [0, -9/5, 8/5, 17/5, -1]
      3^a+1*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
      4^a+2*2^a [0, 0, 0, 0, 0]
```

Ci sono elementi nulli sulla diagonale dell'incompleta. Abbiamo quindi infinite soluzioni oppure nessuna. Il sistema dato è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y + z - t &= 0 \\ -\frac{9}{5}y + \frac{8}{5}z + \frac{17}{5}t &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 2y + z - t &= 0 \\ -9y + 8z + 17t &= -5 \end{cases}$$

Dato che ogni riga nulla della matrice incompleta corrisponde ad un termine noto nullo (le righe sono nulle anche nella matrice completa), ci sono infinite soluzioni che possiamo riscrivere, esplicitando x, y , come

$$\begin{cases} x &= -\frac{5}{9}z - \frac{5}{9}t - \frac{2}{9} \\ y &= \frac{8}{9}z + \frac{17}{9}t + \frac{5}{9} \end{cases}$$

La procedura standard è di esplicitare le variabili associate ai pivot non nulli e di trattare le altre variabili come parametri. Pertanto chiamiamo $t = \alpha$ e $z = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ e

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-\frac{5}{9}\beta - \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\beta + \frac{17}{9}\alpha + \frac{5}{9}, \beta, \alpha \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

□

Esercizio 6.17. [LL81] *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ risolvere il sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k^2 + 3k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$[A | b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k^2+3k \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Scambiamo la seconda e quarta riga, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k^2+3k \end{array} \right)$$

Riduciamo con Gauss

```
Use R:=Q[x,y,z,t,k];
M:=Mat([[1, 2,0, 1, 0],
        [2, 3,1, 2, 0],
        [0, 0,6,k+5, 0],
        [0,k-1,1, -1,k^2+3k]]);
-----
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0]
      2^a-2*1^a [0, -1, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 6, k + 5, 0]
      0 sotto pivot[0, k - 1, 1, -1, k^2 + 3k]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0]
----- [0, -1, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 6, k + 5, 0]
      4^a+k - 1*2^a [0, 0, k, -1, k^2 + 3k]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=6
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 0, 1, 0]
----- [0, -1, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 6, k + 5, 0]
      4^a-1/6k*3^a [0, 0, 0, -1/6k^2 - 5/6k - 1, k^2 + 3k]
```

Esaminiamo l'ultima riga: osserviamo che $k^2 + 5k + 6 = (k + 2)(k + 3)$, moltiplichiamo per -6 e l'ultima riga della matrice si riduce alla seguente:

$$(0, 0, 0, (k + 2)(k + 3), -6k(k + 3))$$

1. Se $k = -2$ l'ultima riga ci dice che il sistema è impossibile, dato che l'equazione corrispondente è

$$0 \cdot t = -6(-2)(1) \Rightarrow 0 = 12$$

2. Se $k = -3$ la matrice diviene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ed il sistema associato è

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ -y + z = 0 \\ 3z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ t = -3z \end{cases}$$

Abbiamo scelto arbitrariamente di esplicitare x, y, t in funzione di z per semplicità. Pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni ed esse sono

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \{(\lambda, \lambda, \lambda, -3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. Se $k \neq -2, -3$ il sistema ha quattro pivot, quindi un'unica soluzione, che troviamo facendo i conti, per esempio mettendo la matrice in forma normale,

Scala2DiagonaleVerbose(L);

Metto tutti i pivots a 1

```
----- [1, 2, 0, 1, 0]
      2^a*-1 [0, 1, -1, 0, 0]
      3^a*+1/6 [0, 0, 1, 1/6k + 5/6, 0]
4^a*-6/(k^2 + 5k + 6) [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]
```

Cancello la colonna sopra il 4 pivot

```
      1^a-1*4^a [1, 2, 0, 0, 6k/(k + 2)]
----- [0, 1, -1, 0, 0]
3^a-1/6k + 5/6*4^a [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
----- [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]
```

Cancello la colonna sopra il 3 pivot

```
----- [1, 2, 0, 0, 6k/(k + 2)]
      2^a+1*3^a [0, 1, 0, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
----- [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
----- [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]
```

Cancello la colonna sopra il 2 pivot

```
      1^a-2*2^a [1, 0, 0, 0, -2k]
----- [0, 1, 0, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
----- [0, 0, 1, 0, (k^2 + 5k)/(k + 2)]
----- [0, 0, 0, 1, -6k/(k + 2)]
```

Per ogni $k \neq -2, -3$ la soluzione è unica e

$$\text{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \left\{ \left(-2k, \frac{k^2 + 5k}{k + 2}, \frac{k^2 + 5k}{k + 2}, \frac{-6k}{k + 2} \right) \right\}$$

□

Esercizio 6.18. [DDW00] *Risolviamo il sistema*

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ovvero descriviamo in forma semplice l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

Costruiamo la matrice completa del sistema e riduciamo con Gauss

```
A:=Mat([[1, -1,-1,2],
        [3, -2, 3,0]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
```

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```
----- [1, -1, -1, 2]
      2^a-3*1^a [0, 1, 6, -6]
```

Scala2DiagonaleVerbose(L);

;

Metto tutti i pivots a 1

```
----- [1, -1, -1, 2]
----- [0, 1, 6, -6]
```

Cancello la colonna sopra il 2^a pivot

```
      1^a+1*2^a [1, 0, 5, -4]
----- [0, 1, 6, -6]
```

Quindi

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{cases} x + 5z = -4 \\ y + 6z = -6 \end{cases} \right\}$$

Quindi, se applichiamo le due condizioni $x = -5z - 4$, $y = -6z - 6$ al vettore generico di

$$\mathbb{K}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{K}\}$$

*per ottenere il vettore generico di $\mathcal{A}$ otteniamo $(-5z - 4, -6z - 6, z)$ senza nessuna ulteriore condizione su z .**Quindi*

$$\mathcal{A} = \{(-5z - 4, -6z - 6, z) \in \mathbb{K}^3 \mid z \in \mathbb{K}\}$$